www.ccr.fr

Solution multi modèles et application aux CAT NAT

Thierry COHIGNAC*, Nabil KAZI-TANI**

*CCR
**ISFA

Journées IARD
30 mars 2018

Introduction

Considérons que nous avons l'avis de deux experts (deux modèles) pour un phénomène donné :

- Comment construire un modèle à partir des deux modèles initiaux ?

- Comment combiner ces modèles pour la gestion des risques et/ou la tarification ?

Introduction

Exemples en CATNAT / Assurance :

- Données historiques Vs Modèle CAT
- Modèle CAT_1 Vs Modèle CAT_2
- Loi historique_1 Vs Loi historique_2

Technique actuarielle classique : Théorie de la Crédibilité (1/4)

<u>But</u>: estimation d'un paramètre associé à un risque X_i (fréquence, coût) faisant partie d'une classe de risques homogènes

<u>Hypothèses</u>

- On observe un échantillon de taille n de la variable X_i,
- On note $\overline{X}_i$ la moyenne empirique de l'échantillon
- La moyenne sur la classe de risque est noté « μ »,
- On note $\hat{\mu}_i$ l'estimation de la moyenne de X_i

<u>Résultat (Bühlmann & all)</u>

$$\hat{\mu}_i = w \times \overline{X}_i + (1 - w) \times \mu$$

Avec w, le poids (la crédibilité) accordé à la moyenne de l'échantillon

Technique actuarielle classique : Théorie de la Crédibilité (2/4)

○ Calcul de « W » (approche Bayésienne)

$$W = \frac{n}{n + K}$$

Avec

- n, la taille de l'échantillon (quand n –> ∞, w–> 1),
- K = $\frac{EPV}{VHM}$,
- EPV : Expected Value of Process Variance (variance estimée du process),
- VHM : Variance of the Hypothetical Mean (variance au sein de la classe de risque)

○ Remarque:

W est obtenu par minimisation de la variance de l'estimateur $\hat{\mu}_i$

Technique actuarielle classique : Théorie de la Crédibilité (3/4)

Exemples d’applications de la théorie de la crédibilité

1) Calcul de la fréquence de sinistre pour un risque particulier faisant partie d’un groupe « homogène » de risques (cf. assurance auto)

Hypothèses (modèle Poisson-Gamma)

- Le nombre de sinistres pour une année j, N_j suit une loi de Poisson de paramètre θ
- Le paramètre θ de la loi de Poisson suit lui-même une loi Gamma de paramètres (γ, β)

Alors

$$F^{bayes} = \alpha \times F^{ind} + (1 - \alpha) \times F^{col}$$

Avec

- $F^{ind} = \overline{N}$ (la fréquence individuelle observée du risque considéré)
- $F^{col} = \frac{\gamma}{\beta}$ (la fréquence collective, espérance de la loi Gamma)
- $\alpha = \frac{n}{n+K}$, K = β

Technique actuarielle classique : Théorie de la Crédibilité (4/4)

Exemples d'applications de la théorie de la crédibilité

2) Calcul de la fréquence de fusion d'un réacteur nucléaire

Hypothèses (modèle Binomial-Beta)

- Le nombre de sinistres suit une loi Binomial de paramètre p (déduit de la fréquence observée d'accidents nucléaires « $F^{observée}$ »)
- Le paramètre p suit une loi Beta de paramètres (st, (1-st)), (t correspond à la fréquence calculée par les experts « F^{expert} » en sureté nucléaire, s à la crédibilité accordée à l'a priori)

Alors

$$F^{bayes} = \alpha \times F^{observée} + (1-\alpha) \times F^{expert}$$

Avec

- $\alpha = \frac{n}{n+s}$,
- n: nombre d'années réacteur à aujourd'hui (sachant qu'il y a environ 500 réacteurs avec une ancienneté moyenne de 28,8 ans).
- s: force de l'a priori

Référence: The Economics and Uncertainties of Nuclear Power François Lévêque Ed Cambridge

Combinaison de modèles

- Publications de référence :
  - ➢Bates and Granger, The Combination of Forecasts, 1969.

  - ➢Granger, Combining forecasts: twenty years later, 1989.

  - ➢McConway, Marginalization and linear opinion pools, 1981.
  - ➢Gneiting and co-authors, 2010’s.
  - ➢Koenker, Quantile Regression, 2005.

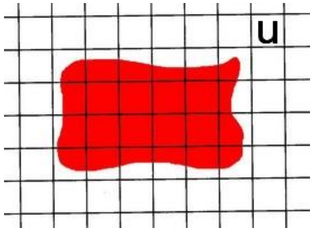
Combinaison de modèles

- Surveys :

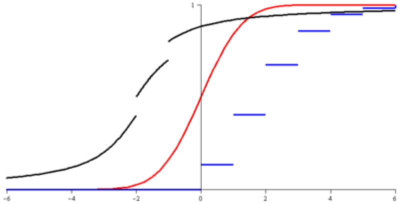
  - Genest and Zidek, Combining probability distributions: A critique and an annotated bibliography, 1986.
  - Clemen, Combining forecasts: A review and annotated bibliography, 1989.
  - Wallis, Combining Forecasts - Forty Years Later, 2010.

Combinaison de modèles

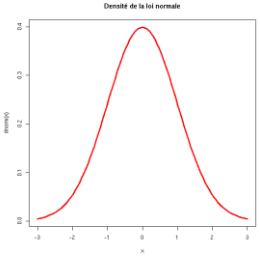
- Méthode commune des papiers précédents : <u>Combinaison linéaire</u> de
  - ➢Mesures



  - ➢Fonctions de répartition



  - ➢Densités



  - ➢Quantiles

On pourrait envisager :

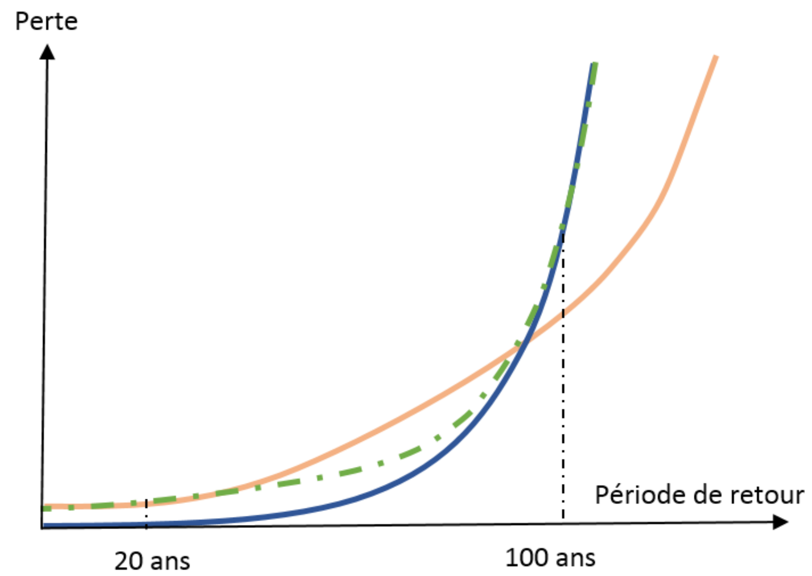
➢Fonctions caractéristiques

➢Fonctions Potentiel

Combinaison de modèles

○ Méthode commune des papiers précédents : <u>Combinaison linéaire</u> de

- ➢Mesures
- ➢Fonctions de répartition
- ➢Densités
- ➢**Quantiles**



On pourrait envisager :

- ➢Fonctions caractéristiques
- ➢Fonctions Potentiel

Mélange de quantiles

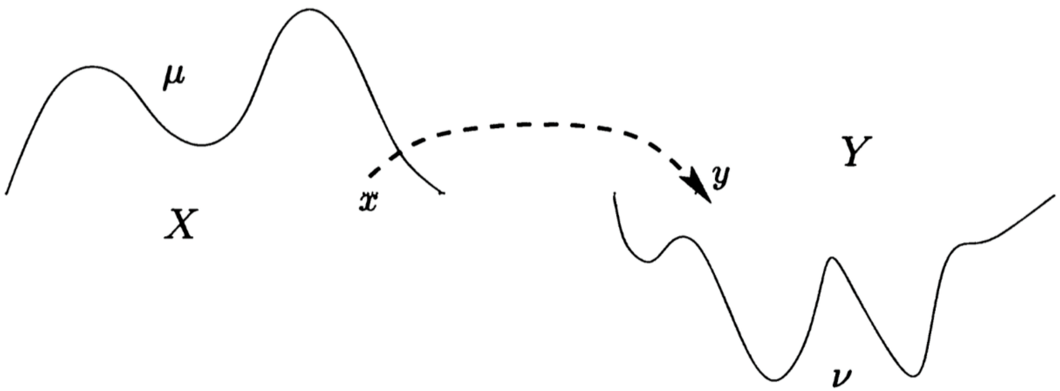
- De quoi a-t-on besoin ?

  - D’une structure de dépendance (loi jointe)
  - De poids.

Lien entre ces deux ingrédients :

Les poids sont choisis de sorte à minimiser la variance de l’estimateur que l’on construit.

Loi jointe : Donnée par le transport optimal



666 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DES DÉBLAIS
ET DES REMBLAIS.
Par M. MONGE.

LORSQU'ON doit tranſporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit tranſporter, & le nom de *Remblai* à l'eſpace qu'elles doivent occuper après le tranſport.

Le prix du tranſport d'une molécule étant, toutes choſes d'ailleurs égales, proportionnel à ſon poids & à l'eſpace qu'on lui fait parcourir, & par conſéquent le prix du tranſport total devant être proportionnel à la ſomme des produits des molécules multipliées chacune par l'eſpace parcouru, il s'enſuit que le déblai & le remblai étant donnés de figure & de poſition, il n'eſt pas indifférent que telle molécule du déblai ſoit tranſportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine diſtribution à faire des molécules du premier dans le ſecond, d'après laquelle la ſomme de ces produits ſera la moindre poſſible, & le prix du tranſport total ſera un *minimum*.

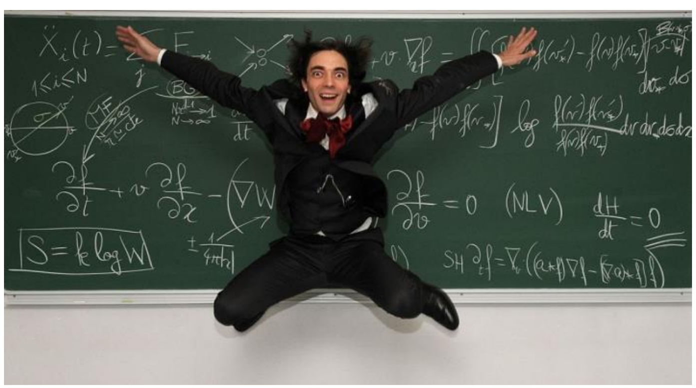
C'eſt la ſolution de cette queſtion que je me propoſe de donner ici. Je diviſerai ce Mémoire en deux parties, dans la première je ſuppoſerai que les déblais & les remblais ſont des aires contenues dans un même plan ; dans le ſecond, je ſuppoſerai que ce ſont des volumes.

ÈRE PARTIE.

lanes ſur des aires compriſes dans même plan.

I.

oute que doive ſuivre une molécule



Loi jointe : Donnée par le transport optimal

$\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ = mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ de marginales données par μ et ν.

$c(x, y)$: fonction de coût ; mesure le coût de désaccord aux points x et y.

On choisit π de sorte à minimiser le coût total de désaccord:

$$V_c := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y) d\pi(x, y).$$

$$\boxed{V_c = \int_0^1 c\left(q_\mu(u) - q_\nu(u)\right) du.}$$

Loi jointe : Donnée par le transport optimal

Plan de transport = Structure de dépendance

ν

μ

	1	2	3	
1	$D_{1,1}$	$D_{1,2}$	$D_{1,3}$	0, 28
2	$D_{2,1}$	$D_{2,2}$	$D_{2,3}$	0, 20
3	$D_{3,1}$	$D_{3,2}$	$D_{3,3}$	0, 03
4	$D_{4,1}$	$D_{4,2}$	$D_{4,3}$	0, 49
	0, 29	0, 30	0, 41	

Loi jointe : Donnée par le transport optimal

Plan de transport = Structure de dépendance

ν

μ

	1	2	3	
1	0	$0,10$	$0,18$	$0,28$
2	0	$0,20$	0	$0,20$
3	0	0	$0,03$	$0,03$
4	$0,29$	0	$0,20$	$0,49$
	$0,29$	$0,30$	$0,41$	

Loi jointe : Donnée par le transport optimal

Conclusion : La structure de dépendance comonotone minimise le désaccord entre les deux modèles.

Questions qui restent :

- Que faire si on dispose d’informations a priori sur la structure de dépendance ?
- Comment choisir les poids ?

Les poids sont choisis de sorte à minimiser la variance de l'estimateur que l'on construit.

Supposons que nous ayons accès aux modèles d'experts via des échantillons i.i.d. $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(Y_1, \cdots, Y_m)$ de distributions respectives μ et ν. Soient $u \in [0,1]$ et

$$\widehat{q_\lambda}(u) := \lambda X_{(k,n)} + (1-\lambda) Y_{(\ell,m)}$$

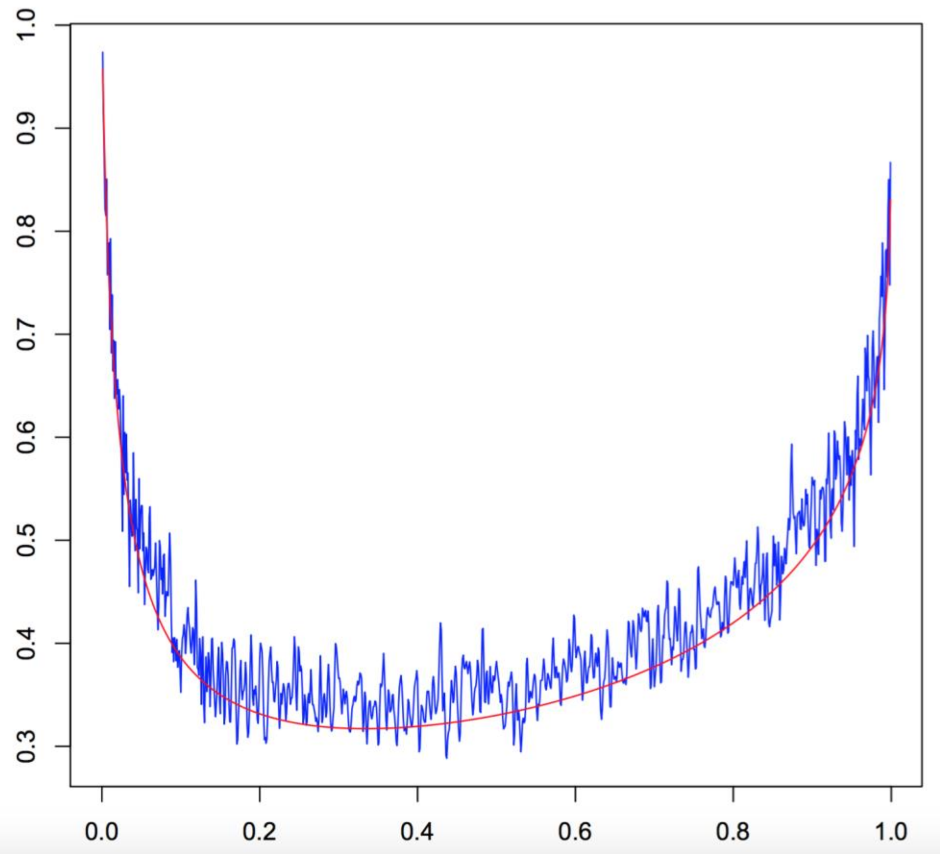
On choisit λ en minimisant la **variance** $V(\widehat{q_\lambda}(u))$, où les v.a. sont normalisées par leur moyenne.

$$\lambda^* := \max\left\{\min\left(\frac{a}{a+b}, 1\right), 0\right\} \qquad \begin{aligned} a &:= V(q_\nu(Z_{\ell,m})) - cov(q_\mu(Z_{k,n}), q_\nu(Z_{\ell,m})) \\ b &:= V(q_\mu(Z_{k,n})) - cov(q_\mu(Z_{k,n}), q_\nu(Z_{\ell,m})). \end{aligned}$$

où $Z_{h,i}$ est une variable aléatoire de loi $\text{Beta}(h, i-h+1)$

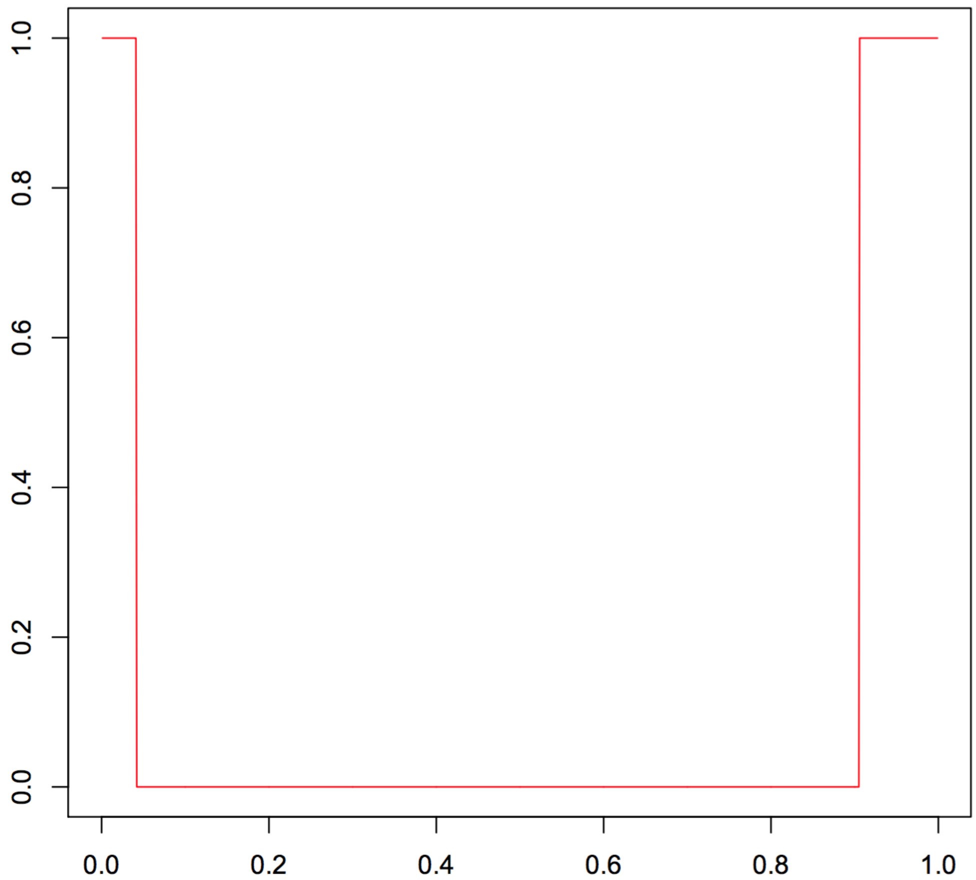
Choix des Poids

- Log Normale VS Weibull, indépendantes, 200K simulations, Poids limite



Choix des Poids

- Log Normale VS Weibull, comonotones, Poids limite



Choix des Poids

Comment les courbes précédentes sont-elles obtenues ?

- Un Théorème Central Limite :

  - Pour la somme :

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - m(\mu)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

  - Pour les quantiles :

$$\sqrt{n}\left(X_{nu,n} - q_\mu(u)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}\left(0, \frac{u(1-u)}{f_\mu(q_\mu(u))^2}\right)$$

Choix des Poids

○ Résultats :

- ➢ Détermination du poids optimal asymptotique, explicitement pour toute forme de structure de dépendance (copule) entre les experts.
- ➢ Cas de v.a. indépendantes :

$$\lambda^*(u) = \frac{f_\mu(q_\mu(u))^2}{f_\mu(q_\mu(u))^2 + f_\nu(q_\nu(u))^2}$$

- ➢ Si la structure de dépendance est comonotone : le poids optimal ne prend que les valeurs 0 et 1:

$$\lambda^*(u) = \frac{f_\mu(q_\mu(u))}{f_\mu(q_\mu(u)) - f_\nu(q_\nu(u))}$$

Application à la modélisation des catastrophes naturelles

	Avantages	Inconvénients
Approche statistique	- Conforme à la sinistralité observée - Simplicité de modélisation	- Ne prend pas en compte des événements non survenus - Ne prend pas en compte les évolutions de l'exposition d'une cédante - Sensibilité à l'ajout d'une année fortement sinistrée
Approche par exposition	- Prend en compte des événements extrêmes non survenus - Permet une modélisation de tous les périls - Prend en compte l'évolution de l'exposition d'une cédante	- Instabilité des résultats de modélisation (changement de modèle) - Nécessite beaucoup d'hypothèses de modélisation

Application à la modélisation des catastrophes naturelles

Considérons que nous avons l'avis de deux experts (deux modèles) pour un événement donné :

- Le premier se base sur les événements historiques : l'expert historique
- Le second sur différents modèles physiques : l'expert à l'exposition

Les deux experts sont d'accord sur la gravité de l'événement : ils sont d'accord sur la période de retour correspondant à l'événement.

Cependant, ils n'évaluent pas de la même manière les pertes liées à l'événement.

Idée principale du modèle hybride: prise en compte des avis des deux experts. Lorsque l'événement est un événement fréquent, nous donnons plus de crédit à l'expert historique et inversement pour les évènements extrêmes.

Traduction mathématique :

$$\boldsymbol{Perte_{hybride}} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{Perte_{histo}} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{Perte_{expo}}$$

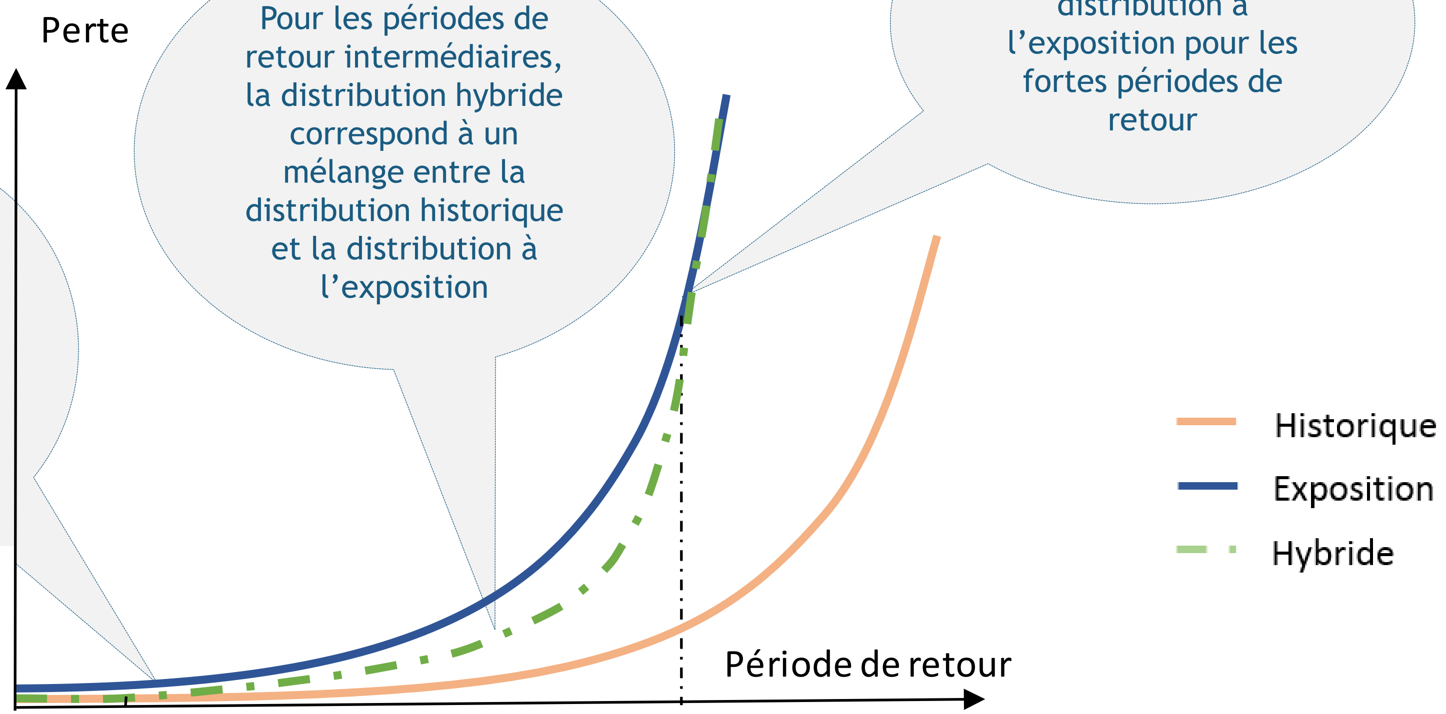
Modélisation Hybride: historique + exposition

○ Exemple de distribution hybride

La distribution hybride est confondue avec la distribution historique pour les faibles périodes de retour

Pour les périodes de retour intermédiaires, la distribution hybride correspond à un mélange entre la distribution historique et la distribution à l'exposition

La distribution hybride est confondue avec la distribution à l'exposition pour les fortes périodes de retour



Merci de votre attention