

Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris  
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires  
le 06/03/2023

Par : **Lucien Morice**

Titre : **Calibrage accéléré du DD-SV-LMM dans un  
générateur de scénarios économiques risque-neutre  
et market-consistent**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Entreprise : Milliman

Nom : Nicolas Baradel *Baradel*

Signature : *[Signature]*

Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Eric Ralaimiadana *Baradel* (procuration)

Nom : Alexandre Boumezoued  
Signature : *[Signature]*

Jean-Marie Nossi *Baradel* (procuration)

Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels  
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

*[Signature]*

Bibliothèque :

Signature du candidat

*Lucien Morice*

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Renaud Bourlès, enseignant-chercheur à l'école Centrale de Marseille. Sans l'option « Données et Décisions Économiques et Financières » dont il est le responsable, je n'aurais certainement pas suivi la voie de l'actuariat.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements à Alexandre Boumezoued, responsable du département de Recherche et Développement de Milliman, pour m'avoir donné l'opportunité de rejoindre son équipe.

Il me faut tout particulièrement remercier Sophian Mehalla, mon maître de stage, qui m'a encadré et aidé au cours de ce travail. Son expertise, sa disponibilité et sa bienveillance m'ont permis d'éviter bien des écueils.

Je remercie l'équipe pédagogique de l'ENSAE dans son ensemble pour la qualité de son enseignement.

Je remercie mes proches et ma famille, qui ont été présents pour moi du début à la fin de mes études. Parmi eux, ceux qui ont éveillé en moi l'intérêt pour les mathématiques se reconnaîtront.

## Résumé

**Mots clefs :** *Solvabilité II, générateur de scénarios économiques, LMM, DD-SV-LMM, développement en série de Gram-Charlier, développement en série de Fourier, Assets and Liabilities Management.*

Les exigences quantitatives du régime prudentiel Solvabilité II ont créé un terrain propice au développement de méthodes de simulation stochastiques, notamment pour évaluer les engagements des compagnies d'assurance en valeur de marché. Les modèles ALM (pour Assets and Liabilities Management) permettent de modéliser l'évolution des actifs de l'assureur ainsi que le comportement des assurés afin de réaliser cette valorisation. Ceux-ci prennent comme données d'entrée différentes projections des facteurs de risques pouvant avoir un impact sur la situation de l'assureur : ce sont des « scénarios économiques » projetés par des générateurs de scénarios économiques.

En raison de la durée de leurs engagements et de la structure de leurs placements, le risque de taux est prépondérant pour les assureurs. Une évaluation en valeur de marché nécessite de générer des scénarios économiques cohérents avec les données de marché à la date de valorisation, les modèles de taux utilisés doivent donc permettre de répliquer le mieux possible les prix de produits dérivés observés sur le marché. Les options d'achat européennes sur le taux swap, appelées swaptions, sont généralement retenues comme instruments de référence.

Le modèle de marché LIBOR permet de simuler des scénarios stochastiques de taux d'intérêt, les quantités simulées sont directement observables sur le marché (taux forward ou taux swap). Sa variante qui intègre un coefficient de déplacement et un facteur de volatilité stochastique, désignée par le sigle DD-SV-LMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LIBOR Market Model), permet de répliquer la structure de volatilité observée sur le marché avec une précision accrue. La présence d'un facteur de volatilité stochastique altère cependant la tractabilité analytique du modèle. Il est donc nécessaire d'utiliser des approximations dans l'établissement des formules de valorisation des dérivés dans le DD-SV-LMM. Ces formules se trouvent avoir un coût opérationnel important.

Afin d'accélérer le calibrage du DD-SV-LMM dans un générateur de scénarios économiques, des méthodes de valorisation alternatives visant à approcher la densité du taux swap à terme ont été explorées. Le développement en série de Gram-Charlier consiste à approcher la densité du taux swap à terme par une loi normale perturbée par un polynôme dont les coefficients se déduisent des moments de cette distribution. Une méthode alternative de développement en série de Fourier consiste à approcher cette densité par une série sinusoïdale, dont les coefficients se déduisent de la fonction caractéristique du taux swap à terme.

Le développement en série de Gram-Charlier et le développement en série de Fourier ont été ajoutés à un répertoire comprenant les méthodes de valorisation préexistantes. Les différentes formules de ce répertoire ont été comparées sur la base de la bonne réplcation des données de marché à l'issu du calibrage, dans des conditions économiques variées. L'impact de la méthode de calibrage sur la valorisation économique d'un portefeuille d'assurance-vie a ensuite été mesuré à l'aide d'un modèle ALM simplifié.

## Abstract

**Keywords :** *Solvency II, economic scenarios generator, LMM, DD-SV-LMM, Gram-Charlier, Fourier series expansion, Assets and Liabilities Management.*

Quantitative requirements induced by Solvency II have created a fertile ground for the proliferation of stochastic simulation methods, in particular to estimate the market value of life-insurance liabilities. ALM (assets and liabilities management) allow to model the evolution of insurers' assets as well as the behavior of the insured in order to perform this valuation. This type of models takes possible future paths of risk factors that may have an impact on the insurers' situation as an input : these are « economic scenarios » projected by economic scenarios generators.

Because of their asset allocation and the duration of their commitments, interest rates risk is a prevailing risk for insurers. A market value computation requires market-consistent economic scenarios. Therefore, interest rates models must replicate the prices of derivatives traded on the market. Common usage consists in calibrating the interest rates models on swap options (swaptions) that are european call options whose underlying are swap rate.

The LIBOR Market Model allow to simulate stochastic interest rates scenarios, the simulated quantities are directly observable on the markets (forward rates or swap rates). Adding a shift coefficient and a stochastic volatility factor yields the DD-SV-LMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LIBOR Market Model), this formulation allows to better replicate the volatility structure observed on the market. The addition of a stochastic volatility factor impairs the model analytical tractability. It is thus necessary to make approximations in order to price interest rates derivatives under the DD-SV-LMM. These pricing formulas happen to have a significant operational cost.

In order to improve calibration speed of the DD-SV-LMM in an economic scenarios generator, alternative pricing formulas were studied. The Gram-Charlier expansion is based on swap rate density approximation by a normal distribution perturbed by a polynomial, whose coefficients are deduced from the moments of this distribution. An approximation performed with a Fourier series expansion, whose coefficients are deduced from the swap rate characteristic function yields the Fourier series expansion method.

The Gram-Charlier expansion and the Fourier series expansion were added to a benchmark of pre-existing pricing methods. Different methods from this benchmark were compared on the basis of market-consistency after calibration under various market conditions. The impact on the economic valuation of a life-insurers' commitments under Solvency II was then measured using a simplified ALM model.

# Note de synthèse

## Préambule

Entré en vigueur le 1<sup>er</sup> janvier 2016, le régime prudentiel Solvabilité II impose des exigences permettant d'assurer la solvabilité des compagnies d'assurance et à travers elles la stabilité de l'ensemble du système économique. Solvabilité II repose sur une approche économique et prospective visant à tenir compte du profil de risque spécifique de chaque compagnie d'assurance. La directive Solvabilité II dispose que les engagements des assureurs doivent être évalués en valeur de marché, il n'existe cependant pas de marché organisant l'échange de ces engagements, cette évaluation doit donc s'effectuer à l'aide de méthodes simulatoires stochastiques.

Le recours à la simulation ALM permet de réaliser cette valorisation économique du bilan d'une compagnie d'assurance. De tels modèles prennent comme donnée d'entrée des projections conjointes des différents facteurs de risques pouvant avoir un impact sur la situation de l'assureur appelés scénarios économiques. Ces projections sont elles-mêmes produites par un générateur de scénarios économiques (GSE), pouvant se définir comme un outil numérique regroupant un ensemble de modèles permettant de simuler conjointement un ensemble de facteurs de risques financiers. La phase de calibrage du GSE consiste à fixer les paramètres des différents modèles utilisés. Dans le cadre d'une valorisation cohérente avec les données de marché, le choix de ces paramètres doit permettre de refléter les conditions de marché à la date du calibrage. Les options d'achat européennes sur le taux swap, appelées swaptions, sont généralement retenues comme instruments de référence.

Le LIBOR Market Model (LMM) est un modèle de taux permettant de simuler des quantités directement observables sur le marché (taux forward et taux swap). L'ajout d'un coefficient de déplacement permettant de générer des taux négatifs, et d'un facteur de volatilité stochastique permettant d'induire une courbure à la surface de volatilité, donne le DD-SV-LMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LIBOR Market Model). Cette variante du LMM permet de répliquer la structure de volatilité du marché avec une précision accrue mais la présence d'un facteur de volatilité stochastique altère la tractabilité analytique du modèle. Des approximations fortes sont donc formulées sur la faible variabilité de certaines quantités stochastiques afin d'obtenir une version exploitable du DD-SV-LMM. Deux formulations différentes de ces approximations conduisent à considérer deux variantes du DD-SV-LMM, une version normale cohérente avec l'utilisation de la formule de Bachelier pour la valorisation des swaptions et une version log-normale cohérente avec l'utilisation de la formule de Black.

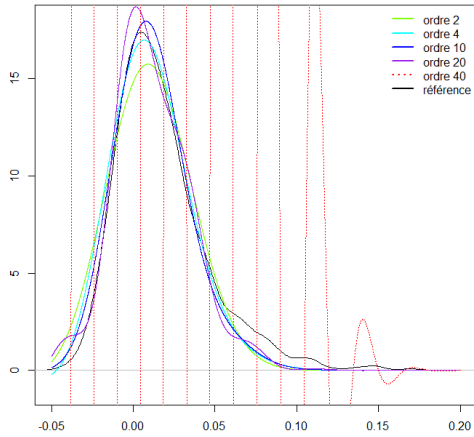
Même sous sa version approchée, la valorisation des swaptions avec le DD-SV-LMM comporte un coût opérationnel important. Ce mémoire a pour but de proposer des méthodes alternatives pour accélérer cette valorisation puis de les évaluer sur la base de la valorisation d'un portefeuille d'assurance vie à l'aide d'un modèle ALM simplifié.

## Méthodes de valorisation des swaptions

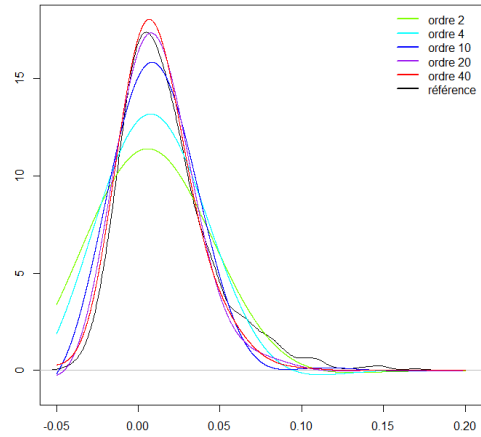
La version approchée du DD-SV-LMM permet le calcul numérique de la fonction caractéristique du taux swap à terme. La méthode dite de Heston, appliquée en paradigme normal et log-normal, consiste à calculer le *payoff* espéré d'une option européenne à l'aide de deux intégrations numériques impliquant la fonction caractéristique. La méthode de Heston en paradigme log-normal a été posée comme référence de cette étude. La méthode de transformée de Fourier accélérée permet une première réduction du temps de calcul en ne recourant qu'à une unique intégration numérique impliquant la fonction caractéristique, cette seconde méthode ne sera appliquée que dans un cadre log-normal.

Le développement en série de Gram-Charlier consiste à approcher, dans un cadre normal, la densité du taux swap à terme par une loi normale perturbée par une série polynomiale dont les coefficients sont déduits des moments de la distribution du taux swap à terme. Des problématiques de convergence conduisent à considérer deux versions de cette méthode, une version pour laquelle la densité cible est

assez bien approchée dès les ordres faibles en dépit d'une divergence aux ordres élevés, et une version pour laquelle le développement en série de Gram-Charlier converge vers la densité cible aux ordres élevés en contrepartie d'écart plus importants aux ordres faibles. Les figures suivantes illustrent une application du développement en série de Gram-Charlier pour approcher une densité du taux swap à terme de référence empirique obtenue par la méthode de Monte-Carlo.



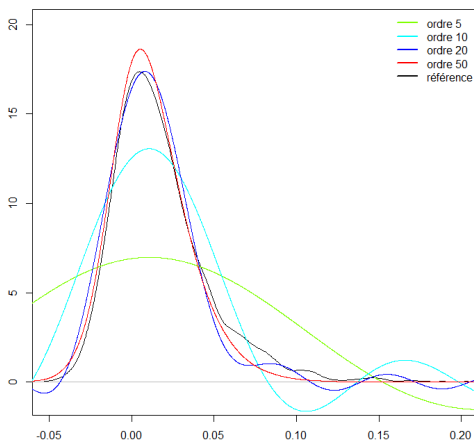
(a) Approximation de la densité du taux swap à terme pour la version divergente du développement en série de Gram-Charlier.



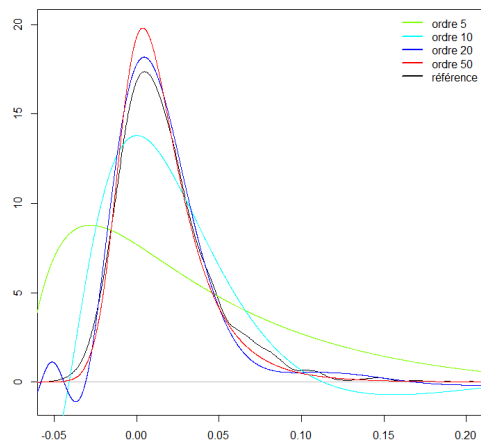
(b) Approximation de la densité du taux swap à terme pour la version convergente du développement en série de Gram-Charlier.

Des formules fermées ont été proposées pour le calcul des moments jusqu'à l'ordre 4 mais le calcul des moments d'ordre supérieur nécessite de recourir à une exponentiation matricielle coûteuse rendant inutilisable la formulation convergente du développement en série de Gram-Charlier.

Habituellement utilisé pour approcher des fonctions périodiques, un développement en série de Fourier peut être généralisé à toute fonction à support compact  $[a, b]$  en considérant celle-ci comme une unique période d'une fonction périodique. L'application de cette méthode au problème de valorisation des swaptions consiste à restreindre la densité du taux swap à terme dont le support est *a priori* infini, à une fonction dont le support est fini. Cette fonction est ensuite approchée par une somme d'harmoniques de la fonction cosinus pondérés par des coefficients déduits de la fonction caractéristique du taux swap à terme. Les figures suivantes illustrent le développement en série de Fourier de la densité du taux swap à terme dans un cadre normal et du logarithme du taux swap à terme dans un cadre log-normal.



(a) Approximation de la densité du taux swap à terme dans un paradigme normal par un développement en série de Fourier.



(b) Approximation du logarithme de la densité du taux swap à terme dans un paradigme log-normal par un développement en série de Fourier.

L'accélération de la valorisation des swaptions procurée par l'emploi de ces méthodes alternative est substantielle. Le tableau suivant indique le temps de calcul (moyenné sur 10000 tests) de valorisation d'un ensemble de 258 swaptions. La méthode utilisant la transformée de Fourier est plus rapide que la méthode de référence de 40%. Ce facteur d'accélération passe à 77% pour le développement en série de Fourier (DSF) et à 89% pour le développement en série de Gram-Charlier.

Méthode	Temps de calcul (ms)
<b>Heston log-normal</b>	15.2
<b>Heston normal</b>	19.6
<b>Transformée de Fourier</b>	9.14
<b>Gram-Charlier</b>	1.69
<b>DSF log-normal</b>	3.51
<b>DSF normal</b>	3.51

## Calibrage du DD-SV-LMM

Le calibrage du DD-SV-LMM est effectué en minimisant par un programme d'optimisation numérique les écarts entre les prix de swaptions induits par le modèle, calculés à l'aide d'une des formules de valorisation précédemment citées, et les prix observés sur le marché. Afin d'évaluer la robustesse des méthodes de calibrage, celles-ci ont été confrontées à plusieurs environnements de marché, incluant diverses économies considérées à différentes dates. A l'issue de chaque calibrage, les taux swap ont été simulés afin de calculer le prix des instruments de calibrage par la méthode de Monte-Carlo. La proximité de ces prix avec les prix de marché est le critère final permettant d'évaluer la cohérence d'un calibrage avec les données de marché.

Le tableau suivant recense la performance moyenne des calibrages effectués avec chaque formule de valorisation des swaptions. Pour chaque calibrage, la somme des écarts au carré est calculée entre les prix Monte-Carlo et les prix de marché. Ces valeurs sont agrégées en moyenne sur les différents environnements économiques pour chaque méthode de valorisation, sur la base de l'observation de cette métrique, les différentes méthodes de valorisation ont des performances similaires.

Méthode	Marché vs. Monte-Carlo
<b>Heston log-normal</b>	$3.61 \cdot 10^{-5}$
<b>Heston normal</b>	$3.69 \cdot 10^{-5}$
<b>Transformée de Fourier</b>	$3.62 \cdot 10^{-5}$
<b>Gram-Charlier</b>	$3.69 \cdot 10^{-5}$
<b>DSF log-normal</b>	$3.68 \cdot 10^{-5}$
<b>DSF normal</b>	$3.74 \cdot 10^{-5}$

## Impact sur la valorisation économique d'un portefeuille d'assurance

La *value of in-force* (VIF) représente le résultat généré par la gestion du portefeuille d'assurance, le *best estimate of liabilities* (BEL) représente la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur. Ces quantités sont déterminées en projetant le bilan comptable d'une compagnie d'assurance le long de différents scénarios économiques à l'aide d'un modèle ALM. Les scénarios de taux générés par le DD-SV-LMM calibré à l'aide des différentes méthodes de valorisation des swaptions ont été pris comme données d'entrée d'un modèle ALM simplifié prenant en compte quatre classes d'actifs : obligations, actions,

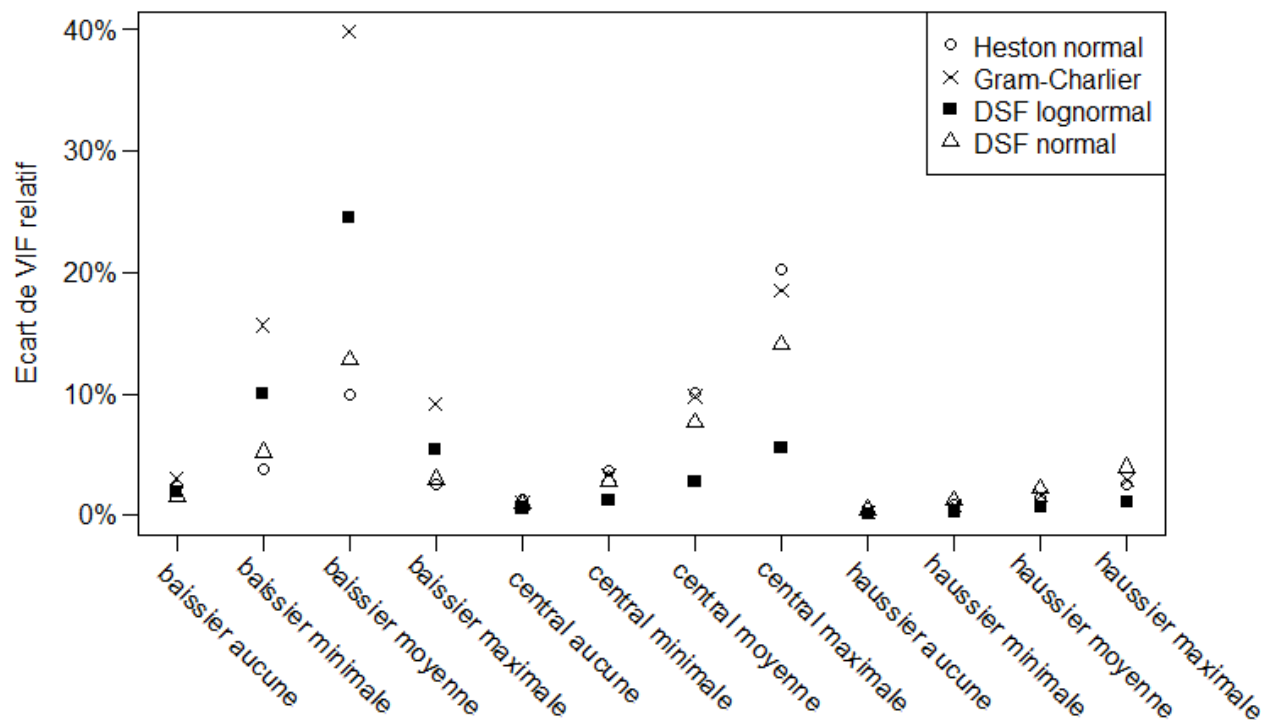
immobilier et trésorerie. Le modèle fait l'hypothèse d'une unique allocation d'actif cible constante au cours de la projection.

Le passif de la compagnie d'assurance fictive modélisée est constitué d'un unique *model-point* composé de nouveaux contrats sur fonds en euros souscrits par des assurés d'âges égaux et de comportements équivalents en terme de rachats structurels et conjoncturels. Des modélisations ont été réalisées sans rachats conjoncturels ainsi qu'en prenant en compte différentes lois de rachats conjoncturels d'intensité croissante.

La pertinence de l'utilisation des différentes méthodes de valorisation dans un cadre opérationnel a été étudiée sur la base de l'écart de VIF induit par leur utilisation par rapport à la méthode de référence. L'observation des écarts de VIF s'est révélée plus discriminante que celle de la cohérence avec les données de marché, en effet la moindre performance du développement en série de Gram-Charlier apparaît clairement et le DSF en paradigme log-normal semble produire les résultats les plus proches de ceux produits par la méthode de référence.

Méthode	Ecart absolu de VIF moyen	Ecart relatif de VIF moyen
<b>Heston normal</b>	0.53 M€	3.11%
<b>Gram-Charlier</b>	0.97 M€	9.31%
<b>DSF log-normal</b>	0.33 M€	0.88%
<b>DSF normal</b>	0.52 M€	2.94%

Cependant, ces écarts ne sont pas également répartis sur les différentes simulations réalisées, en effet les écarts de VIF les plus importants sont observés dans un environnement de taux bas et pour une loi de rachats plus stricte. La figure suivante représente les écarts observés pour quatre méthodes de valorisation des swaptions en fonction du choc appliqué à la courbe des taux initiale et de la loi de rachats conjoncturels utilisée. Pour conclure, si les méthodes de valorisation des swaptions proposées dans ce mémoire peuvent induire une accélération du calibrage du DD-SV-LMM sans perte excessive de cohérence avec les données de marché, les scénarios économiques ainsi générés peuvent conduire à des valorisations économiques différentes du bilan malgré une cohérence avec les données de marché similaire.





# Executive summary

## Introduction

The Solvency II prudential regime, which came into force on January 1, 2016 imposes requirements to ensure the solvency of insurance companies and through them the stability of the entire economic system. Solvency II rely on an economic and forward-looking approach that takes into account the specific risk profile of each insurance company. The Solvency II framework requires a market valuation of insurers' liabilities. However, there is no organized market for the exchange of these liabilities, so their valuation must be carried out using stochastic methods.

ALM modelling is often used to perform the economic valuation of an insurers' balance sheet. Such models take as an input joint projections of the various risk factors that can have an impact on the insurers' situation, called economic scenarios. These projections are themselves produced by an economic scenario generator (ESG), this numerical tool can be defined as a set of models that can jointly simulate a set of financial risk factors. The ESG's calibration process consists in setting the parameters of the various models used. In the context of a market consistent valuation, the choice of these parameters must reflect market conditions on the calibration date. Common usage consists in calibrating the interest rates models on swap options (swaptions) that are european call options whose underlying are swap rate.

LIBOR Market Model (LMM) and its different versions allow to model quantities that are directly observable on markets. Adding a shift coefficient to "displace" the simulated distribution into the non-positive area to be consistent with a negative rates environment, and a stochastic volatility factor to better replicate some Away-From-Money (AFM) swaptions prices yields the Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LIBOR Market Model (DD-SV-LMM). In its original specification, the DD-SV-LMM contains too much randomness – roughly speaking – to be analytically tractable. To get an exploitable version of the model, some stochastic quantities are therefore "frozen" to their initial value to remove some hazard and thus simplify the model, this is the so-called freezing technique. These approximations lead us to consider two variants of the DD-SV-LMM, a normal version consistent with the use of the Bachelier formula for swaptions valuation and a log-normal version consistent with the use of the Black formula.

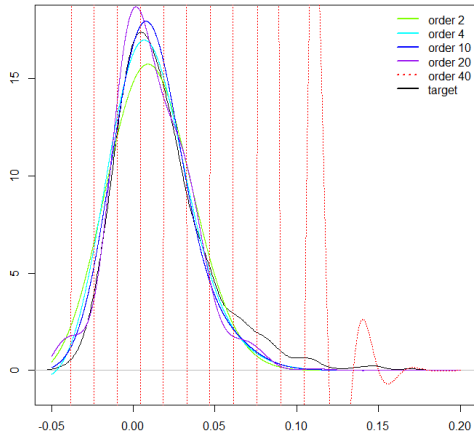
Swaptions pricing under the DD-SV-LMM involves a significant operational cost. The purpose of this thesis is to propose alternative methods to accelerate this valuation. These methods will be assessed on the basis of the valuation of a life-insurance portfolio using a simplified ALM model.

## Swaptions valuation methods

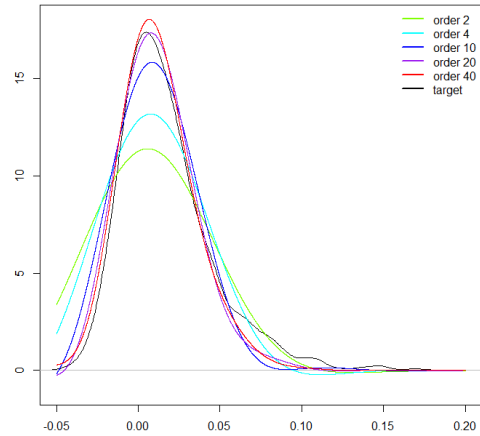
In the DD-SV-LMM, one has access to the moment generating function of the swap rate. The Heston method, applied both in the normal and log-normal paradigms, consists in calculating the expected payoff of a European option using two numerical integrations involving the characteristic function. The Heston method in the log-normal paradigm has been used as a reference in this thesis. The fast Fourier transform method allows a first reduction of the computation time by using only one numerical integration involving the characteristic function, this last method will be applied only in a log-normal framework.

Gram-Charlier expansion consists in approximating, in a normal framework, the density of the forward swap rate by a normal distribution perturbed by a polynomial series whose coefficients are deduced from the swap rate moments. Convergence issues leads us to consider two versions of this method, a version for which the target density is fairly well approximated at low orders despite a divergence at higher orders, and a version for which the Gram-Charlier series expansion converges to the target density at high orders but fails to approximate the target density at lower orders. The

following pictures illustrates an application of the Gram-Charlier series expansion to approximate a target swap rate density obtained with Monte-Carlo simulations.



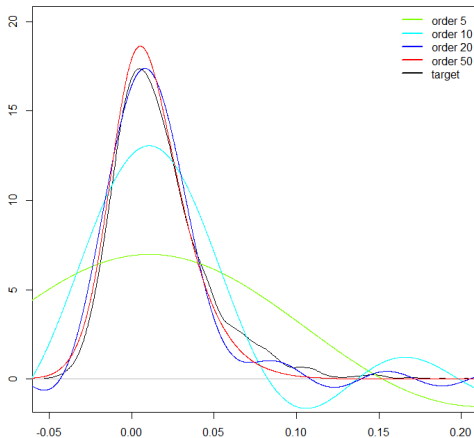
(a) Swap rate density approximation for the divergent version of the Gram-Charlier series expansion.



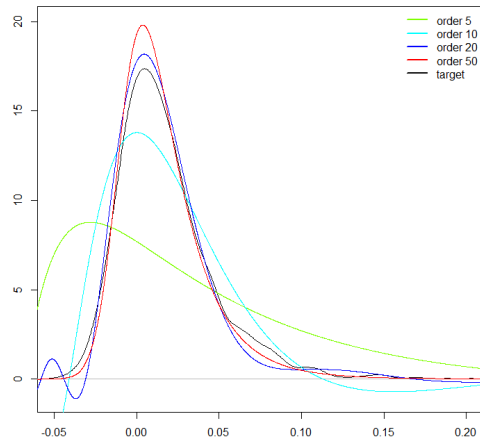
(b) Swap rate density approximation for the convergent version of the Gram-Charlier series expansion.

Closed formulas have been proposed for the computation of moments up to order 4 but the computation of higher order moments requires a computationally expensive matrix exponentiation making the convergent formulation of the Gram-Charlier series expansion inoperable.

Generally used to approximate periodic functions, a Fourier series expansion can be generalized to provide an optimal approximation of any finitely supported function over  $[a, b]$ . Application of the cosine series to swaptions valuation yields the Fourier series expansion (FSE) method. However, there is no reason for this density to be supported on a finite interval. To apply the cosine series expansion to the swap rate density, it is assumed that this density can be restricted to a finitely supported function. This function is then approximated by a sum of cosine harmonics weighted by coefficients deduced from the moment generating function of the swap rate. The following pictures illustrates the cosine series expansion of the swap rate density in a normal framework and of the logarithm of the swap rate in a log-normal framework.



(a) Approximation of the swap rate density in a normal paradigm by a cosine series expansion.



(b) Approximation of the logarithm of the swap rate density in a log-normal paradigm by a cosine series expansion.

The use of these alternative methods provides a significant acceleration in computing time. The following table shows the average (over 10000 runs) calculation time for a set of 258 swaptions. The fast

Fourier transform method is 40% faster than the reference method. This speed-up factor increases to 77% for cosine expansion and up to 89% for Gram-Charlier expansion.

Method	Calculation time (ms)
<b>Heston log-normal</b>	15.2
<b>Heston normal</b>	19.6
<b>Fast Fourier Transform</b>	9.14
<b>Gram-Charlier</b>	1.69
<b>FSE log-normal</b>	3.51
<b>FSE normal</b>	3.51

## Calibration of the DD-SV-LMM

The DD-SV-LMM is calibrated using a numerical optimization program to minimize the differences between the swaptions prices induced by the model, calculated using one of the valuation formulas, and the prices observed on the market. In order to assess their robustness, calibration methods were tested in several market environments, including various economic areas considered at different dates. At the end of each calibration, interest rates were simulated in order to calculate the Monte-Carlo prices of the calibration instruments. The degree to which these prices are close to market prices is the final criterion to assess the market-consistency of a calibration.

The following table shows the average performance of the calibrations carried out with each valuation formula. For each calibration, the sum of squared deviations is calculated between Monte-Carlo prices and market prices. These values are averaged over the sets of economic data for each valuation method. Based on this metric, the different valuation methods have similar performances.

Method	Market vs. Monte-Carlo
<b>Heston log-normal</b>	$3.61 \cdot 10^{-5}$
<b>Heston normal</b>	$3.69 \cdot 10^{-5}$
<b>Fast Fourier Transform</b>	$3.62 \cdot 10^{-5}$
<b>Gram-Charlier</b>	$3.69 \cdot 10^{-5}$
<b>FSE log-normal</b>	$3.68 \cdot 10^{-5}$
<b>FSE normal</b>	$3.74 \cdot 10^{-5}$

## Impact on the economic valuation of an insurance portfolio

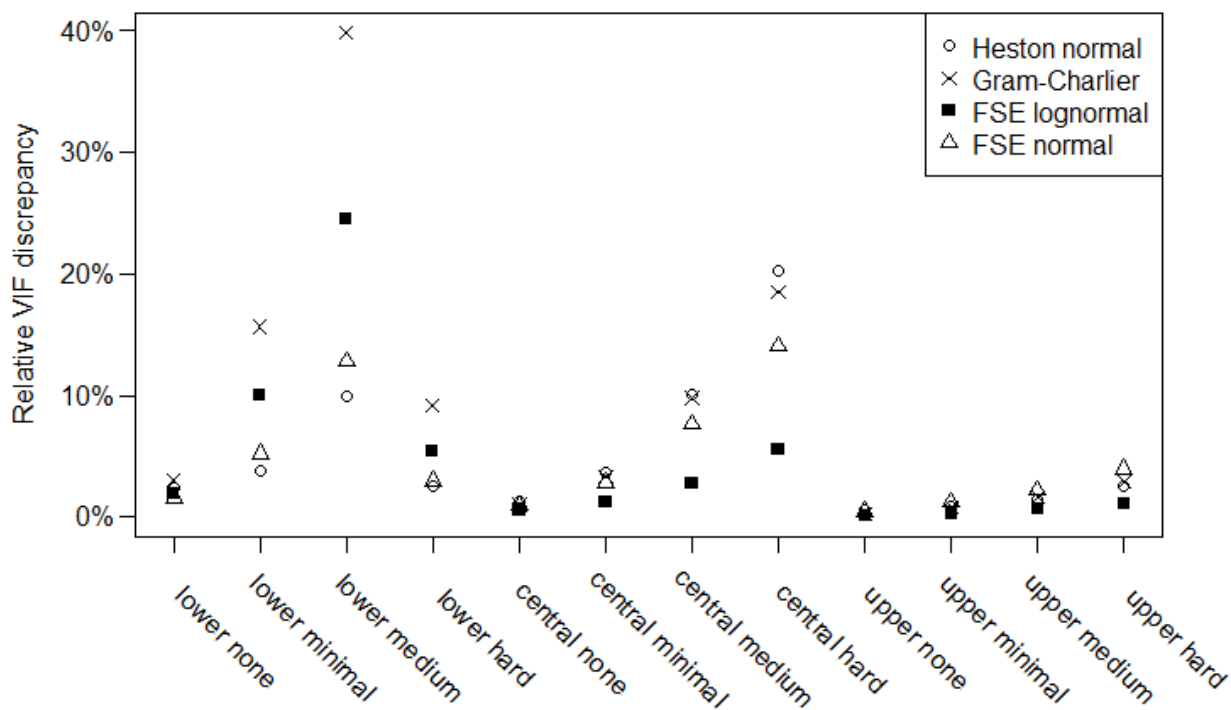
The *value of in-force* (VIF) is the financial result generated by the management of the insurance portfolio, the *best estimate of liabilities* (BEL) is the expected present value of the insurers' liabilities. These quantities are determined using an ALM model to project the accounting balance sheet of the insurance company along the path of several economic scenarios. The interest rate scenarios generated by the DD-SV-LMM calibrated with the different swaptions valuation methods were then used as inputs to a simplified ALM model that incorporates four assets classes : bonds, equity, real estate and cash. The model assumes a fixed target asset allocation over the projection period.

The liabilities of the fictional insurance company are made up of a single *model-point* composed of new contracts on euro funds subscribed by policyholders of equal age and with equivalent behavior in terms of structural and economic surrenders. Simulations were carried out taking into account different economic surrenders laws of increasing intensity.

The relevancy of the different valuation methods in an operational context was studied on the basis of the difference in VIF induced by their use compared to the reference method. The analysis of VIF deviations proved to be more discriminating than that of the market-consistency, indeed the lower performance of the Gram-Charlier expansions is clear. The FSE in a log-normal paradigm seems to produce the closest results to those produced by the reference method.

Method	Absolute VIF difference in average	Relative VIF difference in average
<b>Heston normal</b>	0.53 M€	3.11%
<b>Gram-Charlier</b>	0.97 M€	9.31%
<b>FSE log-normal</b>	0.33 M€	0.88%
<b>FSE normal</b>	0.52 M€	2.94%

However, these gaps are not evenly distributed across the different simulations performed, as a low-rate environment and a harder conjonctural surrender law seems to widen the observed VIF gaps. The following picture shows the gaps observed for four swaption valuation methods by shock applied to the initial yield curve and economic surrender law. To conclude, the swaption valuation methods proposed in this paper can lead to an acceleration of the DD-SV-LMM calibration without excessive loss of market-consistency. Thus, the economic scenarios generated in this way may lead to different economic valuations of the balance sheet despite a similar market-consistency.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Note de synthèse</b>	<b>iv</b>
<b>Executive summary</b>	<b>viii</b>
<b>1 Contexte de l'étude</b>	<b>1</b>
1.1 Le régime prudentiel Solvabilité II . . . . .	1
1.1.1 Valorisation économique du bilan . . . . .	2
1.1.2 Exigences en capital . . . . .	3
1.2 Les GSE en assurance . . . . .	3
1.2.1 Besoin en GSE dans le secteur de l'assurance . . . . .	4
1.2.2 Implémentation du risque de taux dans un GSE . . . . .	5
<b>2 Introduction à la modélisation des taux d'intérêts</b>	<b>7</b>
2.1 Cadre de travail et notions préliminaires . . . . .	7
2.2 Principaux instruments de taux . . . . .	7
2.2.1 Obligation zéro-coupon et compte de marché monétaire . . . . .	7
2.2.2 Taux <i>forward</i> . . . . .	9
2.2.3 Taux <i>swap forward</i> . . . . .	9
2.3 Options sur taux . . . . .	10
2.3.1 Présentation des options sur taux . . . . .	10
2.3.2 Valorisation des options sur taux . . . . .	11
2.4 Courbe des taux d'intérêt . . . . .	13
2.5 Modélisation des taux d'intérêts nominaux . . . . .	14
2.5.1 Modèles de taux court . . . . .	14
2.5.2 Modèles de marché . . . . .	15
<b>3 Présentation du DD-SV-LMM</b>	<b>16</b>
3.1 Dynamique des taux <i>forward</i> . . . . .	16
3.1.1 Quantités modélisées et numéraire utilisé . . . . .	16
3.1.2 LIBOR Market Model . . . . .	16
3.1.3 LIBOR Market Model avec Diffusion Déplacée et Volatilité Stochastique . . . . .	17
3.2 Dynamique des taux <i>swap</i> . . . . .	18
3.2.1 Quantités modélisées et numéraire utilisé . . . . .	18
3.2.2 Dynamique des taux <i>swap</i> sous probabilité <i>swap-forward</i> . . . . .	18
3.2.3 Paramétrage du modèle . . . . .	19
3.3 Hypothèses de figement . . . . .	19
3.3.1 Formulation des hypothèses de figement . . . . .	19
3.3.2 Validité des hypothèses de figement . . . . .	20
<b>4 Valorisation de swaptions sous dynamique DD-SV-LMM</b>	<b>22</b>
4.1 Méthode dite de Heston . . . . .	22
4.1.1 Heston en paradigme log-normal . . . . .	22

4.1.2	Heston en paradigme normal	22
4.2	Transformée de Fourier	23
4.3	Développement en série de Gram-Charlier	23
4.3.1	Approximation point par point d'une loi normale	23
4.3.2	Développement en série de Gram-Charlier dans un espace de Hilbert	25
4.3.3	Application au problème de valorisation	25
4.4	Développement en série de Fourier	27
4.4.1	Approximation de densité par développement en série de Fourier	27
4.4.2	Application au problème de valorisation	30
4.5	Comparaison des temps de calcul	32
<b>5</b>	<b>Calibrage du DD-SV-LMM</b>	<b>34</b>
5.1	Méthodologie utilisée pour le calibrage	34
5.1.1	Données utilisées	34
5.1.2	Fonction objectif	35
5.1.3	Choix du paradigme de volatilité	36
5.1.4	Application d'un choc de taux	36
5.2	Validation du processus de calibrage dans un GSE	38
5.2.1	Tests de martingalité	38
5.2.2	Tests de re-valorisation	39
5.3	Résultats numériques	41
5.3.1	Résultats agrégés	41
5.3.2	Cas d'étude : paramètres optimaux	43
5.3.3	Cas d'étude : <i>smile</i> de volatilité	43
5.4	Conclusions	45
5.4.1	Gain en temps de calcul	45
5.4.2	Cohérence avec les données de marché	45
<b>6</b>	<b>Modélisation ALM</b>	<b>46</b>
6.1	Cadre général du modèle ALM	46
6.1.1	Bilan comptable	46
6.1.2	Bilan économique	47
6.1.3	Fonctionnement général de l'algorithme ALM	48
6.2	Modélisation de l'actif	48
6.2.1	Trésorerie	49
6.2.2	Obligations	49
6.2.3	Actions et immobilier	50
6.2.4	Rebalancement du portefeuille	50
6.3	Modélisation du passif	50
6.3.1	Mortalité	50
6.3.2	Revalorisation des provisions mathématiques	51
6.3.3	Lois de rachats	52
6.4	Hypothèses du modèle ALM	54
6.5	Résultats de la projection ALM	55
<b>7</b>	<b>Impact de la méthode de calibrage sur la projection ALM</b>	<b>59</b>
7.1	Analyse générale de l'impact sur la VIF	59
7.2	Analyse des écarts extrêmes	60
7.3	Lien avec la <i>market-consistency</i>	61

<b>8 Conclusion</b>	<b>63</b>
<b>Annexes</b>	<b>66</b>
<b>A Annexes relatives à la technique du changement de numéraire</b>	<b>66</b>
A.1 Technique du changement de numéraire . . . . .	66
A.2 Numéraires utilisés au cours de ce mémoire . . . . .	66
<b>B Annexes relatives au DD-SV-LMM</b>	<b>68</b>
<b>C Annexes relatives aux formules de valorisation des swaptions</b>	<b>69</b>
C.1 Quadrature de Gauss-Laguerre . . . . .	69
C.2 Transformée de Fourier accélérée . . . . .	69
C.3 Développement en série de Gram-Charlier . . . . .	70
C.4 Développement en série de Fourier en cosinus . . . . .	71
C.4.1 DSF paradigme normal . . . . .	71
C.4.2 DSF paradigme log-normal . . . . .	71
<b>D Annexes relatives au calibrage du DD-SV-LMM</b>	<b>73</b>
D.1 Algorithme de Nelder-Mead . . . . .	73
D.2 Structure de volatilité ATM des différents jeux de données économiques . . . . .	74
D.3 Structure de volatilité AFM des différents jeux de données économiques . . . . .	75
D.4 Métriques d'écart agrégées . . . . .	76
D.5 Structure de volatilité ATM et AFM . . . . .	78
<b>E Annexes relatives à la modélisation ALM</b>	<b>80</b>
E.1 Modèle utilisé pour l'indice action . . . . .	80
E.2 Table de mortalité utilisée . . . . .	81

## Liste des figures

1.1	Les trois piliers de Solvabilité II . . . . .	1
1.2	Bilan économique sous solvabilité II . . . . .	3
2.1	Nappes de volatilité du marché . . . . .	13
2.2	Courbes EIOPA au 31/03/2022 . . . . .	14
3.1	Validation historique des hypothèses de figement. . . . .	21
4.1	Développements en série de Gram-Charlier de lois normales centrées. . . . .	24
4.2	Développements en série de Gram-Charlier du taux <i>swap</i> 10Y/10Y à différents ordres. . . . .	26
4.3	Développements en série de Fourier d'une loi Gamma . . . . .	29
4.4	Développements en série de Fourier du taux <i>swap</i> 10Y/10Y. . . . .	31
4.5	Convergence de la méthode DSF suivant l'intervalle d'approximation. . . . .	32
5.1	Changement de paradigme de volatilité. . . . .	36
5.2	Courbes EIOPA choquées au 31/03/2022 . . . . .	37
5.3	Application d'un choc de taux haussier au 31/03/2022. . . . .	37
5.4	Test de martingalité pour le déflateur. . . . .	39
5.5	Test de martingalité pour des obligations zéro-coupon. . . . .	39
5.6	Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités Monte-Carlo. . . . .	40
5.7	Diagrammes en boîtes des métriques étudiées. . . . .	42
5.8	Écart entre les prix théoriques et les prix Monte-Carlo ATM et AFM . . . . .	43
5.9	Smiles de volatilité pour des swaptions 10Y/10Y. . . . .	44
6.1	Bilan comptable et économique simplifiés . . . . .	46
6.2	Schéma de principe de l'algorithme ALM. . . . .	48
6.3	Politique de revalorisation des provisions mathématiques. . . . .	52
6.4	Loi de rachats structurels. . . . .	53
6.5	Lois de rachats conjoncturels. . . . .	54
6.6	Allocation d'actifs cible du modèle ALM . . . . .	55
6.7	Evolution des flux de VIF et de BEL au cours de la projection. . . . .	56
6.8	Evolution du taux de rendement de l'actif et du taux servi au cours de la projection. . . . .	57
6.9	Liquidation progressive du portefeuille d'assurance au cours de la projection. . . . .	58
7.1	Écart entre la VIF de référence et la VIF issue des autres méthodes . . . . .	59
7.2	Écart de VIF induits par la méthode de Gram-Charlier par loi de rachats conjoncturels . . . . .	60
7.3	Graphique des quantiles des taux zéro-coupons à 1 an. . . . .	61
7.4	Ecart de VIF observés pour l'ensemble des projections ALM. . . . .	62
D.1	Nappes de volatilité ATM. . . . .	74
D.2	Nappes de volatilité AFM. . . . .	75
D.3	Structure de volatilité à la monnaie pour différentes méthodes de valorisation . . . . .	78
D.4	Structure de volatilité en dehors de la monnaie pour les différentes méthodes . . . . .	79



## Liste des tableaux

4.1	Temps de calcul des différentes méthodes. . . . .	32
5.1	Niveau moyen de volatilité observé aux différentes dates de calibrage testées. . . . .	35
5.2	Calculs des métriques d'écart sur les modèles recalibrés et non-recalibrés. . . . .	38
5.3	Test de re-valorisation. . . . .	40
5.4	$MSE_{prix}$ sur les valeurs de modèle et les valeurs Monte-Carlo. . . . .	41
5.5	Paramètres du DD-SV-LMM calibrés sur l'économie européenne au 31/03/2022. . . . .	43
5.6	Temps de calibrage des différentes méthodes. . . . .	45
6.1	Paramètres utilisés pour les lois de rachats conjoncturels. . . . .	53
6.2	Valorisation économique du bilan à la date initiale. . . . .	56
7.1	Paramètres calibrés pour chaque méthode. . . . .	61
7.2	<i>Market-consistency</i> des calibrages utilisés pour générer les données d'entrée ALM. . . . .	61
D.1	Écart entre les valeurs de marché et les valeurs de modèle. . . . .	76
D.2	Écart entre les valeurs de marché et les valeurs de Monte-Carlo. . . . .	77
E.1	Table de mortalité utilisée pour la modélisation ALM . . . . .	81

# Chapitre 1

## Contexte de l'étude

### Préambule

Les exigences quantitatives du régime prudentiel Solvabilité II et la valorisation d'engagements de long terme intrinsèques à l'activité d'assurance-vie nécessitent l'emploi d'outils numériques spécialisés appelés générateurs de scénarios économiques (GSE). Le risque de taux étant prépondérant dans leur activité, le calibrage efficace de modèles pertinents répliquant la courbe des taux d'intérêts ainsi que le prix des dérivées de taux est primordial pour les assureurs.

### 1.1 Le régime prudentiel Solvabilité II

Entré en vigueur le 1<sup>er</sup> janvier 2016, le régime prudentiel Solvabilité II impose des exigences permettant d'assurer la solvabilité des compagnies d'assurance et à travers elles la stabilité de l'ensemble du système économique. Solvabilité II succède au régime prudentiel Solvabilité I avec l'ambition d'en corriger les insuffisances, et met en place une réglementation harmonisée au sein de l'espace économique européen.

Là où solvabilité I proposait une approche comptable dans laquelle les exigences en capital ne reflétaient pas complètement ni le profil de risque propre à la compagnie concernée, ni sa situation économique réelle, Solvabilité II repose sur une approche économique et prospective basée sur trois piliers :

- Le Pilier 1 spécifie les exigences quantitatives relatives au calcul d'un bilan reflétant la situation économique de l'assureur ainsi qu'au calcul des capitaux de solvabilité requis ;
- Le Pilier 2 intègre des exigences qualitatives visant à conforter la place de la gestion des risques au sein de la gouvernance interne des compagnies d'assurance ;
- Le Pilier 3 promeut une transparence accrue de l'information financière auprès des autorités de contrôle, des investisseurs ainsi que du public.

La Figure 1.1 résume la contribution des trois piliers pour la solvabilité des compagnies d'assurance.

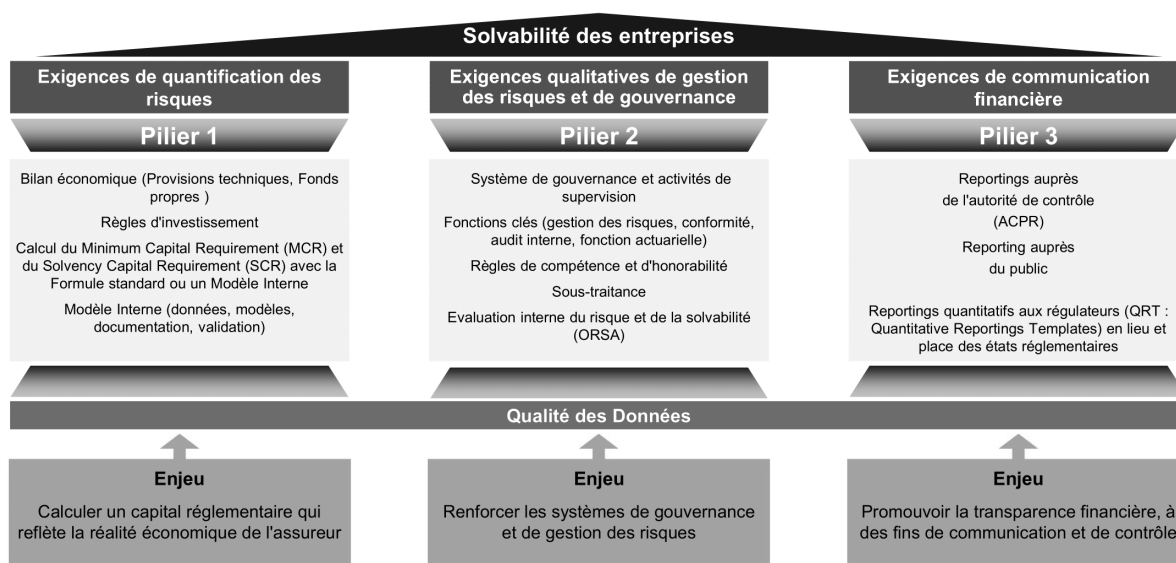


FIGURE 1.1 – Contribution des trois piliers de solvabilité II (repris de [Val22]).

Le présent mémoire abordant des problématiques relatives au premier pilier, seul celui-ci sera présenté de manière plus détaillée.

### 1.1.1 Valorisation économique du bilan

En accord avec [Eur09] : « les actifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être échangés entre des parties informées et consentantes ; les passifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue entre des parties informées et consentantes. », les actifs et les passifs de l'assureur sont donc répertoriés dans le bilan prudentiel en valeur de marché.

#### Actifs

Les actifs inscrits au bilan prudentiel sont valorisés de manière directe en leur assignant leurs prix extraits des marchés financiers lorsque ces prix sont associés à des contrats suffisamment liquides (approche *mark-to-market*) ; dans le cas contraire les actifs sont valorisés à l'aide de modèles mathématiques (approche *mark-to-model*).

#### Passifs

Le passif d'une compagnie d'assurance valorisé selon la directive Solvabilité II se décompose en plusieurs quantités, les provisions techniques représentent la valeur économique des engagements de l'assureur. Il n'existe pas de marché organisé pour l'échange des portefeuilles d'assurance et les flux financiers associés ne peuvent être parfaitement répliqués à l'aide d'instruments financiers, leur valorisation est donc effectuée à l'aide de modèles actuariels et statistiques selon une approche dite *Best Estimate* (BE, ou Best Estimate of Liabilities, BEL) ou de "meilleure estimation" des passifs. Une marge pour risque (ou Risk Margin, RM) est ajoutée pour prendre en compte le capital additionnel requis par une contrepartie pour prendre en charge les engagements du passif :

$$\text{Provisions Techniques} = \text{Meilleure Estimation} + \text{Marge pour Risque.}$$

#### Meilleure estimation

La meilleure estimation des passifs se définit comme l'espérance des flux financiers futurs associés aux engagements de l'assureur, actualisés au taux sans risque. Les facteurs de risque ayant un impact sur cette valorisation sont divisés en facteurs d'origine financière (comme par exemple, le niveau des taux d'intérêts) évalués sous probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  et facteurs d'origine non-financière (comme par exemple, le taux de mortalité) évalués sous probabilité historique  $\mathbb{P}$ . Le BEL peut être défini de la manière suivante,

$$\text{BEL} = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left[ \sum_{n \geq 1} D(0, n) \text{CF}^p(n) \right].$$

où  $\text{CF}^p(n)$  est le flux financier de la compagnie d'assurance (à ses assurés) en période  $n$ , qui s'écrit comme la différence des flux entrants (primes d'assurance) et des flux sortants (prestations aux assurés) en date  $n$  et  $D(0, n)$  le facteur d'actualisation pour cette même période.

#### Marge pour risque

La RM est ajoutée au BEL pour prendre en compte le capital additionnel qu'une contrepartie devrait apporter, notamment pour satisfaire aux obligations réglementaires associées aux contrats repris. La marge pour risque peut être définie de la manière simplifiée par la formule suivante,

$$\text{RM} = r_{CoC} \sum_{n \geq 1} P(0, n) \text{SCR}(n).$$

où  $r_{CoC}$  est le taux de coût du capital fixé par l'EIOPA à 6%,  $P(0, n)$  le prix en date 0 d'un contrat zéro-coupon de maturité  $n$  et  $\text{SCR}(n)$  (pour *Solvency Capital Requirement*) le capital de solvabilité exigé pour l'exercice de cette même période défini dans la section suivante. En pratique, les SCR d'horizon supérieur à un an sont calculés de manière approchée car l'application de la méthode utilisée pour calculer le SCR à un an serait trop lourde numériquement.

## Fonds propres

Toujours côté passif, les fonds propres représentent le capital mobilisable de l'assureur à la date d'évaluation du bilan. Le montant des fonds propres est déduit de l'évaluation des postes précédents,

$$\text{Fonds Propres} = \text{Actif} - (\text{Meilleure Estimation} + \text{Marge Pour Risque}).$$

### 1.1.2 Exigences en capital

La directive Solvabilité II dispose que les compagnies d'assurance doivent immobiliser une part de leurs fonds propres appelée capital de solvabilité requis SCR, cohérent avec leur profil de risque, et suffisant pour faire face aux pertes potentielles à horizon un an avec une probabilité de 99.5%. En pratique, le niveau et la structure actuelle des fonds propres doit permettre de conserver un niveau positif de fonds propres à la fin de l'exercice :

$$\text{SCR} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\text{FP}_1 \geq 0 \mid \text{FP}_0 = x) \geq 0.995\}.$$

Deux approches sont communément considérées pour le calcul du capital de solvabilité requis afin que celui-ci corresponde au profil de risque de l'assureur.

La première approche, la plus répandue, consiste à calculer le SCR par "Formule Standard", dans laquelle les risques sont répartis par modules ; un SCR associé à chacun des modules est calculé. Le SCR global est ensuite déterminé en agrégeant les SCR de l'ensemble des modules à l'aide d'une matrice de corrélation fournie par l'autorité de contrôle.

La seconde approche dite par modèle interne permet une meilleure adéquation du SCR au profil de risque de l'assureur ainsi que la prise en compte de risques spécifiques à la firme qui auraient été négligés par le régulateur. Cette approche présente un coût important de mise en œuvre, que ce soit en termes de coûts de développement ou de mobilisation des ressources opérationnelles.

La Figure 1.2 résume les principaux postes du bilan économique d'une compagnie d'assurance.

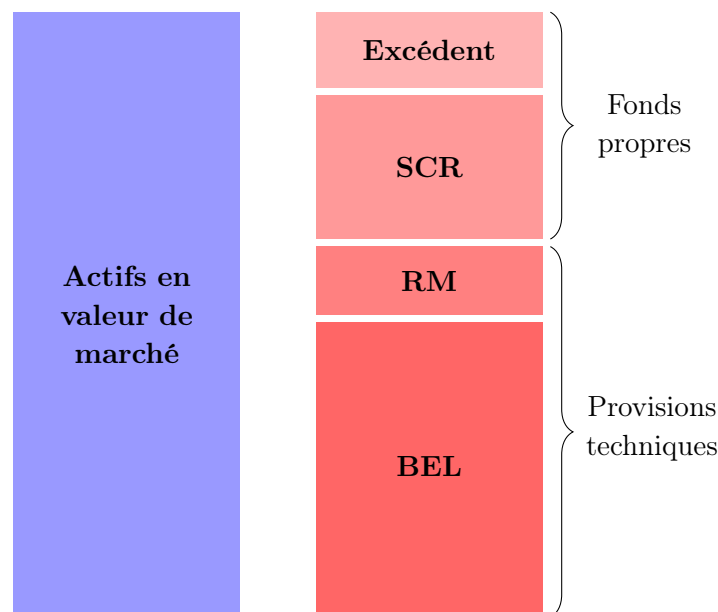


FIGURE 1.2 – Bilan économique sous Solvabilité II.

## 1.2 Les GSE en assurance

Les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) sont des outils numériques incontournables dans l'environnement assurantiel. Un GSE peut se définir comme un outil numérique regroupant un ensemble de modèles permettant de simuler conjointement un ensemble de facteurs de risques financiers ayant un impact sur la situation de l'assureur. Leur implémentation ainsi que le besoin sous-jacent à leur utilisation sont présentés plus en détail.

### 1.2.1 Besoin en GSE dans le secteur de l'assurance

Une police d'assurance-vie lie sur le long terme un assuré bénéficiant de prestations garanties contractuelles à un assureur percevant une prime initiale pour fournir ces prestations, illustrant ainsi l'inversion du cycle de production propre au secteur de l'assurance dans lequel des produits sont proposés aux assurés avant de connaître leur coût final de manière certaine. Dans le cas de l'assurance-vie, les contrats se classifient généralement selon deux catégories. En plaçant son épargne sur un fonds en euros, l'assuré bénéficie d'une protection de son investissement initial et d'une revalorisation dépendante du résultat financier de l'assureur. Placée sur un fonds en unités de compte (UC), l'épargne de l'assuré est adossée à un portefeuille d'actifs financiers dont la valeur évolue selon les mouvements du marché et ne dispose pas de la protection offerte par le contrat en euros.

Pour un fonds en unité de compte, la mise en adéquation des actifs et passifs de l'assureur est aisée car la valeur de l'épargne de l'assuré inscrite au passif suit directement la valeur du portefeuille financier associé au support en UC. Pour un fonds en euros, la protection du capital initial de l'assuré ainsi que l'obligation, souvent présente dans les termes du contrat, pour l'assureur de revaloriser ce capital à un taux minimum garanti (TMG) défini à la souscription rend problématique la gestion actif-passif et reporte le risque de l'assuré à l'assureur.

En plus de la revalorisation plancher définie par le TMG, les contrats sur fonds en euros comportent aussi des garanties supplémentaires et parfois optionnelles dépendantes de l'environnement économique. L'assureur doit en effet verser aux assurés une part de son résultat financier dans le cadre de la participation aux bénéfices et peut choisir d'ajuster le taux servi, dans les limites réglementaires, en fonction de la concurrence. Le comportement des assurés est lui aussi en partie dépendant de l'environnement économique à travers les lois de rachats ; en effet, si les performances du fonds sont inférieures aux attentes des assurés ceux-ci ont la possibilité décider de racheter leur contrat pour récupérer leur capital.

La valorisation d'un contrat sur fonds en euros repose généralement sur une méthode numérique de type Monte-Carlo, l'espérance des flux financiers qui lui sont associés est calculée par des méthodes simulatoires sous la probabilité risque neutre. Dans cette optique, la situation de l'assureur est modélisée dans une série de simulations chronologiques stochastiques générées sous cette même probabilité.

La gestion des risques et les exigences réglementaires offrent elles aussi un terrain propice à l'emploi des GSE. Ceux-ci peuvent par exemple produire les projections servant d'inputs à des modèles *Assets and Liabilities Management* (ALM) utilisés pour générer la série de flux financiers  $CF^p(n)$  utilisée pour le calcul du BEL dans le cadre de la valorisation économique des passifs d'une compagnie d'assurance évoquée précédemment.

La valorisation des garanties associées aux contrats sur fonds en euros, les études ALM, les besoins réglementaires induits par le régime prudentiel Solvabilité II et la norme IFRS 17 nécessitent la projection de facteurs de risque sous différentes mesures de probabilité :

- **GSE monde-réel** : permet de reproduire des faits stylisés observés sur des séries historiques, l'univers monde-réel est utilisé pour projeter les prix des actifs financiers de manière cohérente avec les distributions historiques. Les facteurs de risque non-financiers auxquels sont exposés les assureurs (risques de mortalité, souscription, etc.) sont eux-aussi simulés sous cette probabilité. Cette vision tend à refléter des tendances de plus ou moins long terme selon la profondeur de l'historique considéré.
- **GSE risque-neutre** : sous l'hypothèse de complétude des marchés financiers et d'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe une unique mesure de probabilité dite "Risque Neutre", sous laquelle les processus de prix des actifs actualisés au taux sans risque sont des martingales. Cette propriété martingale permet de mettre en œuvre des méthodes de valorisation commodes des engagements de l'assureur par calcul de l'espérance des flux financiers futurs actualisés. Les GSE risque-neutre sont construits à partir de modèles de diffusion des facteurs de risque issus de l'industrie bancaire qui, via des calibrages sur des prix de dérivés observés à date, permettent de tenir compte de l'environnement économique actuel.

Les GSE risque-neutre et monde-réel s'utilisent soit de manière complémentaire (notamment, dans le d'un calcul de SCR par Modèle Interne) soit de manière dissociée (pour la réalisation d'études internes propres à chaque entreprise).

### 1.2.2 Implémentation du risque de taux dans un GSE

Parmi les facteurs de risque financier auxquels est exposée une compagnie d'assurance (vie), le risque de taux se distingue par sa prépondérance. La durée des engagements de l'assureur s'étalant parfois sur plusieurs dizaines d'années suffit à mettre en lumière l'importance du risque de taux, en raison de son impact sur l'actualisation des flux financiers notamment. L'actif d'une compagnie d'assurance vie est lui aussi sensible au risque de taux : en effet, d'après l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) 66% en moyenne de l'actif des compagnies d'assurance est investi en titres de créance au deuxième trimestre 2022 selon [ACP22], toutes branches confondues. Cette forte et double exposition justifie l'intérêt tout particulier porté à la modélisation des taux d'intérêt par le secteur.

Reprenant les travaux de [AP18], la construction d'un GSE, qu'il soit monde-réel ou risque-neutre, peut être décomposée en trois étapes. La première étape consiste à sélectionner l'environnement de simulation (*risque-neutre* ou *monde-réel*) et les facteurs de risque à inclure dans le GSE ; la seconde à sélectionner un modèle mathématique pour la modélisation de chaque facteur de risque. Lors de la dernière étape, la récupération de données de marché pertinentes et le calibrage des modèles précédemment sélectionnés sont effectués. Ces trois étapes sont maintenant illustrées dans le cas particulier d'un modèle de taux.

#### Choix de l'environnement de modélisation

Le risque de taux, incontournable pour les assureurs, est inclus d'office dans le GSE et se matérialise par un modèle de la courbe des taux d'intérêt, le choix de l'univers de simulation dépend quant à lui de l'utilisation du GSE. Les exigences quantitatives relatives au régime prudentiel Solvabilité II nécessitent de se placer dans le cadre *risque-neutre*, qui sera le cadre de référence de cette étude.

#### Choix des modèles mathématiques

Les modèles implémentés dans un GSE *risque-neutre* doivent respecter le critère de *market-consistency* matérialisant l'exigence de cohérence avec les conditions actuelles de marché. La cohérence avec le marché se définit comme la bonne réplcation de la part du modèle du prix des produits financiers dérivés du facteur de risque considéré. Le modèle est donc sélectionné pour sa capacité à reproduire les prix observables sur le marché tout en restant exploitable, c'est-à-dire offrir des formules analytiques efficacement évaluables numériquement et des schémas de simulations précis et relativement simples.

#### Données et paramètres

L'information économique est fournie par le marché sous la forme de prix d'instruments financiers. Les données utilisées pour la construction de la courbe des taux EIOPA doivent provenir d'un marché *profond, liquide et transparent* (ou DLT pour *deep, liquid and transparent*) et correspondre aux caractéristiques des contrats proposés par les assureurs, notamment en terme de durée. Pour les autres données, les critères d'exigence sont en pratique moins stricts bien que les instruments les plus fiables soient privilégiés.

Dans le cas d'un modèle de taux, une autre donnée d'entrée nécessaire est la courbe des taux sans risque publiée mensuellement par l'EIOPA et que les assureurs sont tenus d'utiliser dans leurs études quantitatives se rapportant au régime prudentiel Solvabilité II. Cette courbe n'est pas directement observable sur le marché car elle a subi des ajustements successifs. Le *credit risk adjustment* (CRA) retire le risque de crédit porté par les échanges de taux entre contreparties. Le *volatility adjustment* (VA) supprime les autres risques auxquels sont soumis les acteurs du marché dont la fréquence de *trading* est élevée, comme par exemple le risque de liquidité. Les compagnies d'assurance ayant une fréquence de *trading* plutôt faible, le VA n'est pas systématiquement utilisé et les compagnies d'assurance peuvent générer des scénarios avec et sans VA.

La construction du GSE s'achève sur le calibrage des modèles mathématiques sélectionnés à l'étape précédente. Leurs paramètres sont ajustés afin que les prix induits par le modèle répliquent le plus précisément possible les prix observés sur le marché.

# Chapitre 2

## Introduction à la modélisation des taux d'intérêts

### Préambule

Après avoir rappelé la prépondérance du risque de taux chez les assureurs de la branche vie et donné un bref aperçu de ce qu'est un générateur de scénarios économiques, il est nécessaire de poser le cadre théorique de la modélisation des taux d'intérêt. Les quantités usuelles de la modélisation des taux d'intérêt ainsi que les options de taux les plus courantes seront donc présentées dans ce chapitre.

### 2.1 Cadre de travail et notions préliminaires

**Hypothèses 1. (Espace de probabilité)** Dans le cadre de ce mémoire, nous considérons un espace de probabilité filtré noté  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , constitué de :

- l'univers  $\Omega$  comprenant l'ensemble des états du monde ;
- une tribu  $\mathcal{F}$  sur  $\Omega$  représentant l'ensemble des événements ;
- une filtration croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{F}$  représentant l'information disponible sur le marché à la date  $t$  ;
- une mesure de probabilité historique  $\mathbb{P}$ , aussi appelée monde-réel, a priori se fondant sur les observations historiques.

#### Convention de calcul de la période d'intérêt

Le paiement d'intérêts rémunère l'agent qui se prive de liquidités pour la période de prêt, il apparaît donc nécessaire de clarifier les conventions utilisées pour calculer la durée de cette période. Pour les prêts interbancaires débutant en  $T_{début}$  et s'achevant en  $T_{fin}$  la méthode utilisée par les acteurs du marché pour calculer la fraction annuelle  $\tau(T_{début}, T_{fin})$  du prêt est une convention EXACT/360, où le numérateur est la durée (en jours) exacte de la période de prêt, et le dénominateur utilisé est 360.

Par souci de simplicité, les fractions annuelle sont exprimées en convention actuarielle aussi appelée EXACT/EXACT. Le numérateur est la durée (en jours) exacte de la période de prêt, et le dénominateur utilisé est 366 si cette période couvre un 29 février et 365 sinon. Ainsi  $\tau(T_{début}, T_{fin})$  sera un nombre entier pour des prêts s'étendant sur une ou plusieurs années.

### 2.2 Principaux instruments de taux

#### 2.2.1 Obligation zéro-coupon et compte de marché monétaire

**Définition 1. (Obligation zéro-coupon)** Le produit dérivé de taux fondamental aussi bien sur les marchés que dans la modélisation des taux d'intérêt est l'obligation zéro-coupon. Le fonctionnement de ce contrat est simple : une unité de monnaie est versée à son détenteur à échéance du contrat, sans paiement intermédiaire. Soit  $T \geq 0$  une date d'échéance et soit  $t$  une date qui lui est antérieure ; nous noterons  $P(t, T)$  la valeur en  $t$  d'un contrat  $ZC$  de maturité  $T$ . En sa qualité de prix d'un contrat,  $P(t, T)$  doit être positif et connu en  $t$ , c'est-à-dire que  $P(t, T)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Enfin, observons que  $P(T, T) = 1$ .

**Définition 2. (Taux spot composé annuellement)** Le taux spot composé annuellement  $Z(t, T)$ , également appelé taux zéro-coupon, correspond à une stratégie d'investissement dans laquelle le placement est réinvesti à la fin de chaque année dans le même instrument. Ce taux est déterminé de manière à ce qu'une telle stratégie effectuée avec un placement initial  $P(t, T)$  au temps  $t$  rapporte 1 unité de monnaie au temps  $T$ .  $Z(t, T)$  est défini par :

$$Z(t, T) = P(t, T)^{-\frac{1}{\tau(t, T)}} - 1 \Leftrightarrow P(t, T) = (1 + Z(t, T))^{-\tau(t, T)}. \quad (2.1)$$



**Définition 3. (Taux spot composé continûment)** *Le taux spot composé continûment  $R(t, T)$  correspond à une stratégie d'investissement dans laquelle le placement est continûment réinvesti dans ce même instrument avec un horizon de placement infinitésimal. Ce taux est déterminé de manière à ce qu'une telle stratégie effectuée avec un placement initial  $P(t, T)$  au temps  $t$  rapporte 1 unité de monnaie au temps  $T$ .  $R(t, T)$  est défini par :*

$$R(t, T) = -\frac{1}{\tau(t, T)} \log P(t, T) \Leftrightarrow P(t, T) = \exp(-\tau(t, T)R(t, T)). \quad (2.2)$$

**Définition 4. (Taux spot composé simplement)** *Le taux spot composé simplement  $L(t, T)$  correspond à une stratégie d'investissement dans laquelle le placement initial dans une obligation zéro-coupon croît linéairement au cours du temps. Ce taux est déterminé de manière à ce qu'une telle stratégie effectuée avec un placement initial  $P(t, T)$  au temps  $t$  rapporte 1 unité de monnaie au temps  $T$ .  $L(t, T)$  est défini par :*

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \Leftrightarrow P(t, T) = \frac{1}{1 + \tau(t, T)L(t, T)}. \quad (2.3)$$

**Définition 5. (Taux court)** *Le taux court se définit comme le rendement d'un investissement à horizon de placement infiniment court; il est indépendant de la convention choisie. Ce taux peut s'interpréter comme le taux instantanément délivré par un investissement à chaque date.*

**Définition 6. (Compte de marché monétaire et déflateur)** *Le compte de marché monétaire  $B(t)$  (aussi appelé Bank account ou encore actif sans risque) est un actif dont le rendement instantané au temps  $t$  est le taux sans risque noté  $r_t$ . Par définition, la dynamique de cet actif est régie par l'équation suivante :*

$$dB(t) = r_t B(t) dt.$$

En posant la condition initiale  $B(0) = 1$  :

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right). \quad (2.4)$$

Une unité de monnaie investie dans le compte de marché monétaire au temps initial rapporte un montant  $B(T)$  au temps  $T$ , de manière équivalente  $1/B(T)$  unités de monnaie investie au temps initial rapporte 1 unité de monnaie au temps  $T$ . Le déflateur correspond à la valeur au temps  $t$  pour 1 unité de monnaie au temps  $T$ ; sa valeur au temps  $t \leq T$  est notée  $D(t, T)$ . Un raisonnement de non arbitrage utilisant le compte de marché monétaire donne :

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)}.$$

Le déflateur  $D(t, T)$  issu du compte de marché monétaire peut au premier abord sembler équivalent à l'obligation zéro-coupon  $P(t, T)$ . Or ce dernier est connu en date  $t$  alors que la valeur de  $D(t, T)$  dépend de toute la trajectoire du taux court  $(r_s)_{0 \leq s \leq T}$ . Ainsi :

- si le taux court  $(r_s)_{0 \leq s \leq T}$  est un processus déterministe, alors  $D(t, T) = P(t, T)$  pour toute paire de dates  $t$  et  $T$ ;
- si le taux court  $(r_s)_{0 \leq s \leq T}$  est un processus stochastique, alors  $P(t, T)$  est connue au temps  $t$  tandis que  $D(t, T)$  continue d'évoluer entre  $t$  et  $T$  au gré du processus  $(r_s)_{t \leq s \leq T}$ .

### 2.2.2 Taux *forward*

#### Contrats à terme sur taux

Un contrat à terme sur taux (*forward rate agreement* ou FRA) est un contrat négocié de gré à gré dans lequel deux contreparties conviennent d'échanger des montants à une date ultérieure. Si  $T$  et  $S$  sont deux dates futures avec  $T \leq S$ , une partie recevra en  $S$  le montant nominal  $N$  du contrat *forward* capitalisé linéairement au taux zéro-coupon  $L(T, S)$  :

$$N \times \tau(T, S) \times L(T, S).$$

Sa contrepartie recevra le montant nominal capitalisé à un taux  $K$  fixé lors de la négociation du contrat *forward* :

$$N \times \tau(T, S) \times K.$$

Pour le receveur du taux fixe, le FRA rapporte le montant suivant au temps  $S$  :

$$N\tau(T, S)(K - L(T, S)).$$

La valeur actualisée à la date initiale  $t$  du *payoff* du FRA est donc :

$$\text{FRA}(t, T, S, N, K) = N\tau(T, S)(P(t, S)K - P(t, S)L(T, S)).$$

Disposer d'un montant  $P(T, S)$  au temps  $T$  est équivalent à disposer d'un montant égal 1 au temps  $S$ . Un montant de 1 au temps  $T$  est alors équivalent à un montant de  $1/P(T, S)$  en  $S$ . De plus, une unité de monnaie au temps  $T$  est équivalent à un montant  $P(t, T)$  en  $t$ . Ainsi un montant de  $1/P(T, S)$  en  $S$  est équivalent à un montant de  $P(t, T)$  en  $t$ . En injectant cette relation et la définition du taux  $L(T, S)$  dans l'expression précédente, la valeur du FRA s'écrit en fonction de zéro-coupons échangeables en  $t$  :

$$\text{FRA}(t, T, S, N, K) = N(P(t, S)\tau(T, S)K - P(t, T) + P(t, S)).$$

**Définition 7. (Taux *forward*)** *L'absence d'opportunité d'arbitrage impose la nullité de la valeur du FRA en  $t$ . Un unique taux  $K$ ,  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, vérifie cette condition ; il est noté  $F(t, T, S)$  et vaut :*

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right). \quad (2.5)$$

**Définition 8. (Taux *forward* instantané)** *Le taux *forward* instantané  $f(t, T)$  correspond au taux *forward* fixé et  $\mathcal{F}_t$ -mesurable en  $t$  pour une période de composition des intérêts infinitésimale débutant en  $T$ . Formellement, ce taux s'écrit comme suit :*

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}.$$

### 2.2.3 Taux *swap forward*

Les contrats FRA présentés précédemment peuvent être étendus à plusieurs horizons de temps prédéfinis, définissant ainsi un contrat *swap* de taux. Un *swap* consiste à échanger pour un montant nominal  $N$  une jambe fixe contre une jambe variable suivant deux échéanciers préalablement définis. Une partie du *swap* reçoit à chaque date de l'échéancier des intérêts fluctuants déterminés par le marché, sa contrepartie reçoit des intérêts constants fixés lors de la négociation du contrat. Le *swap* est dit payeur pour la partie délivrant la jambe fixe et receveur pour la partie délivrant la jambe variable.

Soit un premier échéancier constitué des dates  $\{T_m, T_{m+1}, \dots, T_n\}$ . Le paiement du taux  $K$  de la jambe fixe est effectué en date  $T_{i+1}$  pour la période  $[T_i, T_{i+1}]$ . La durée totale pendant laquelle des échanges sont réalisés,  $\tau(T_m, T_n)$ , est appelée ténor du contrat *swap*. Soit un instant  $t$  préalable au

début des échanges, satisfaisant  $t \leq T_m \leq \dots \leq T_n$ . La valeur au temps  $t$  des flux financiers associés à la jambe fixe s'écrit comme la somme des valeurs à l'instant  $t$  des paiements successifs du taux  $K$  :

$$PV_{JF}(t) = \sum_{i=m}^{n-1} \tau(T_i, T_{i+1}) P(t, T_{i+1}) K.$$

Un second échéancier  $\{T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$  (avec  $t \leq T_\alpha = T_m \leq \dots \leq T_\beta = T_n$ ) régit le paiement de la jambe variable. La valeur au temps  $t$  de la jambe variable est égale à une somme de composantes flottantes de contrats *forward* sur les périodes de composition des intérêts  $[T_i, T_{i+1}]$ , payant le taux simple  $L(T_i, T_{i+1})$  :

$$PV_{JV}(t) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau(T_i, T_{i+1}) P(t, T_{i+1}) L(T_i, T_{i+1}).$$

En injectant dans l'expression du taux  $L(T_i, T_{i+1})$  les Équations (2.5) et (2.3), la valeur au temps  $t$  du *swap* payeur est donc :

$$\text{SWAP}(t, T_m, T_n, N, K) = N(PV_{JV}(t) - PV_{JF}(t)).$$

La valeur au temps  $t$  d'un *swap* receveur se définit comme l'opposé de cette quantité.

**Définition 9. (Taux *swap forward*)** *L'égalisation de la valeur en  $t$  des jambes fixe et variable permet d'obtenir l'unique valeur du taux  $K$  assurant la nullité du contrat au temps  $t$  et l'absence d'opportunité d'arbitrage. Ce taux est appelé taux *swap forward* et noté  $S_{m,n}(t)$  :*

$$S_{m,n}(t) = \frac{P(t, T_m) - P(t, T_n)}{B_{m,n}^S(t)}, \quad (2.6)$$

avec :

$$B_{m,n}^S(t) = \sum_{i=m}^{n-1} \tau(T_i, T_{i+1}) P(t, T_{i+1}).$$

La quantité  $B_{m,n}^S(t)$  est appelée *annuité* ou bien *level* du contrat *swap*. Avec la définition des taux *forward* donnée par l'Équation (2.5), le *taux swap forward* peut aussi s'exprimer comme une somme pondérée de *taux forward* :

$$S_{m,n}(t) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \alpha_i(t) F(t, T_i, T_{i+1}), \quad (2.7)$$

avec :

$$\alpha_i(t) = \frac{\tau(T_i, T_{i+1}) P(t, T_{i+1})}{B_{m,n}^S(t)}.$$

La superposition des deux échéanciers régissant le paiement des jambes fixe et variable n'est pas nécessaire pour aboutir aux définitions suivantes.

## 2.3 Options sur taux

### 2.3.1 Présentation des options sur taux

Définis à tout instant  $t$  à partir d'obligations zéro-coupon disponibles sur le marché à travers les Équations (2.5), (2.7) et (2.6), le *taux forward* et le *taux swap forward* sont deux quantités  $\mathcal{F}_t$ -mesurables. Une option vanille européenne est un contrat négocié en  $t = 0$ , fixé comme origine des temps, donnant la possibilité d'acheter (respectivement de vendre) un actif, qualifié de sous-jacent, à une date de maturité  $T$  à un prix d'exercice (ou *strike*) fixé à la négociation du contrat.

Une option est dite à la monnaie (ou ATM pour *at the money*) si le prix d'exercice correspond au *prix forward* du sous-jacent évalué à la date initiale, elle est dite en dehors de la monnaie (ou AFM pour *away from the money*) si le prix d'exercice est différent du *prix forward*.

## Caplets et caps

Un caplet correspond à une option d'achat négociée en  $t$  sur une période de composition des intérêts ultérieure  $[T, S]$ . Ce contrat peut s'interpréter comme un FRA optionnel : à la date de maturité son détenteur a le droit, mais pas l'obligation, d'entrer dans un FRA payeur si celui-ci s'avère profitable. Le caplet rapporte à son acheteur la différence positive entre le taux  $L(T, S)$  et le prix d'exercice  $K$ . La valeur actualisée au temps  $t$  du caplet s'écrit :

$$D(t, T)\tau(S, T)(F(t, T, S) - K)^+, \quad t \leq T,$$

où  $(F(t, T, S) - K)^+ = \max(F(t, T, S) - K, 0)$ . Un cap correspond à une série de caplets suivant un échéancier  $\{T_m, T_{m+1}, \dots, T_n\}$  avec  $t \leq T_m \leq \dots \leq T_n$  négociés pour un unique prix d'exercice  $K$ . La valeur actualisée au temps  $t$  du cap s'écrit :

$$\sum_{i=m}^{n-1} D(t, T_i)\tau(T_i, T_{i+1})(F(t, T_i, T_{i+1}) - K)^+, \quad t \leq T_m.$$

## Floorlets et floors

Les floorlets et floors correspondent à des options de vente sur taux. Un floorlet peut s'interpréter comme un FRA optionnel : à la date de maturité son détenteur peut entrer dans un FRA receveur si celui-ci s'avère profitable. Leur définition est strictement équivalent à celle des caplets et caps, à la différence de la fonction de paiement qui rémunère cette fois la différence positive entre le prix d'exercice  $K$  et le taux  $L(T, S)$  et s'écrit  $(K - L(T, S))^+$ .

## Swaptions

Le terme swaption résulte de la contraction des mots *swap* et *option*. Une swaption payeuse (respectivement receveuse) donne le droit, mais pas l'obligation, de rentrer dans un *swap* payeur (respectivement receveur) de taux fixe  $K$ . En reprenant l'échéancier établi pour le taux swap, la swaption arrive à maturité en date  $T_m$  et la durée du *swap* sous-jacent  $\tau(T_m, T_n)$  est appelée tenor. Le détenteur d'une swaption payeuse rentrera dans le *swap* à la date  $T_m$  au taux  $K$  à condition que celui-ci lui soit profitable. Dans ces conditions et à l'aide des notations utilisées, pour la définition du taux *swap* la valeur actualisée au temps  $t$  de la swaption s'écrit :

$$\begin{aligned} D(t, T_m) & \left( \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau(T_i, T_{i+1})P(t, T_{i+1})F(t, T_i, T_{i+1}) - \sum_{i=m}^{n-1} \tau(T_i, T_{i+1})P(t, T_{i+1})K \right)^+, \\ & = D(t, T_m)B_{m,n}^S(t) \left( \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau(T_i, T_{i+1}) \frac{P(t, T_{i+1})}{B_{m,n}^S(t)} F(t, T_i, T_{i+1}) - K \right)^+, \\ & = D(t, T_m)B_{m,n}^S(t)(S_{m,n}(t) - K)^+, \quad t \leq T_m, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la définition de l'annuité du *swap*  $B^S$  pour la première égalité et la définition du taux *swap forward*  $S_{m,n}(t)$  pour la seconde.

Une swaption payeuse correspond donc à une option d'achat de maturité  $T_m$  et de prix d'exercice  $K$  sur le taux *swap* ; par une démonstration similaire une swaption receveuse correspond à une option de vente.

### 2.3.2 Valorisation des options sur taux

Les options échangées sur les marchés sont cotées en termes de volatilité implicite. La volatilité implicite d'une option se définit généralement comme le paramètre à placer en entrée de la formule de Black [BS73] de sorte à retrouver le prix de l'option. La formule de Black n'est pas définie lorsque les taux d'intérêt sont négatifs et c'est pourquoi la formule de Bachelier [Bac00] est aussi utilisée sur les marchés de taux pour définir la volatilité implicite d'une option. Les deux conventions de volatilité implicite utilisées pour les produits de taux seront présentées pour illustrer cette notion.

### Volatilité implicite de Black

La formule de Black a pour fondement l'hypothèse d'une dynamique log-normale de la valeur (qui s'assimile à des taux, dans le contexte de ce mémoire) d'un actif sous-jacent. Soit un actif  $S_t$  évoluant selon la dynamique suivante sous la mesure de probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$  et associée au numéraire  $B(t)$  :

$$dS_t = \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où  $\sigma$  est la volatilité implicite de l'actif sous-jacent et  $W_t^{\mathbb{Q}}$  un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre. L'option d'achat de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur le sous-jacent  $S_t$  est valorisée en calculant l'espérance du paiement du contrat. L'espérance calculée conditionnellement aux conditions de marché connues au temps  $t$  est notée  $\mathbb{E}_t$ . Le prix de l'option au temps  $t$  s'écrit :

$$PS_{Black}(t, T, K, \sigma) = B(t) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+].$$

La résolution de l'équation différentielle stochastique régissant la dynamique de  $S_t$  donne une distribution log-normale pour le prix de l'actif à toute date. Le calcul de son paiement espéré permet de retrouver le prix de l'option en  $t$  :

$$\begin{aligned} PS_{Black}(t, T, K, \sigma) &= B(t) \{S_t \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)\}, \\ d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

En notant  $PS_{marché}$  le prix effectivement observé sur le marché pour l'option concernée, la volatilité implicite de Black  $\sigma_{Black}$  se définit comme :

$$\sigma_{Black} = PS_{Black}^{-1}(t, T, K, PS_{marché}).$$

L'utilisation du paradigme de Black suppose que l'actif sous-jacent est à valeurs positives. Dans un contexte de baisse tendancielle observée depuis 1980, les taux d'intérêt ont atteint des valeurs négatives ces dernières années, en Europe notamment. L'utilisation du paradigme de Black a été remise en question au profit du paradigme de Bachelier, capable de s'accommoder des taux négatifs.

### Volatilité implicite de Bachelier

La formule de Bachelier repose quant à elle sur l'hypothèse d'une dynamique normale de l'actif sous-jacent. Soit un actif  $S_t$  évoluant selon la dynamique suivante sous la mesure de probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  associée au numéraire  $B(t)$  :

$$dS_t = \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

La résolution de l'équation différentielle stochastique de la dynamique de  $S_t$  donne une distribution normale pour le prix de l'actif à toute date. Le calcul de son paiement espéré permet de retrouver le prix de l'option en  $t$  :

$$\begin{aligned} PS_{Bachelier}(t, T, K, \sigma) &= B(t) \left\{ \sigma\sqrt{T-t} (d \Phi(d) + \varphi(d)) \right\}, \\ d &= \frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $\varphi$  est la densité de la loi normale centrée réduite.

En notant  $PS_{marché}$  le prix effectivement observé sur le marché pour l'option concernée, la volatilité implicite de Bachelier  $\sigma_{Bachelier}$  se définit comme :

$$\sigma_{Bachelier} = PS_{Bachelier}^{-1}(t, T, K, PS_{marché}).$$

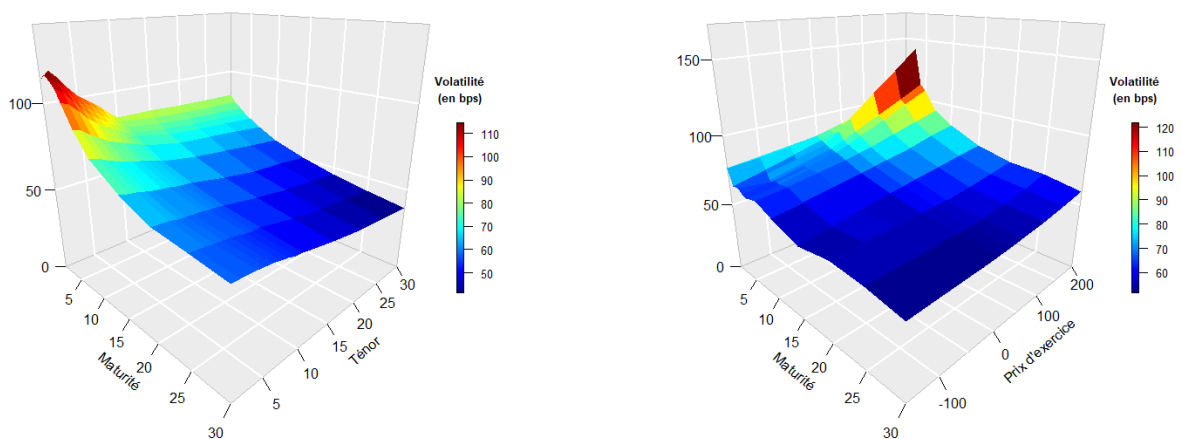
Les rappels mathématiques proposés en Annexe A permettent de généraliser ces résultats aux actifs suivant une dynamique normale ou log-normale sous une probabilité différente de la probabilité risque-neutre.

## Cube de volatilité

La volatilité implicite d'une swaption, dans le modèle de Black comme dans le modèle de Bachelier, dépend de :

- son prix d'exercice (*strike*)  $K$ , exprimé en points de base (bps) par rapport au prix *forward*  $S_0$  ;
- sa maturité correspondant à la date  $T_m$  évoquée dans la définition du taux swap ;
- son ténor correspondant à la durée  $\tau(T_m, T_n)$ .

Les prix ou volatilités implicites de swaptions dépendant de trois paramètres, ils forment un cube dont la représentation est souvent simplifiée en réduisant le nombre de dimensions en fixant la valeur d'un des trois paramètres. Les deux figures suivantes présentent deux nappes de volatilité de swaptions extraites du marché européen au 31/03/2022.



(a) Volatilité en fonction de la maturité et du ténor pour des swaptions à la monnaie.

(b) Volatilité en fonction de la maturité et du prix d'exercice pour des swaptions de maturité 10 ans.

FIGURE 2.1 – Nappes de volatilité pour des swaptions à monnaie et en dehors de la monnaie.

## 2.4 Courbe des taux d'intérêt

La courbe des taux d'intérêt, ou structure par terme des taux d'intérêt, est la représentation graphique de la fonction qui à chaque maturité associe un taux correspondant. Cette dénomination fait le plus souvent référence à la courbe représentant le taux spot composé annuellement. Bien que reflétant les anticipations par les agents de l'activité économique pour les prochaines années, cet objet n'offre pas une vision prospective du marché des taux d'intérêts. Il propose seulement un aperçu à un instant donné des taux échangés sur le marché.

La figure suivante représente la courbe des taux sans risque évoquée dans la Section 1.2.2 : construite à partir de taux de marché, une méthode d'interpolation Smith-Wilson est appliquée afin de construire cette courbe réglementaire. Cette donnée est rendue publique par l'EIOPA et diffusée de manière mensuelle sur [EIO]. Elle contient les taux zéro-coupons et les taux *forward* de ténor 1 ans à un pas annuel pour des maturités allant de 1 à 80 ans en date du 31/03/2022.

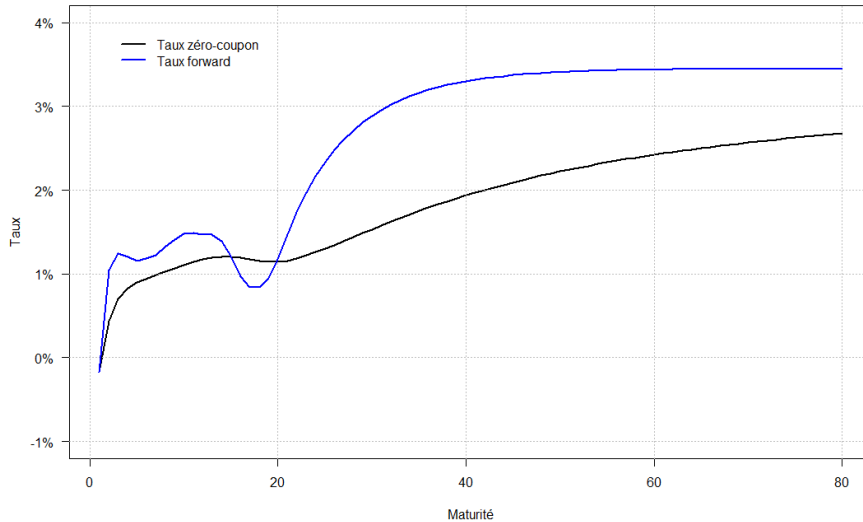


FIGURE 2.2 – Courbe zéro-coupon et *forward* EIOPA au 31/03/2022.

**Remarque.** *La courbe précédente n'est pas directement issue du marché mais émise par le régulateur. Les prix qui seront par la suite, abusivement, qualifiés de prix de marché sont en réalité des "pseudo-prix" calculés à partir des volatilités réellement issues du marché et de cette courbe des taux qui n'est pas directement observable sur le marché.*

## 2.5 Modélisation des taux d'intérêts nominaux

Utilisés pour simuler l'évolution du niveau et de la forme de la courbe des taux, les modèles de la courbe des taux d'intérêt sont généralement divisés en deux grandes catégories non exhaustives, mais contenant la plupart des modèles utilisés par les acteurs du marché de l'assurance.

### 2.5.1 Modèles de taux court

L'appellation de "modèles de taux court" désigne l'ensemble des modèles dont l'objectif est de rendre compte de l'évolution stochastique du processus de taux court  $r = (r_t)_{t \geq 0}$  (cf. Définition 5). Ce taux, associé à des périodes de temps infinitésimale, n'est pas observable directement sur les marchés financiers. Ces modèles sont largement documentés dans la littérature. La diversité des dynamiques proposées induit un choix varié de méthodes numériques pouvant être implémentées pour leur calibrage et leur simulation. Capables de répliquer au moins approximativement la structure par terme initiale et jouissant d'une certaine traçabilité analytique, les modèles de taux court les plus utilisés dans le monde de l'assurance sont les modèles de Hull & White, le modèle gaussien à deux facteurs (G2++) et le modèle Cox, Ingersoll et Ross à deux facteurs (CIR2++).

La relative simplicité des modèles de taux court peut cependant conduire à une plus faible cohérence avec les données de marché. En effet ces modèles ne permettent pas tous de répliquer parfaitement la structure par terme initiale et induisent une parfaite corrélation entre les taux zéro-coupon de différentes maturités qui n'est pas observée en pratique. Une cohérence avec les données de marché dégradée peut conduire à une mauvaise estimation de la volatilité et *in fine* à une sous-estimation des provisions techniques. Ces défauts des modèles de taux court expliquent le recours massif aux modèles de marchés par les acteurs du marché de l'assurance. En effet selon l'étude [ACP20] menée par l'ACPR, douze des quinze organismes d'assurance représentatifs du marché étudiés utilisaient des modèles de marché.

### 2.5.2 Modèles de marché

Les modèles de marché, aussi désignés par l'acronyme LMM (pour *LIBOR Market Models*), rendent compte de l'évolution de quantités directement observables sur les marchés, tels que les taux *forward* (cf. Section 3.1) ou le taux *swap* (cf. Section 3.2). Ces modèles apportent un cadre théorique cohérent avec l'utilisation des formules de Black et de Bachelier présentées précédemment. L'ajout d'un coefficient de déplacement et d'un facteur de volatilité stochastique permet une meilleure répliation des prix de certaines options, notamment AFM, et donc une meilleure intégration des conditions de marché. Les modèles appartenant à la famille LMM sont également nombreux et ont largement été étudiés dans la littérature.

Une version du modèle LMM originel intégrant une volatilité stochastique, permettant une meilleure répliation de données de marché AFM, et un coefficient de déplacement (*shift*), permettant de générer des taux négatifs, définit le modèle DD-SV-LMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM). Il est sans doute le modèle le plus répandu parmi les assureurs quant à la modélisation des taux nominaux dans les GSE et sera présenté plus en détails dans le Chapitre suivant. L'ajout de ces caractéristiques supplémentaires a une contrepartie : le modèle DD-SV-LMM est relativement complexe et nécessite de recourir à des méthodes numériques relativement techniques. Elles seront également présentées dans la suite de ce mémoire.



# Chapitre 3

## Présentation du DD-SV-LMM

### Préambule

Afin de présenter le modèle de taux faisant l'objet de cette étude, les dynamiques des taux *forward* et des taux *swap* seront introduites reprenant le cadre utilisé par Wu et Zhang dans [WZ06]. Les versions du modèle LMM étudiées dans ce mémoire n'étant pas exploitables dans leur formes brutes, il est nécessaire de faire une hypothèse de figement (*freezing*) qui sera évoquée succinctement avant de présenter la forme finale du modèle régissant la dynamique des taux *forward* et *swap*.

### 3.1 Dynamique des taux *forward*

#### 3.1.1 Quantités modélisées et numéraire utilisé

Soit  $T_{-1} = 0$  la date actuelle. On considère une série de dates  $\{T_0, T_1, \dots, T_M\}$  d'où sont extraites une série de maturités  $T_i$  et de ténors associés  $\tau_i = \tau(T_i, T_{i+1})$  pour  $0 \leq i \leq M$ . Le LMM propose de modéliser la dynamique de l'ensemble des taux *forward*  $F(t, T_i, T_{i+1})$ , qui seront notés dans la suite  $F_i(t) = F(t, T_i, T_{i+1})$ .

La Définition 2.5 du taux *forward* permet d'écrire l'identité suivante :

$$F_i(t)P(T_{i+1}) = \frac{1}{\tau_i} (P(t, T_i) - P(t, T_{i+1})).$$

Cette relation indique que la quantité  $F_i(t)P(T_{i+1})$  est la valeur en  $t$  d'un portefeuille d'actifs échangeables, en l'occurrence des obligations zéro-coupon. Il est alors remarquable que sous la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{i+1}$  associée au numéraire  $P(\cdot, T_{i+1})$ , le taux *forward* est une martingale. Ainsi, en utilisant les techniques de changements de numéraires précisées en Annexe A.1, il est possible d'écrire le prix d'un caplet sur le taux  $F_i(\cdot)$  comme dépendant uniquement de la loi de celui-ci sous la probabilité  $\mathbb{Q}^{i+1}$  :

$$\begin{aligned} PV_{\text{caplet}}(0, T_i, T_{i+1}, K) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(T_i)(F_i(T_i) - K)_+] \\ &= P(0, T_{i+1})\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{i+1}}[(F_i(T_i) - K)_+]. \end{aligned}$$

#### 3.1.2 LIBOR Market Model

Bien que les taux *forward* soient modélisées dans le LMM, la mise en place du modèle peut débuter par la spécification de la dynamique des obligations zéro-coupons en l'absence d'opportunité d'arbitrage sous probabilité risque-neutre. La dynamique des taux *forward* sera spécifiée sous cette même mesure avant d'être exprimée sous la probabilité *forward*-neutre, adaptée à la valorisation des options sur taux *forward*.

**Hypothèses 2. (Dynamique des obligations zéro-coupon)** *En faisant l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et donc en supposant une dynamique de type log-normale, le prix d'une obligation zéro-coupon suit l'équation de diffusion suivante :*

$$dP(t, T_i) = P(t, T_i) (r_t dt + \boldsymbol{\sigma}(t, T_i) \cdot d\mathbf{Z}_t), \quad (3.1)$$

où  $r_t$  est la valeur du taux court,  $\boldsymbol{\sigma}(t, T_i)$  un vecteur de volatilité dépendant du temps et  $(\mathbf{Z}_t)_{0 \leq t \leq T_i}$  un vecteur de mouvements browniens standards indépendants les uns des autres.

Les calculs menés en Annexe B, donnent la dynamique suivante des taux *forward* sous probabilité risque-neutre. La définition du mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}^{i+1}$  par rapport au mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}$ , spécifiée en Annexe A.2, permet d'écrire la dynamique des taux *forward* sous probabilité *forward*-neutre comme suit :

$$dF_i(t) = F_i(t)\gamma_i(t) \cdot d\mathbf{Z}_t^{i+1},$$

avec :

$$\gamma_i(t) = \frac{1 + \tau_i F_i(t)}{F_i(t)} (\sigma(t, T_i) - \sigma(t, T_{i+1})),$$

où  $(\mathbf{Z}_t^{i+1})_{0 \leq t \leq T_i}$  est un mouvement brownien standard sous la probabilité *forward*-neutre  $\mathbb{Q}^{i+1}$ .

**Définition 10. (LMM)** *Le modèle de marché LIBOR consiste à supposer que le facteur de volatilité  $\gamma_i(t)$  est une fonction déterministe et constante par morceaux. Le processus  $(F_i(t))_{0 \leq t \leq T_i}$  est alors une  $\mathbb{Q}^{i+1}$ -martingale satisfaisant :*

$$dF_i(t) = F_i(t)\gamma_i(t) \cdot d\mathbf{Z}_t^{i+1}, \quad (3.2)$$

où  $\gamma_i(t)$  un vecteur de volatilité constante par morceaux.

L'hypothèse d'une dynamique log-normale des taux forward offre un cadre cohérent avec l'utilisation de la formule de Black appliquée à la tarification des caplets et largement utilisé par les acteurs du marché. Cependant la formulation de la Définition 10 du *LIBOR market model* présente certaines faiblesses et peut être améliorée : d'une part la dynamique log-normale ne permet pas de générer des taux négatifs et d'autre part la fonction de volatilité déterministe ne permet pas de capturer la structure de volatilités implicites *smile* ou *skew* du marché.

### 3.1.3 LIBOR Market Model avec Diffusion Déplacée et Volatilité Stochastique

Afin de pallier la première faiblesse du LMM, un coefficient de déplacement  $\delta \geq 0$  ainsi que le taux *forward*  $\delta$ -décalé égal à  $F_i(t) + \delta$  sont introduits. Le coefficient de déplacement  $\delta$  autorise la modélisation de taux  $F_i(t)$  négatifs allant jusqu'à  $-\delta$ , tout en conservant une distribution log-normale pour le taux *forward*  $\delta$ -décalé.

La seconde faiblesse du LMM dans sa formulation primaire est compensée par l'ajout d'un facteur multiplicatif de volatilité stochastique  $V$  strictement positif. Le processus  $(V(t))_{0 \leq t \leq T_i}$  est supposé suivre un processus de type Cox-Ingersoll-Ross CIR sous la probabilité risque-neutre :

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dW_t, \quad (3.3)$$

où  $\kappa, \theta$  et  $\epsilon$  sont des paramètres indépendants du temps et  $(W_t)_{0 \leq t \leq T_i}$  un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre. La condition de Feller  $2\kappa\theta \geq \epsilon^2$  assure la stricte positivité du processus. Dans le cadre du modèle DD-SV-LMM, la dynamique des taux *forward*  $F_i$  sous la probabilité risque neutre devient :

$$dF_i(t) = (F_i(t) + \delta)\sqrt{V(t)}\gamma_i(t) \cdot \left[ d\mathbf{Z}_t - \sqrt{V(t)}\sigma(t, T_{i+1})dt \right]. \quad (3.4)$$

Où le processus  $(V_t)_{0 \leq t \leq T_i}$  évolue selon la Dynamique (3.3) définie précédemment.

**Remarque.** *L'introduction du coefficient  $\delta$  a aussi une influence sur la structure de volatilité et induit une pente (ou skew) sur la courbe représentant la volatilité en fonction du prix d'exercice.*

Le cadre de modélisation admet une structure de corrélation entre les mouvements browniens  $(\mathbf{Z}_t)_{0 \leq t \leq T_i}$  et  $(W_t)_{0 \leq t \leq T_i}$  spécifiée de la sorte :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \frac{\gamma_i(t)}{\|\gamma_i(t)\|} \cdot d\mathbf{Z}_t \right) dW_t \right] = \rho_i(t)dt, \quad \text{avec} \quad |\rho_i(t)| \leq 1.$$

Bien que la mesure risque neutre soit peut adaptée à la valorisation des produits dérivés du taux *forward*, il est nécessaire de mentionner la dynamique de ce dernier sous cette mesure à des fins de simulation. En effet dans un générateur de scénarios économiques risque-neutre, les différents facteurs de risque dont le taux *forward* fait partie sont projetés sous probabilité risque neutre.

Enfin, l'expression de la Dynamique (3.4) sous la probabilité *forward*-neutre donne la formulation finale du modèle de marché LIBOR avec diffusion déplacée et volatilité stochastique faisant l'objet de cette étude.

**Définition 11. (DD-SV-LMM)** *En considérant un mouvement brownien standard sous la probabilité  $\mathbb{Q}^{i+1}$ , pouvant être défini à partir du mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre en utilisant les méthodes de changement de numéraire de l'Annexe A.2, le taux forward et le facteur de volatilité stochastique associé suivent la dynamique suivante sous  $\mathbb{Q}^{i+1}$  :*

$$\begin{cases} dF_i(t) &= (F_i(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \gamma_i(t) \cdot d\mathbf{Z}_t^{i+1}, \\ dV(t) &= [\kappa\theta - (\kappa + \epsilon \xi_i(t)) V(t)] dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_t^{i+1}, \end{cases} \quad (3.5)$$

avec :

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^i \frac{\tau_k (F_k(t) + \delta) \rho_k(t) \|\gamma_k(t)\|}{1 + \tau_k F_k(t)}. \quad (3.6)$$

## 3.2 Dynamique des taux *swap*

### 3.2.1 Quantités modélisées et numéraire utilisé

Dans cette section, l'ensemble des taux *swap* de maturité et ténor extraits de l'ensemble de dates utilisé pour la modélisation des taux *forward* sera considéré. Le taux *swap* est déduit des taux *forward* appropriés à l'aide de l'Équation (2.7).

La Définition 2.6 du taux *swap* permet d'écrire la quantité  $S_{m,n}(t)B_{m,n}^S(t)$  en fonction d'obligations zéro-coupon :

$$S_{m,n}(t)B_{m,n}^S(t) = P(t, T_m) - P(t, T_n).$$

Le numéraire assurant la martingalité du taux *swap* est l'annuité associé au *swap*  $B_{m,n}^S(t)$ . Sous la mesure  $\mathbb{Q}^S$  associée à ce numéraire, le prix d'une swaption peut s'écrire sous une forme où la seule quantité stochastique est le taux *swap* :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(S_{m,n}(T_m) - K)^+].$$

### 3.2.2 Dynamique des taux *swap* sous probabilité *swap-forward*

S'il est nécessaire de connaître la dynamique des taux *forward* sous probabilité risque neutre à des fins de simulation, il est inutile de donner la dynamique des taux *swap* sous cette mesure car ceux-ci ne font pas l'objet d'une simulation. La dynamique des taux *swap* sous la mesure *swap-forward*  $\mathbb{Q}^S$  est une conséquence de l'application de la formule d'Itô à la fonction qui lie les taux *forward* au taux *swap* :

$$\begin{cases} dS_{m,n}(t) &= \sqrt{V(t)} \sum_{i=m}^{n-1} \frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_i} (F_i(t) + \delta) \gamma_i(t) \cdot \mathbf{Z}_t^S, \\ dV(t) &= [\kappa\theta - (\kappa + \epsilon \xi^S(t)) V(t)] dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_t^S, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec :

$$\xi^S(t) = \sum_{i=m}^{n-1} \alpha_i(t) \xi_i(t), \quad \text{où} \quad \alpha_i(t) = \frac{\tau_i P(t, T_{i+1})}{B^S(t)}.$$

$\frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_i}$  est la dérivée composante par composante de la fonction associant les taux *forward* au taux *swap* définie analytiquement dans [WZ06], et  $\xi_i(t)$  la quantité définie par l'Équation (3.6).

### 3.2.3 Paramétrage du modèle

Dans le cadre de ce mémoire, il sera fait l'hypothèse d'une volatilité déterministe paramétrique et constante par morceaux dont la valeur sur l'intervalle  $[T_i, T_{i+1})$  pour  $i \leq j - 1$  est donnée par :

$$\gamma_j(T_i) = \beta_{j-i+1} g(T_j - T_i), \quad \text{avec} \quad g(u) = (bu + a)e^{-cu} + d,$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes positives et où les  $\beta_k$  sont des vecteurs à deux dimensions de norme euclidienne unitaire captant la structure de corrélation des taux *forward* de différentes maturités. Ces vecteurs sont déterminés par une analyse en composante principale effectuée sur des données historique, hors de propos dans cette étude.

La corrélation entre les taux *forward* et la volatilité stochastique est captée par un unique paramètre  $\rho$ . En prenant  $\mathbf{Z}_t = (Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)})$  où  $Z_t^{(1)}$  et  $Z_t^{(2)}$  sont deux mouvements browniens indépendants, et en introduisant un troisième mouvement brownien indépendant  $Z_t^{(3)}$ ,  $W_t$  peut s'écrire :

$$W_t = \frac{\rho}{\sqrt{2}}(Z_t^{(1)} + Z_t^{(2)}) + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^{(3)}.$$

Finalement, la dynamique du DD-SV-LMM est spécifiée par les neuf paramètres suivants :

$$(a, b, c, d, \kappa, \theta, \epsilon, \rho, \delta).$$

## 3.3 Hypothèses de figement

### 3.3.1 Formulation des hypothèses de figement

L'Équation (3.7) de diffusion des taux *swap* n'est cependant pas exploitable en tant que tel. En effet, la dynamique des taux *swap* telle que spécifiée ne permet pas d'obtenir des formules de valorisation des swaptions. Cela est dû au fait que les dérivées partielles du taux *swap* par rapport aux taux *forward* de différentes maturités sont des termes stochastiques difficilement exploitables. De plus, le *drift* stochastique de la volatilité stochastique  $V(t)$  est également problématique. Les hypothèses de figement, souvent désignées sous le nom d'hypothèses de *freezing* dans la littérature, font l'hypothèse de la faible variabilité des quantités figées.

Une unique hypothèse de figement sera formulée pour le facteur de volatilité stochastique et deux hypothèses de figement différentes seront retenues pour la dynamique du taux *swap*, l'une menant à une dynamique de type log-normal et l'autre menant à une dynamique de type normal.

**Hypothèses 3. (Figement pour la volatilité stochastique)** *Le terme  $\xi^S(t)$  apparaissant dans la dynamique de  $V$  dépend du prix des zéro-coupons et des taux forward qui sont des quantités stochastiques. Ces quantités sont donc fixées à leur valeur initiale et  $\xi^S(t)$  est remplacé par  $\xi_0^S(t)$  défini par :*

$$\xi_0^S(t) = \sum_{i=m}^{n-1} \alpha_i(0) \sum_{k=1}^i \frac{\tau_k(F_k(0) + \delta) \rho_k(t) \|\gamma_k(t)\|}{1 + \tau_k F_k(0)}.$$

**Hypothèses 4. (Figement log-normal)** *Le fait de considérer que la quantité suivante est de faible volatilité permet d'obtenir un modèle de type log-normal :*

$$\frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_i} \frac{(F_i(t) + \delta)}{(S_{m,n}(t) + \delta)} \approx \frac{\partial S_{m,n}(0)}{\partial F_i} \frac{(F_i(0) + \delta)}{(S_{m,n}(0) + \delta)} = \omega_i(0).$$

*La dynamique des taux swap sous probabilité swap-forward devient :*

$$\begin{cases} dS_{m,n}(t) &= (S_{m,n}(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \sum_{i=m}^{n-1} \omega_i(0) \gamma_i(t) \cdot \mathbf{Z}_t^S, \\ dV(t) &= [\kappa\theta - (\kappa + \epsilon \xi_0^S(t)) V(t)] dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_t^S. \end{cases} \quad (3.8)$$

**Hypothèses 5. (Figement normal)** *Le fait de considérer que la quantité suivante est de faible volatilité permet d'obtenir un modèle de type normal :*

$$\frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_i}(F_i(t) + \delta) \approx \frac{\partial S_{m,n}(0)}{\partial F_i}(F_i(0) + \delta) = \omega_i(0).$$

*La dynamique des taux swap sous probabilité swap-forward devient :*

$$\begin{cases} dS_{m,n}(t) &= \sqrt{V(t)} \sum_{i=m}^{n-1} \omega_i(0) \gamma_i(t) \cdot \mathbf{Z}_t^S, \\ dV(t) &= [\kappa\theta - (\kappa + \epsilon \xi_0^S(t)) V(t)] dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_t^S. \end{cases} \quad (3.9)$$

**Remarque.** *Les hypothèses de figement précédentes reposent sur la méthode de Hull-White, consistant à formuler des hypothèses sur la dynamique dérivée de la formule d'Itô de l'Équation (3.7). L'approche de Rebonato, détaillée dans [BM07], consiste à supposer que le taux swap défini dans l'Équation (2.7) est une combinaison linéaire de taux forward dont les coefficients sont constants.*

### 3.3.2 Validité des hypothèses de figement

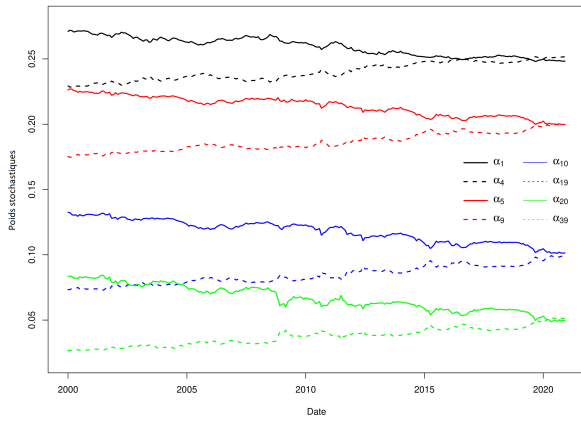
Les hypothèses formulées sur la faible variabilité de certaines quantités stochastiques seront vérifiées à l'aide des données historiques du marché européen disponibles sur les taux *swap* et les taux *forward*. Si le postulat formulé sur la faible variabilité des poids stochastiques  $\alpha_i(t)$  et  $\partial S_{m,n}(t)/\partial F_i$  semble valide, les hypothèses sur la faible variabilité de  $F_i(t)$  et  $F_i(t)/S_{m,n}(t)$ , respectivement associées au paradigme de Bachelier et de Black, sont plus discutables. Les figures suivantes sont reprises de [Meh21].

La Figure 3.1a représente les séries temporelles historiques des poids stochastiques  $\alpha_i$  intervenant dans la définition du taux *swap* donnée par l'Équation (2.7), pour  $i \in \{1, 4, 5, 9, 10, 19, 20, 39\}$ . Au regard des données historiques, la faible variabilité de ces coefficients semble être une hypothèse acceptable.

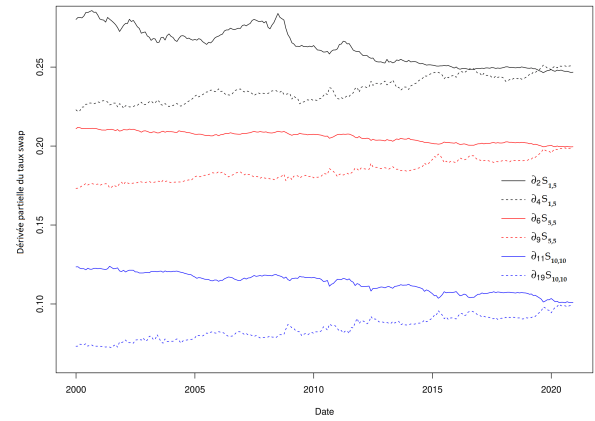
La Figure 3.1b représente les séries temporelles historiques des dérivées partielles du taux *swap* par rapport au taux *forward*,  $\partial_i S_{m,n}$  désigne la dérivée partielle de  $S_{m,n}$  par rapport à  $F_i$ . Les dérivées partielles  $(\partial_2, \partial_4)$  (resp.  $(\partial_6, \partial_9)$ ,  $(\partial_{11}, \partial_{19})$ ) sont associées à des swaptions de maturité 1 an et de ténor 5 ans (resp. maturité 5 ans et ténor 5 ans et maturité 10 ans et ténor 10 ans). Ici encore, l'hypothèse de figement de ces coefficients est appuyée par les données historiques.

Les taux *forward* de ténor 1 an  $F_i$ , pour des maturités  $i \in \{1, 5, 10, 20, 30\}$ , sont représentés en Figure 3.1c. L'écart type historique est plus élevé que pour les quantités précédemment évoquées mais reste relativement faible. L'hypothèse de faible variabilité des taux *forward*, associée au paradigme de Bachelier formulé à travers l'Équation (3.9), est donc discutable.

La dernière Figure 3.1d décrit différents ratios de taux *forward* divisés par le taux *swap*  $F_1/S_{1,5}$  (resp.  $F_4/S_{1,5}$ ,  $F_5/S_{5,5}$ ,  $F_9/S_{5,5}$ ,  $F_{10}/S_{10,10}$ ,  $F_{19}/S_{10,10}$ ,  $F_{20}/S_{20,20}$  et  $F_{39}/S_{20,20}$ ). Les séries temporelles sont relativement stables jusqu'à récemment : en environnement de taux bas, les ratios historiques sont plus variables. Les données historiques récentes semblent donc discréditer l'hypothèse de faible variabilité des ratios des taux *forward* par rapport aux taux *swap* associée au paradigme de Black formulé dans l'Équation (3.8).



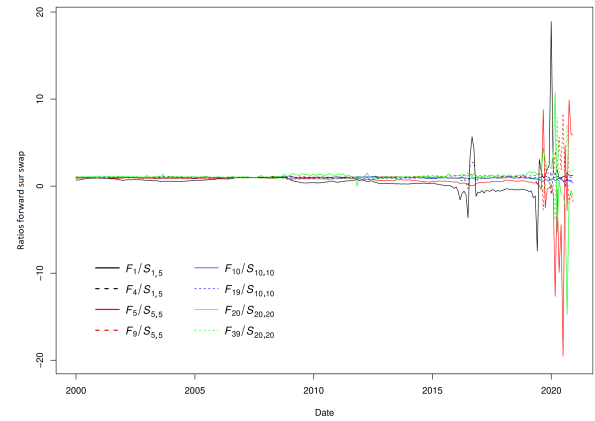
(a) Historique des poids stochastiques  $(\alpha_i(0))$ , les écarts-type des séries temporelles se situent entre 0.0066 et 0.0097.



(b) Historique des dérivées partielles du taux *swap*  $(\partial_i S_{m,n}(0))$ , les écarts-type des séries temporelles se situent entre 0.0035 et 0.012.



(c) Historique des taux *forward*  $F_i(0)$ , les écarts-type des séries temporelles se situent entre 0.018 et 0.019.



(d) Historique des ratios des taux *forward* et des taux *swap*  $F_i(0)/S_{m,n}(0)$ , les écarts-type des séries temporelles se situent entre 0.097 et 1.98.

FIGURE 3.1 – Validation historique des hypothèses de figement.

# Chapitre 4

## Valorisation de swaptions sous dynamique DD-SV-LMM

### Préambule

Comme indiqué dans la section précédente, le DD-SV-LMM permet de modéliser directement des quantités observables sur le marché. Le modèle final obtenu après les hypothèses de figement peut désormais être utilisé pour obtenir des formules de tarification des swaptions semi-fermées. Les différentes formules de valorisation des swaptions utilisées dans cette étude seront présentées dans ce chapitre.

### 4.1 Méthode dite de Heston

La méthode de valorisation dite de Heston car utilisée dans le modèles proposé par [Hes93], applicable en paradigme normal comme en paradigme log-normal, repose sur le calcul puis l'intégration de la fonction caractéristique du taux *swap* à terme modélisé dans le cadre du DD-SV-LMM. Les hypothèses de figement des coefficients proposées dans la Section 3.3 simplifient suffisamment le modèle pour obtenir numériquement les valeurs de la fonction caractéristique de  $S_{m,n}(T_m)$ . L'information sur la distribution du taux *swap* à terme portée par la fonction caractéristique est ensuite intégrée pour calculer le prix de l'option.

#### 4.1.1 Heston en paradigme log-normal

Cette formule de valorisation des swaptions est déduite de la Dynamique (3.8), elle est considérée comme la formule de valorisation de référence dans cette étude. Sous la mesure *swap-forward*  $\mathbb{Q}^S$  le taux *swap* est une martingale, le prix en  $t = 0$  d'une swaption s'exprime donc comme :

$$\begin{aligned} PV_{swpt}(0, T_m, T_n, K) &= B_{m,n}^S(0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(S_{m,n}(T_m) - K)^+] \\ &= B_{m,n}^S(0) S_{m,n}(0) \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ e^{\log \frac{S_{m,n}(T_m)}{S_{m,n}(0)}} \mathbf{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{K}{S_{m,n}(0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbf{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K}] \right\}. \end{aligned}$$

Les deux espérances qui apparaissent dans l'identité précédente peuvent être valorisées à l'aide de la fonction génératrice des moments du taux *swap* définie dans son domaine de définition  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$  par :

$$\Phi_{T_m}(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ e^{z \log \frac{S_{m,n}(T_m)}{S_{m,n}(0)}} \right], \quad z \in \mathcal{C}, \quad (4.1)$$

avec des formules suivantes, reprises notamment de [DPS00] :

$$\begin{cases} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ e^{\log \frac{S_{m,n}(T_m)}{S_{m,n}(0)}} \mathbf{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K} \right] &= \frac{\Phi_{T_m}(1)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \{ e^{-iu \log K/S_{m,n}(0)} \Phi_{T_m}(1 + iu) \}}{u} du, \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbf{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K}] &= \frac{\Phi_{T_m}(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \{ e^{-iu \log K/S_{m,n}(0)} \Phi_{T_m}(iu) \}}{u} du, \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $i$  est le nombre imaginaire pure tel que  $i^2 = -1$ . Pour le calcul numérique de la fonction génératrice des moments, le lecteur intéressé pourra se référer à [WZ06].

#### 4.1.2 Heston en paradigme normal

Cette seconde formule est une adaptation de la précédente au paradigme normal associé au modèle de Bachelier. La fonction génératrice des moments du taux *swap* à terme dans son domaine de définition  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  est alors notée :

$$\Psi_{T_m}(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ e^{z S_{m,n}(T_m)} \right], \quad z \in \mathcal{D}. \quad (4.3)$$

Et le le prix d'une swaption s'exprime donc comme :

$$PV_{swpt}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [S_{m,n}(T_m) \mathbb{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K}] - K \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbb{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K}] \right\}.$$

Les deux espérances de l'identité précédente peuvent à nouveau s'exprimer sous la forme d'intégrales de la fonction génératrice des moments du taux *swap* à terme :

$$\begin{cases} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [S_{m,n}(T_m) \mathbb{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K}] &= \frac{S_{m,n}(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \{ e^{iuK} \Psi'_{T_m}(-iu) \}}{u} du, \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbb{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K}] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \{ e^{-iuK} \Psi_{T_m}(iu) \}}{u} du. \end{cases} \quad (4.4)$$

Pour le calcul numérique de la fonction génératrice des moments, le lecteur intéressé pourra se référer à [DABB17]. Les deux formules de valorisation, en paradigme normal comme en paradigme log-normal, reposent chacune sur l'intégration numérique de deux intégrales qui sera réalisée par quadrature de Gauss-Laguerre dont le principe est résumé en Annexe C.1.

**Remarque.** *Il est possible de passer du paradigme log-normal au paradigme normal en travaillant sur le logarithme du taux swap à terme  $\log(S_{m,n}(T_m))$ .*

## 4.2 Transformée de Fourier

Les deux versions de la méthode de Heston présentées dans la Section 4.1 nécessitent de réaliser deux intégrations numériques de la fonction caractéristique du taux *swap* à terme. La méthode de *Fast Fourier Transform* (FFT), développée dans les années 90 et adaptée au cadre de travail actuel par [WZ06], permet d'accélérer la valorisation des swaptions en ne recourant qu'à une unique intégration numérique de la fonction caractéristique par quadrature de Gauss-Laguerre.

En effet, les calculs menés en Annexe C.2 démontrent que le prix d'une swaption s'écrit alors comme une transformée inverse de la fonction caractéristique  $\Phi_{T_m}(z)$  définie par l'Équation (4.1) :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) S_{m,n}(0) \frac{e^{-ak}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iuk} \mathcal{G}(u) du, \quad (4.5)$$

avec :

$$\mathcal{G}(u) = \frac{\Phi_T(1+a+iu)}{(a+iu)(1+a+iu)}, \quad \text{où } a \geq 0 \text{ est un paramètre d'amortissement.}$$

Le choix du paramètre  $a$  n'est soutenu par aucun résultat analytique. Le choix a été fait de fixer  $a = 2$ , cette valeur de  $a$  donne des résultats satisfaisants dans tous les cas de calibrage étudiés et ne sera pas discutée dans ce mémoire.

**Remarque.** *Cette méthode est uniquement exploitable dans le paradigme log-normal pour lequel la fonction caractéristique du logarithme du taux swap est connue. Les calculs afférents sont détaillés en Annexe C.2.*

## 4.3 Développement en série de Gram-Charlier

Dans le cas où l'hypothèse normale spécifiée par l'Équation (3.9) est retenue, il est envisagé d'approcher la densité du taux *swap* à terme par une loi normale de référence perturbée par un polynôme.

### 4.3.1 Approximation point par point d'une loi normale

**Définition 12. Polynômes de Hermite** *Cette famille de polynômes notée  $H_n(x)$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , est liée à la loi Gaussienne centrée et réduite par la relation suivante :*

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n H_n(x) \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad H_0 \equiv 1, \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Leur formulation explicite sera utilisée par la suite :

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Soit une densité de référence  $f$  à approcher et  $X$  une variable aléatoire dont la densité est  $f$  : à savoir que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ . Le développement en série de Gram-Charlier de  $f$  est défini par :

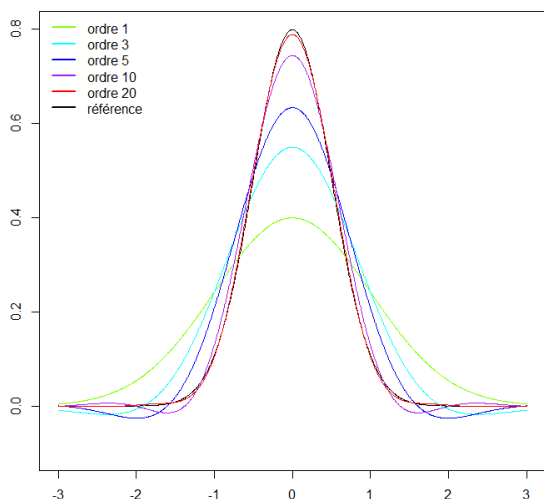
$$f(x) = \varphi(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x), \quad \text{avec } c_n = \frac{1}{n!} \mathbb{E}[H_n(X)], \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

La densité à approcher  $f(x)$  s'exprime alors comme la perturbation de la densité normale  $\varphi(x)$  par un polynôme dont les coefficients dépendent des moments de  $f(x)$ . En pratique, les applications numériques nécessitent une troncature de la série à un ordre fini  $N \in \mathbb{N}^*$ . L'approximation ainsi obtenue est notée  $f^N(t)$  et nécessite le calcul des  $N$  premiers moments de la distribution de référence. Pouvant prendre des valeurs négatives, la fonction  $f^N(t)$  est qualifiée de pseudo-densité. L'approximation de  $f(x)$  définie dans l'Équation (4.7) n'est précisément définie que dans le cas où  $f^N(t)$  converge vers  $f(x)$  dans un certain sens lorsque  $N$  devient infiniment grand. Dans le cas de la convergence simple (point par point), la condition suffisante à la convergence de la suite de fonctions  $f^N(t)$  vers  $f(x)$  donnée par [Cra28] est la suivante :

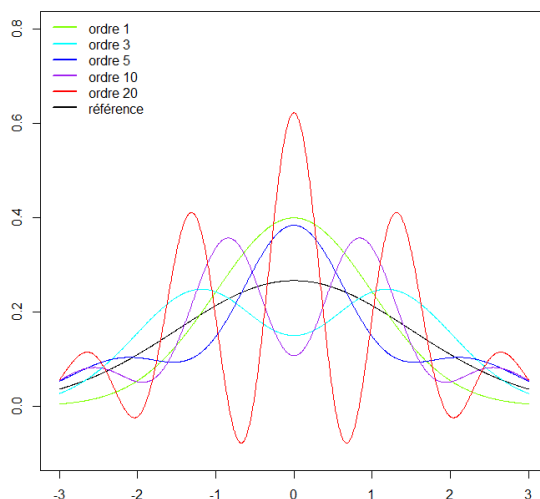
$$\int_{\mathbb{R}} e^{x^2/4} f(x) dx < \infty.$$

Cette condition est forte, dans le sens où elle impose une décroissance en  $\pm\infty$  plus rapide qu'une décroissance exponentielle quadratique.

Deux développements en série de Gram-Charlier sont réalisés à titre d'exemple sur deux lois normales de variance  $\sigma_1 = 0.5$  et  $\sigma_2 = 1.5$ . Un calcul direct montre que, dans le cas où  $f$  est la densité d'une loi normale centrée de variance  $\sigma^2$ , la condition de convergence est équivalente à  $\sigma^2 < 2$ .



(a) Développement de G.-C. pour une densité normale de variance  $\sigma = 0.5 \leq \sqrt{2}$  jusqu'à l'ordre 20.



(b) Développement de G.-C. pour une densité normale de variance  $\sigma = 1.5 \geq \sqrt{2}$  jusqu'à l'ordre 20.

FIGURE 4.1 – Développements en série de Gram-Charlier de lois normales centrées.

L'exemple précédent met en lumière l'instabilité du développement en série de Gram-Charlier dans le cas d'une loi normale présentant une variance trop importante. Intuitivement, la densité  $f$  ne doit pas être excessivement éloignée de la densité de référence  $\varphi$  pour être approchée convenablement.

### 4.3.2 Développement en série de Gram-Charlier dans un espace de Hilbert

Abandonner la notion de convergence point par point au profit d'une notion plus faible, la convergence dans un espace de Hilbert, permet d'introduire une légère extension du développement en série de Gram-Charlier. Afin d'élargir le cadre initial prenant comme unique densité de référence la loi normale centrée et réduite  $\varphi$ , des densités gaussiennes  $\varphi_r$  d'espérance  $\mu_r$  de variance  $\sigma_r^2$  seront prises comme densité de référence. Ces développements seront eux aussi désignés sous le nom de séries de Gram-Charlier.

**Hypothèses 6. (Espace de Hilbert)** *L'espace de Hilbert  $\mathcal{L}_r^2$ , dans lequel la densité de référence sera approchée, est introduit :*

$$\mathcal{L}_r^2 = \left\{ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \|h\|_r^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} h(u)^2 \varphi_r(u) du < \infty \right\},$$

avec :

$$\varphi_r(u) = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u - \mu_r}{\sigma_r} \right)^2}.$$

La base orthonormale de  $\mathcal{L}_r^2$  notée  $(\check{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , s'exprime à l'aide des polynômes de Hermite standardisés :

$$\check{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left( \frac{x - \mu_r}{\sigma_r} \right).$$

On définit le ratio de vraisemblance  $\bar{f} = f/\varphi_r$ . Dans le cas où  $\bar{f}$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_r^2$ , le ratio de vraisemblance peut s'exprimer comme une somme infinie impliquant les polynômes de la base orthonormée de cet espace. Dans le cas contraire, on ne peut conclure quant à la convergence du développement en série de Gram-Charlier vers la densité cible. Dans le cas où la condition de convergence  $\bar{f} \in \mathcal{L}_r^2$  est vérifiée,  $\bar{f}$  s'écrit :

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \check{H}_n(x), \quad \text{où } c_n = \mathbb{E} \left[ \check{H}_n(X) \right].$$

### 4.3.3 Application au problème de valorisation

Dans la version du DD-SV-LMM présentée dans l'Équation (3.9), le caractère non borné du facteur de volatilité stochastique fait nécessairement diverger le développement en série de Gram-Charlier quelle que soit la variance  $\sigma_r$  choisie pour la densité de référence. Pour pallier ce problème, il est alors proposé par [Meh21] de borner le facteur de volatilité stochastique  $V$ , en le modélisant par un processus de Jacobi, afin d'obtenir une version convergente du développement en série de Gram-Charlier de la densité du taux *swap* à terme. Il est alors proposé d'utiliser la dynamique suivante pour modéliser la volatilité stochastique  $V$  dans le DD-SV-LMM :

$$dV(t) = [\kappa\theta - (\kappa + \epsilon\xi_0^S(t)) V(t)] dt + \epsilon\sqrt{Q(V(t))} dW_t^S, \quad \text{où } Q(v) = \frac{(v_{max} - v)v}{v_{max}}.$$

Cette nouvelle formulation assure que le processus  $V(t)$  reste borné, c'est-à-dire qu'à toute date  $t$  :  $\mathbb{P}(V(t) \in [0, v_{max}]) = 1$ . Le processus de Jacobi ayant une dynamique différente du CIR, il s'agit d'une approximation supplémentaire formulée sur le DD-SV-LMM. Le processus de Jacobi converge vers le processus CIR à mesure que la borne supérieure  $v_{max}$  augmente comme démontré par [AFP17]. La condition de convergence pour la série de Gram-Charlier dans un espace de Hilbert approchant la densité  $f_{T_m}$  du taux *swap* à terme s'écrit alors :

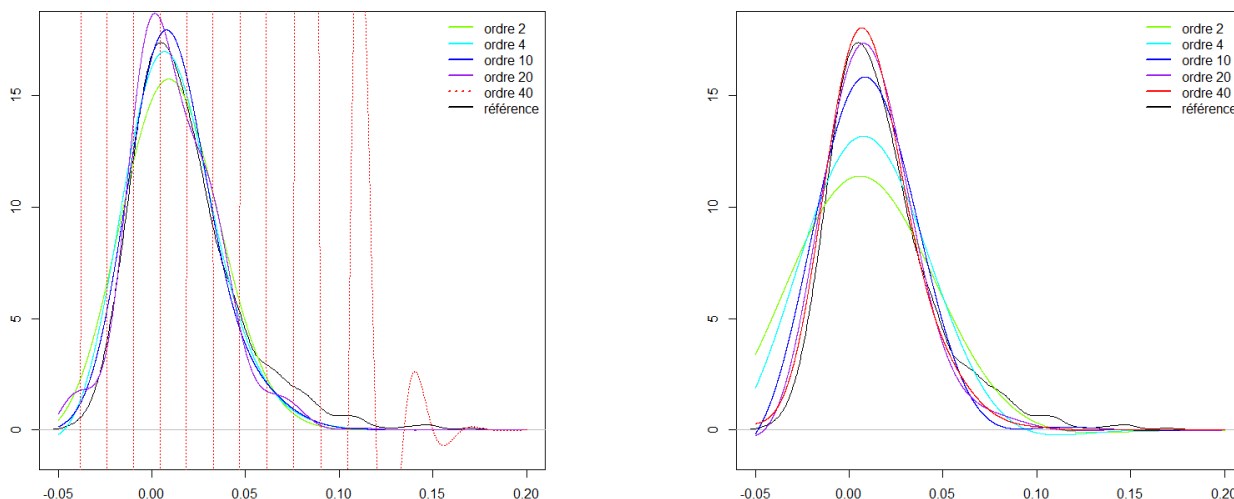
$$\sigma_r^2 > \frac{T v_{max}}{2} \lambda_{max}^2, \quad \text{où } \lambda_{max}^2 = \max_{t \leq T_m} \left\| \sum_{i=m}^{n-1} \omega_i(0) \gamma_i(t) \right\|^2. \quad (4.8)$$

En prenant comme variable d'intérêt le taux *swap*  $S_{m,n}(T_m)$ , deux formulations du développement en série de Gram-Charlier sont proposées :

- la formulation usuelle du DD-SV-LMM avec une volatilité stochastique CIR est conservée, la variance de la loi gaussienne de référence  $\varphi_r$  est fixée à  $\sigma_r = \alpha \times \sqrt{\text{Var}[S_{m,n}(T_m)]}$ , ce paramétrage est qualifié d'*ajusté* ;
- cette variante s'appuie sur la formulation du DD-SV-LMM avec une volatilité stochastique de Jacobi, la variance de la loi gaussienne de référence  $\varphi_r$  est fixée à  $\sigma_r = \varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2}T v_{max} \lambda_{max}^2}$ , ce paramétrage est qualifié de *convergent*. En effet l'ajout d'une constante  $\varepsilon \geq 0$  assure le respect de la Condition (4.8).

Dans les deux cas l'espérance de la loi gaussienne de référence est fixée à  $\mu_r = S_{m,n}(0)$ , des observations empiriques conduisent à choisir  $\alpha = 1.2$  pour la première version du développement en série de Gram-Charlier,  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $v_{max} = 5$  pour la seconde. L'illustration suivante permet de comparer les deux formulations, pour la densité à terme du taux *swap* de maturité 10 ans et de ténor 10 ans obtenue par la méthode de Monte-Carlo à partir de 3000 simulations avec le paramétrage suivant du DD-SV-LMM :

$$\Theta = (a, b, c, d, \kappa, \theta, \varepsilon, \rho, \delta) = (0.08, 0.002, 0.07, 0.03, 0.1, 0.5, 0.3, 0.9, 0.1).$$



(a) Version ajustée du développement en série de Gram-Charlier.

(b) Version convergente du développement en série de Gram-Charlier.

FIGURE 4.2 – Développements en série de Gram-Charlier du taux *swap* 10Y/10Y à différents ordres.

Fondé sur le choix d'une variance  $\sigma_r^2$  proche de la variance de la densité cible, le paramétrage *ajusté* permet une bonne adéquation de la série de Gram-Charlier à la densité de référence aux premiers ordres mais fait preuve d'instabilité aux ordres plus élevés. A l'inverse, le paramétrage *convergent* permet de respecter la Condition (4.8) afin d'assurer la convergence de la série de Gram-Charlier. Celle-ci est stable numériquement même aux ordres élevés mais nécessite d'être calculée jusqu'à un ordre suffisamment élevé pour avoir une approximation satisfaisante.

Une fois la densité du taux *swap* à terme exprimée sous la forme d'une loi gaussienne perturbée par une série polynomiale, il est possible de dériver des formules analytiques pour le prix des swaptions. En posant  $\eta(x) = (x - K)^+$ , où  $K$  est le prix d'exercice de l'option, la fonction de rémunération de l'option et en injectant la densité approchée dans la formule intégrale de calcul de l'espérance, le prix

de la swaption s'écrit :

$$\begin{aligned} PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) &= B_{m,n}^S(0) \int_{\mathbb{R}} \eta(s) f_{T_m}(s) ds, \\ &\approx B_{m,n}^S(0) \int_{\mathbb{R}} \eta(s) f_{T_m}^N(s) ds, \\ &= B_{m,n}^S(0) \sum_{p=0}^N \eta_p h_p, \end{aligned}$$

avec :

$$\eta_p = \langle \eta(x), \check{H}_p(x) \rangle_{\mathcal{L}_r^2}, \quad \text{et} \quad h_p = \langle \bar{f}_{T_m}(x), \check{H}_p(x) \rangle_{\mathcal{L}_r^2}.$$

Les calculs détaillés en Annexe C.3 mènent à la formule suivante pour le prix de Gram-Charlier :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \left\{ \left( \sigma_r \varphi \left( \frac{\mu_r - K}{\sigma_r} \right) + (\mu_r - K) \Phi \left( \frac{\mu_r - K}{\sigma_r} \right) \right) + \sum_{p=2}^N \eta_p h_p \right\}, \quad (4.9)$$

avec :

$$\begin{cases} \eta_p &= \frac{\sigma_r^2}{\sqrt{p(p-1)}} \check{H}_{p-2}(K) \varphi_r(K), \\ h_p &= \frac{1}{\sqrt{p!}} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \frac{(-1)^k p!}{2^k k! (p-2k)!} \frac{m_{p-2k}}{(\sigma_r)^{p-2k}}, \quad \text{où} \quad m_i = \mathbb{E} \left[ (S_{m,n}(T_m) - \mu_r)^i \right]. \end{cases}$$

Le calcul de  $h_p$  nécessite le calcul des moments de la distribution du taux *swap* à terme jusqu'à l'ordre  $p$ . Les moments d'ordre inférieur ou égal à 4 peuvent être calculés à l'aide de formules semi-fermées proposées par [DABB17] et dérivées de la fonction caractéristique dans le cas où la volatilité stochastique suit un processus CIR. Il est nécessaire pour obtenir les moments d'ordre supérieur de recourir à une exponentiation matricielle applicable quel que soit le processus retenu pour modéliser la volatilité stochastique. Le calcul des moments par exponentiation matricielle dans le cas où la volatilité stochastique suit un processus de Jacobi est détaillé dans [Meh21]. Ce recours est un frein conséquent à l'emploi de la méthode *convergente* puisqu'en effet pour une matrice de taille  $N$  l'algorithme utilisé pour cette opération, extrait de [EIG], a une complexité de l'ordre de  $20N^3$  et la matrice nécessaire au calcul des moments d'ordre inférieurs ou égal à  $p$  est de taille  $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ . Globalement, le calcul des moments jusqu'à l'ordre  $p$  a une complexité en  $O(p^6)$ .

## 4.4 Développement en série de Fourier

La thèse [Fan10] propose d'utiliser le lien entre densité et fonction caractéristique pour effectuer des développements en série de Fourier en cosinus sur la fonction de densité du prix des actifs. La densité  $f_{T_m}$  peut être approchée par une somme pondérée de fonctions sinusoïdales dont les poids dépendent de la fonction caractéristique de  $S_{m,n}(T_m)$ .

### 4.4.1 Approximation de densité par développement en série de Fourier

Toute fonction périodique intégrable sur une période peut-être approchée par un développement en série de Fourier, se définissant comme une somme pondérée de fonctions sinusoïdales. Une fonction  $f(x)$  est dite à support compact s'il existe un intervalle  $[a, b]$  tel que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \notin [a, b]$ . En considérant une telle fonction  $f(x)$  comme une unique période d'une fonction  $\pi$ -périodique, il est alors possible d'approcher  $f(x)$  par une série de Fourier définie par :

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\theta), \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt.$$

Ce résultat se généralise simplement à toute fonction à support compact  $[a, b]$  par un changement de variable linéaire :

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(k\pi \frac{t-a}{b-a}\right) dt. \quad (4.10)$$

Comme indiqué précédemment, un développement en série de Fourier en cosinus peut être effectué sur toute fonction à support compact. Or, dans la problématique de valorisation des swaptions au centre de ce mémoire, la densité du taux *swap* à terme est définie sur  $\mathbb{R}$ . C'est pourquoi il est proposé de réaliser le développement en série de Fourier à la restriction de  $f_{T_m}$  à un certain intervalle  $[a, b]$  borné, notée  $f_{T_m}^{[a,b]}$ , tel quel réalisé dans [Fan10] pour la valorisation de dérivés sur actions. Cette méthode revient à approcher  $f_{T_m}$  par sa restriction  $f_{T_m}^{[a,b]}$  ce qui pose la question du choix des réels  $a$  et  $b$ . Comme pour le développement en série de Gram-Charlier, il est aussi nécessaire de tronquer la série à un ordre fini  $N \in \mathbb{N}$  afin d'obtenir une expression exploitable numériquement. La série tronquée à l'ordre  $N$  est notée  $f_{T_m}^{[a,b],N}$ .

Afin d'obtenir une bonne approximation de la densité du taux *swap* à terme,  $a$  et  $b$  doivent être choisis de telle sorte à ce que l'intégrale de  $f_{T_m}$  soit négligeable sur les intervalles  $(-\infty, a]$  et  $[b, +\infty)$ , ce qui nécessite que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{T_m}(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{T_m}(x) = 0$ . Autrement dit, on doit avoir  $\mathbb{P}(S_{m,n}(T_m) \leq a) \approx 0$  et  $\mathbb{P}(S_{m,n}(T_m) \geq b) \approx 0$ . Le respect de cette condition assure que :

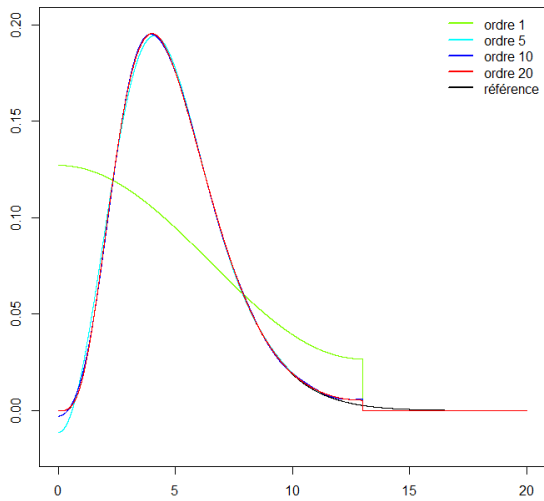
- la distribution du taux *swap* à terme peut être approchée par une fonction à support fini sans perdre trop d'information sur les queues de distribution ;
- la transformée de Fourier de la fonction à approcher (c'est-à-dire la densité restreinte au compact  $[a, b]$ ) est proche de la transformée de Fourier de la fonction de densité cible, à savoir :

$$\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-izt} dt \approx \int_a^b f(t) e^{-izt} dt$$

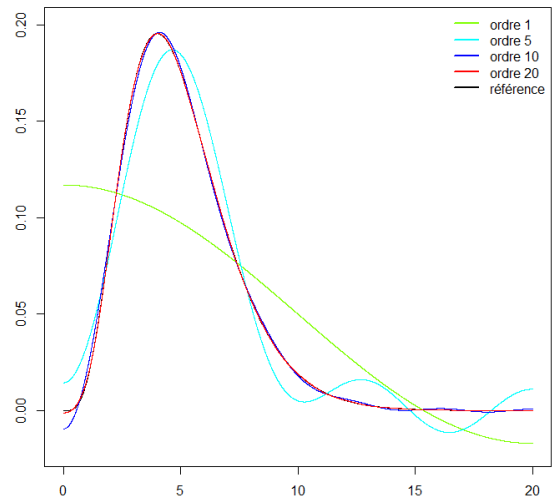
En supposant qu'un tel intervalle existe, un développement en série de Fourier peut être effectué pour une densité  $f$  quelconque en appliquant les coefficients  $A_k$  suivants :

$$A_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \phi(z) \left( \frac{k\pi}{b-a} \right) \exp \left( -i \frac{ka\pi}{b-a} \right) \right\}.$$

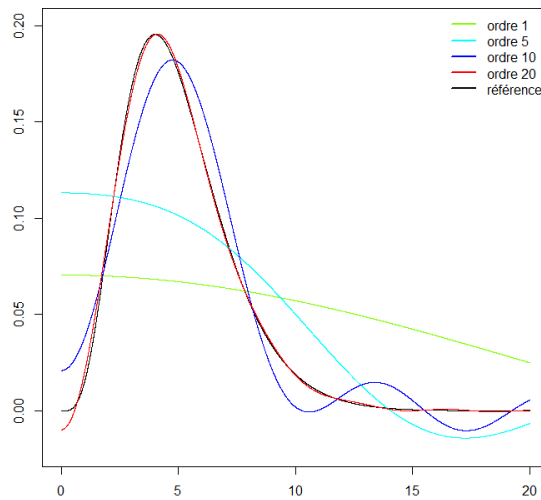
Un premier exemple est donné sur une loi Gamma ayant un paramètre de forme égal à 5 et de paramètre d'échelle égal à 1, cette loi étant à support sur  $[0, +\infty)$ . Le but est d'approcher la restriction à un intervalle  $[a, b]$  de la densité de cette loi par une série de Fourier puis de comparer ces approximations à la densité exacte de la loi Gamma. Il est naturel de fixer la borne inférieure  $a$  à 0. La Figure 4.3 présente des séries de Fourier obtenues avec différentes valeurs de borne supérieure  $b$  prise égale à 15 (Figure 4.3a), 20 (Figure 4.3b) ou 40 (Figure 4.3a). Dans chaque cas, on observe une bonne convergence des séries de Fourier vers la densité cible. Cette convergence est d'autant plus rapide que l'intervalle d'approximation  $[a, b]$  est étroit. Un intervalle d'approximation trop étroit peut cependant conduire à une mauvaise estimation de la queue de la distribution, comme dans le cas où la valeur de la borne supérieure est fixée à 15.



(a) Approximation en série cosinus d'une loi  $\gamma(5, 1)$  avec  $b = 15$  jusqu'à l'ordre 20.



(b) Approximation en série cosinus d'une loi  $\gamma(5, 1)$  avec  $b = 20$  jusqu'à l'ordre 20.



(c) Approximation en série cosinus d'une loi  $\gamma(5, 1)$  avec  $b = 40$  jusqu'à l'ordre 20.

FIGURE 4.3 – Développements en série de Fourier d'une loi Gamma sur différents intervalles.

Le choix de l'intervalle d'approximation est un facteur déterminant pour la convergence du développement en série de Fourier en cosinus, aussi bien en terme de qualité qu'en terme de rythme convergence. Choisir un intervalle trop court peut mener à négliger les queues de distributions potentiellement épaisses tandis que le choix d'un intervalle trop étendu peut aboutir à une convergence inutilement lente.

La détermination d'un intervalle  $[a, b]$  optimal est un problème qui fait toujours l'objet de recherches (voir [JP21]). Par la suite, l'intervalle proposé dans [Fan10], construit à partir des cumulants de la distribution sera utilisé :

$$[a, b] = \left[ \xi_1 - L\sqrt{\xi_2 + \sqrt{\xi_4}}, \xi_1 + L\sqrt{\xi_2 + \sqrt{\xi_4}} \right], \quad (4.11)$$

avec  $L = 10$  et  $\xi_i$  le cumulant d'ordre  $i$ .

#### 4.4.2 Application au problème de valorisation

Le développement en série de Fourier sera à présent appliqué dans le contexte de la valorisation des swaptions. La Formule (4.10) sera donc appliquée à la densité du taux *swap* tel que modélisé dans le DD-SV-LMM, en faisant l'hypothèse que cette densité peut être approchée de manière suffisamment précise par une fonction à support compact. Le choix de l'intervalle définissant cette approximation sera effectué selon la discussion qui conclut le paragraphe précédent. La densité du taux *swap* à terme exprimée sous la forme d'une série de Fourier en cosinus est alors intégrée par rapport à la fonction de rémunération de l'option. Comme indiqué dans l'introduction de la section, la méthode du développement en série de Fourier (désignée par la suite sous le nom de méthode DSF) peut être utilisée aussi bien en paradigme normal qu'en paradigme log-normal.

##### Cas normal

Sous ce paradigme, la densité du taux *swap* à terme développée en série de Fourier en cosinus fait intervenir la fonction caractéristique de  $S_{m,n}(T_m)$ ,  $\Psi_{T_m}(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [e^{zS_{m,n}(T_m)}]$ . Le prix de la swaption est calculé en intégrant la fonction de rémunération de l'option contre la densité approchée grâce au développement en série de Fourier. Il s'agit donc, à proprement parler, d'un prix de swaption *approché* qui est donné par :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \int_a^b (u - K)^+ f_{T_m}^N(u) du.$$

Cette intégrale peut être explicitée analytiquement (le détail des calculs est donné en Annexe C.4) :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \left( \frac{(b-k)^2}{2(b-a)} + \sum_{k=1}^N A_k V_k \right), \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{cases} A_k &= \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \Psi_{T_m}(z) \left( \frac{k\pi}{b-a} \right) \exp \left( -i \frac{ka\pi}{b-a} \right) \right\}, \\ V_k &= \left( \frac{b-a}{k\pi} \right)^2 \left( (-1)^k - \cos \left( k\pi \frac{K-a}{b-a} \right) \right). \end{cases}$$

##### Cas log-normal

La fonction caractéristique de  $S_{m,n}(T_m)$  n'est pas disponible en paradigme log-normal, la formule de valorisation des swaptions doit donc être dérivée de  $\Phi_{T_m}^K(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ e^{z \log \frac{S_{m,n}(T_m)}{K}} \right]$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . La fonction de rémunération de l'option est modifiée pour être définie en fonction du logarithme du prix relatif au prix d'exercice de l'option :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) K \int_a^b (e^y - 1)^+ f_K^N(y) dy,$$

avec :

$$y = \log \left( \frac{S_{m,n}(T_m)}{K} \right), \quad \text{et } f_K^N \text{ la densité de } y.$$

La formule finale issue des calculs menés en Annexe C.4 est :

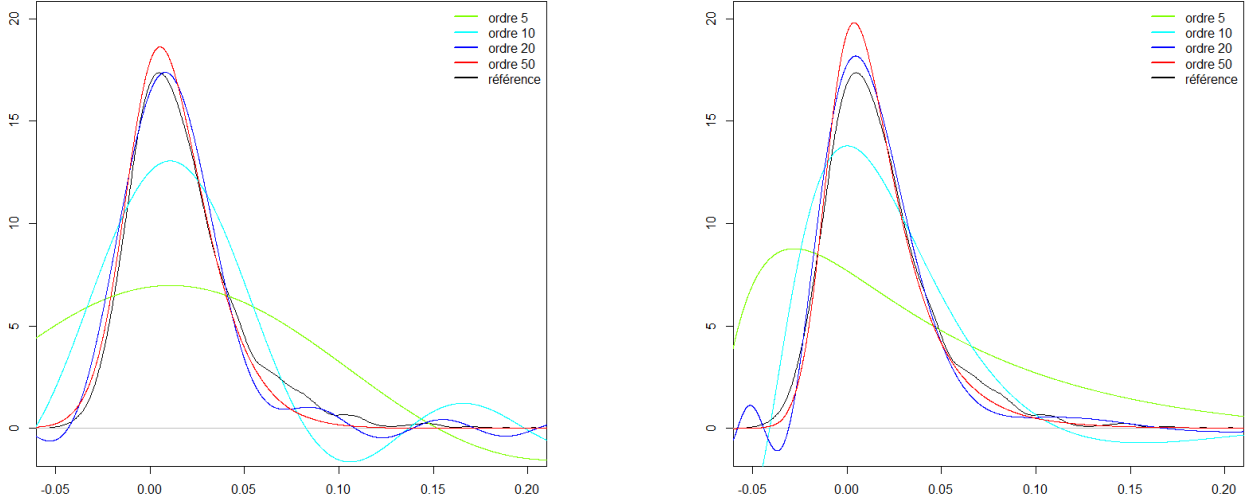
$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) K \left( \left( \frac{e^b - b - 1}{2(b-a)} \right) + \sum_{k=1}^N A_k V_k \right), \quad (4.13)$$

avec :

$$\begin{cases} A_k &= \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \Phi_{T_m}^K(z) \left( \frac{k\pi}{b-a} \right) \exp \left( -i \frac{ka\pi}{b-a} \right) \right\}, \\ V_k &= \frac{1}{1 + (k\pi/(b-a))^2} \left( (-1)^k e^b - \cos \left( -k\pi \frac{a}{b-a} \right) + \frac{b-a}{k\pi} \sin \left( -k\pi \frac{a}{b-a} \right) \right). \end{cases}$$

L'approximation de la densité du taux *swap* à terme sera illustrée par un cas d'étude portant sur la représentation de la densité du taux *swap* de maturité 10 ans et de ténor 10 ans. Cette densité sera approchée sur l'intervalle défini par l'Équation (4.11) avec le paramétrage suivant du DD-SV-LMM :

$$\Theta = (a, b, c, d, \kappa, \theta, \epsilon, \rho, \delta) = (0.08, 0.002, 0.07, 0.03, 0.1, 0.5, 0.3, 0.9, 0.1).$$



(a) Développement en série de cosinus dans le cadre normal jusqu'à l'ordre 50.

(b) Développement en série de cosinus dans le cadre log-normal jusqu'à l'ordre 50.

FIGURE 4.4 – Développements en série de Fourier du taux *swap* 10Y/10Y.

Dans les deux cas la densité approchée par développement en série de Fourier semble rester stable aux ordres élevés, contrairement à ce qui a été observé dans certains cas de développement en série de Gram-Charlier.

L'intérêt de travailler sur un intervalle pertinent est d'accélérer fortement la convergence, comme illustré numériquement ci-dessous. L'expérience est la suivante : étant donné un jeu de paramètres du DD-SV-LMM, 258 swaptions sont valorisées d'une part en utilisant la formule méthode dite de référence de Heston en paradigme normal définie par l'Équation (4.2) et, d'autre part, en utilisant un développement en série de Fourier tel que présenté dans l'Équation (4.12). Pour cette seconde méthode, deux paramétrages ont été testés : d'abord avec un intervalle unique fixé arbitrairement à  $[-1, 1]$  puis avec l'intervalle défini dans l'Équation (4.11). Les instruments valorisés sont des swaptions ATM, pour lesquelles la maturité est dans l'ensemble  $\{1, \dots, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30\}$  et le ténor dans l'ensemble  $\{1, \dots, 10, 15, 20, 25, 30\}$ . Ainsi que des swaption AFM, pour lesquelles le ténor est fixé à 10 ans, la maturité est dans le même ensemble et le prix d'exercice (en bps par rapport à la monnaie) est dans l'ensemble  $\{-200, -150, -100, -50, -25, 25, 50, 100, 150, 200\}$ . Les swaptions AFM de prix d'exercice  $-200$  bps et de maturité 1, 2, 3, 20, 25 et 30 ans ne sont pas disponibles.

Dans la Figure 4.5, l'ordre du développement est représenté en abscisse, le logarithme de la somme des écarts au carré entre les prix obtenus par expansion de Fourier et les prix issus de la méthode de référence dite de Heston est représenté en ordonnée. Le paramétrage du DD-SV-LMM utilisé est toujours le suivant :

$$\Theta = (a, b, c, d, \kappa, \theta, \epsilon, \rho, \delta) = (0.08, 0.002, 0.07, 0.03, 0.1, 0.5, 0.3, 0.9, 0.1).$$



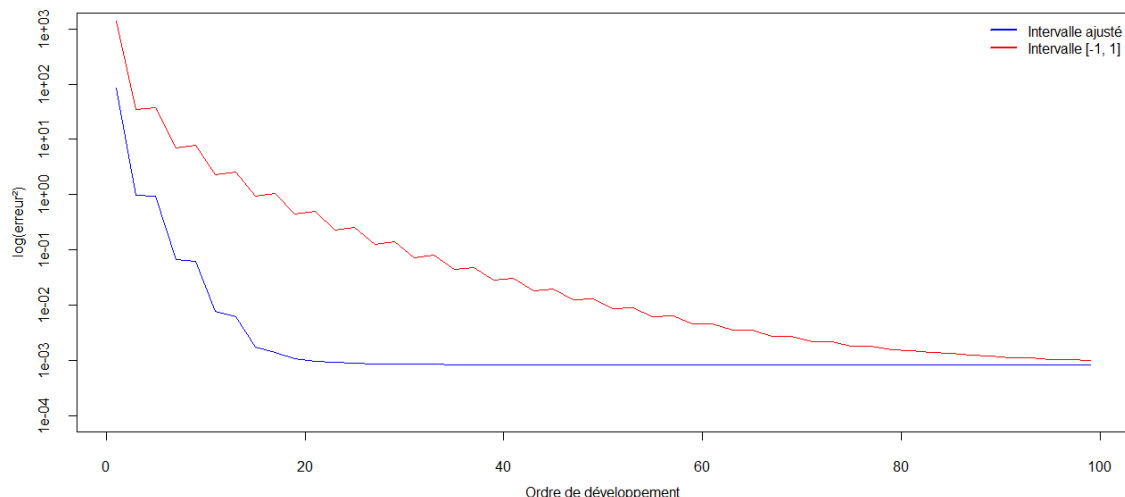


FIGURE 4.5 – Convergence de la méthode DSF suivant l’intervalle d’approximation.

Quel que soit l’intervalle utilisé, l’écart entre les prix obtenus par développement en série de Fourier et les prix issus de la méthode de référence dite de Heston décroît de manière exponentielle. Cependant la décroissance est beaucoup plus rapide lorsque l’intervalle utilisé est celui défini dans l’Équation (4.11).

## 4.5 Comparaison des temps de calcul

L’objectif premier de ce mémoire est d’étudier des méthodes rapides et précises de valorisation des swaptions. Ce chapitre sera donc conclu par une comparaison des temps de calcul induits par chacune des méthodes présentées. Les résultats numériques ont été générés en utilisant un code C++ interfacé avec R 4.1.0, la machine utilisée dispose d’un processeur AMD Ryzen 7 5700U. Partant d’un jeu de paramètres fixé, le même ensemble de 258 swaptions défini précédemment a été valorisé 10 000 fois en utilisant chaque méthode, le temps de calcul moyen est renseigné dans le tableau suivant.

Méthode	Temps de calcul (ms)
Heston log-normal (4.2)	15.2
Heston normal (4.4)	19.6
Transformée de Fourier (4.5)	9.14
Gram-Charlier formule fermée ordre 4 (4.9)	1.69
Gram-Charlier matrice ordre 4 (4.9)	6.76
Gram-Charlier matrice ordre 6 (4.9)	20.9
DSF normal ordre 30 (4.12)	3.51
DSF normal ordre 50 (4.12)	6.40
DSF log-normal ordre 30 (4.13)	3.51
DSF log-normal ordre 50 (4.13)	5.82

TABLE 4.1 – Temps de calcul des différentes méthodes.

L’emploi de la méthode utilisant la transformée de Fourier procure à elle seule une accélération de l’ordre de 40% en prenant le temps issu de la méthode Heston en paradigme log-normal comme standard. Comme attendu, le temps de calcul du développement en série de Gram-Charlier avec moments calculés par exponentiation matricielle dépasse vite celui de la méthode de référence même si à l’ordre 4 cette alternative reste plus rapide de 56% environ par rapport à la référence. Une grande partie du temps de calcul étant induit par le recours à l’exponentiation matricielle, utiliser une formule fermée

pour calculer les moments d'ordre inférieur ou égal à 4 de la distribution du taux *swap* à terme permet d'obtenir un gain de temps de 89%, ce qui constitue la méthode la plus rapide de l'étude comparative. Le DSF procure lui aussi un gain de temps non négligeable avec une accélération de 77% par rapport à la méthode de référence pour un développement à l'ordre 30.

Dans la suite de l'étude, l'appellation « Gram-Charlier » désignera la méthode de Gram-Charlier à l'ordre 4 avec moment calculés par formule fermée et les appellations « DSF normal » et « DSF log-normal » feront référence aux méthodes de développement en série de Fourier calculées à l'ordre 30.

# Chapitre 5

## Calibrage du DD-SV-LMM

### Préambule

Comme discuté dans les chapitres précédents, un GSE *risque-neutre et market-consistent* est tenu de produire des scénarios économiques cohérents avec les données de marché actuelles. Le calibrage est le processus visant à ajuster les paramètres des différents modèles financiers composant le GSE afin que ceux-ci induisent des prix proches de ceux observés sur le marché. Après avoir brièvement présenté les données utilisées et la méthode sous-jacente, des calibrages seront effectués en utilisant les méthodes de valorisation sous DD-SV-LMM des swaptions présentées dans le chapitre précédent.

### 5.1 Méthodologie utilisée pour le calibrage

#### 5.1.1 Données utilisées

Les données de marché sont un élément central de l'utilisation d'un GSE. En effet celles-ci vont influencer le calibrage et donc les scénarios économiques produits. Dans le cas d'un modèle de la courbe des taux d'intérêt, l'information de marché associée consiste en une courbe des taux sans risque et un cube de volatilité de swaptions issu du marché. Sous la réglementation Solvabilité II, la courbe des taux utilisée n'est pas à proprement parler une courbe de marché : il s'agit en effet d'une courbe réglementaire fournie par l'EIOPA qui est déduite des taux de marché et subit des ajustements présentés en Section 1.2.2. Les swaptions sont généralement retenues comme instruments de calibrage par les acteurs du marché de l'assurance, l'appellation « cube de volatilité » est utilisée car trois dimensions sont utilisées pour définir une swaption : sa maturité, son ténor et son prix d'exercice. Ces instruments sont réputés permettre de capturer la loi jointe entre les taux forward de différentes maturités et couvrir une période cohérente avec la durée d'un contrat d'assurance vie, de l'ordre de plusieurs dizaines d'années. Si les données utilisées pour construire les courbes de marché doivent strictement satisfaire au critère DLT évoqué dans la Section 1.2.2, les volatilités de swaptions sont récupérées à l'aide d'un fournisseur de données de marché assurant leur fiabilité à l'aide de critères différents.

Afin d'évaluer la robustesse des méthodes de calibrage, celles-ci ont été appliquées à plusieurs conditions de marché. Trois zones économiques (États-Unis, Grande-Bretagne, Union Européenne) ont été étudiées à cinq dates (31/12/2019, 31/03/2020, 31/12/2020, 21/12/2021, 31/03/2022), donnant ainsi un total de quinze jeux de données différents correspondant à des niveaux et structures variés du cube de volatilité. Certaines de ces dates coïncident avec des bouleversements économiques, comme par exemple le 31/03/2020 date à laquelle l'activité économique mondiale est dans la tourmente en raison de la pandémie de Covid-19.

Comme indiqué dans la Section 2.3.2, les swaptions sont cotées sur les marchés en terme de volatilité implicite. Aux dates retenues, ces volatilités sont cotées en convention normale (formule de Bachelier). La volatilité d'une swaption de maturité  $m$  (exprimée en années), de ténor  $t$  (exprimée en années) et de prix d'exercice  $s$  (exprimé en points de base, 0.01%) est notée  $Vol_{marché}(m, t, s)$ . Pour chaque économie et chaque date, les données comprennent des swaption ATM, pour lesquelles donc  $s = 0$ ,  $m \in M = \{1, \dots, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30\}$  et  $t \in T = \{1, \dots, 10, 15, 20, 25, 30\}$ . Ainsi que des swaption AFM, pour lesquelles le ténor est fixé à 10 ans,  $m \in M = \{1, \dots, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30\}$  et  $s \in S = \{-200, -150, -100, -50, -25, 25, 50, 100, 150, 200\}$ . Les prix obtenus en injectant ces volatilités et la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA dans la formule de Bachelier seront par la suite qualifiés de « prix de marché » et notés  $Prix_{marché}(m, t, s)$ , bien qu'il s'agisse en réalité de « pseudo-prix de marché » comme indiqué dans la Remarque 2.4.

Le tableau suivant présente le niveau de volatilité moyen (en bps) observé pour chaque jeu de données économiques.

date	EUR	GBP	USD
31/12/19	51.02	57.52	59.37
31/03/20	56.13	62.26	62.59
31/12/20	47.15	54.70	58.48
31/12/21	60.50	68.30	65.56
31/03/22	73.69	82.53	82.17

TABLE 5.1 – Niveau moyen de volatilité observé aux différentes dates de calibrage testées.

Pour une date donnée, les différentes économies utilisées ont des niveaux moyens de volatilité homogènes, la proximité est encore plus flagrante pour les économies américaines et britanniques. Les structures de volatilité à la monnaie, représentées en Annexe D.2, et en dehors de la monnaie, représentées en Annexe D.3 présentent elles aussi une relative homogénéité pour une date donnée et toujours une proximité relative plus prononcée entre les économies américaines et britanniques. La diversité des structures de volatilité, tant en terme de niveau que de convexité, qui devront être captées par le DD-SV-LMM permet d'évaluer la capacité du modèle à reproduire des cubes de volatilités divers.

### 5.1.2 Fonction objectif

Le processus de calibrage consiste *in fine* à optimiser une fonction objectif mesurant l'écart entre les données de marché et les valeurs induites par le modèle. Pour une swaption de maturité  $m$ , de ténor  $t$  et de prix d'exercice  $s$ , la quantité  $Prix_{modèle}(\Theta, m, t, s)$  désigne le prix induit par le DD-SV-LMM et obtenu à l'aide d'une des formules de valorisation présentées dans le Chapitre 4. La quantité  $Vol_{modèle}(\Theta, m, t, s)$  désigne la volatilité implicite obtenue en inversant la formule de Black ou de Bachelier.

Plusieurs métriques seront utilisées dans l'objectif de mesurer l'écart entre quantités de marché et quantités de modèle, toutes présentent une forme quadratique leur procurant des propriétés de convexité utiles lors de la minimisation. La MSE (pour *Mean Squared Error*) quantifie la somme des carrés des écarts entre les valeurs de marché et les valeurs de modèle, la RMSE (pour *Relative Mean Squared Error*) quantifie quant à elle la sommes des écarts relatifs entre valeurs de modèle et valeurs de marché. Ces deux métriques peuvent s'appliquer au prix aussi bien qu'à la volatilité implicite. Le problème d'optimisation du calibrage consiste alors à résoudre l'un des programmes suivants, selon la métrique et la cotation utilisées qui sont des choix de l'utilisateur :

$$\begin{aligned}
\arg \min_{\Theta} MSE_{Prix}(\Theta) &= \sum_{\substack{m \in M, t \in T \\ s \in S}} \omega_{m,t,s} (Prix_{modèle}(\Theta, m, t, s) - Prix_{marché}(m, t, s))^2, \\
\arg \min_{\Theta} MSE_{Vol}(\Theta) &= \sum_{\substack{m \in M, t \in T \\ s \in S}} \omega_{m,t,s} (Vol_{modèle}(\Theta, m, t, s) - Vol_{marché}(m, t, s))^2, \\
\arg \min_{\Theta} RMSE_{Prix}(\Theta) &= \sum_{\substack{m \in M, t \in T \\ s \in S}} \omega_{m,t,s} \left( \frac{Prix_{modèle}(\Theta, m, t, s) - Prix_{marché}(m, t, s)}{Prix_{marché}(m, t, s)} \right)^2, \\
\arg \min_{\Theta} RMSE_{Vol}(\Theta) &= \sum_{\substack{m \in M, t \in T \\ s \in S}} \omega_{m,t,s} \left( \frac{Vol_{modèle}(\Theta, m, t, s) - Vol_{marché}(m, t, s)}{Vol_{marché}(m, t, s)} \right)^2,
\end{aligned}$$

où  $\omega_{m,t,s}$  est un poids associé à la swaption de maturité  $m$ , de ténor  $t$  et de prix d'exercice  $s$ . En pratique un poids identique et égal à l'inverse du nombre de swaptions utilisées pour le calibrage à été attribué à toutes les swaptions pour les applications numériques menées dans ce mémoire.

La résolution de ces programmes d'optimisation repose sur l'utilisation de méthodes algorithmiques, le résultat du calibrage dépend donc de l'algorithme d'optimisation choisi et de son paramétrage. Deux stratégies sont couramment envisagées pour améliorer la précision et la célérité du calibrage du DD-SV-LMM : choisir un algorithme d'optimisation offrant de meilleures propriétés de convergence ou réduire

autant que possible le temps d'appel à la fonction cible, ce qui suppose d'utiliser des méthodes de calcul du prix des swaptions efficaces numériquement. Ce mémoire se focalise sur la seconde stratégie en proposant des méthodes accélérées de valorisation des swaptions. Tous les calibrages de ce mémoire ont été réalisés à l'aide de l'algorithme de Nelder-Mead présenté en Annexe D.1.

Des calibrages ont été réalisés sur les différentes données de marché évoquées en début de chapitre, grâce aux différentes métriques évoquées au début de la présente section, et grâce aux différentes formules de valorisation des swaptions présentées dans les Chapitres 4. Un total de 360 calibrages a donc été effectué.

### 5.1.3 Choix du paradigme de volatilité

Les formules de valorisation déduites du figement spécifié par l'Équation (3.9) (resp. (3.8)) sont associées au paradigme normal (resp. log-normal). Il a été mentionné dans la Section 2.3.2 que les swaptions étaient valorisées sur le marché à l'aide de la formule de Bachelier déduite du paradigme normal. Dans ce contexte, il peut sembler incorrect de chercher à calibrer le DD-SV-LMM formulé par figement log-normal, tel que décrit dans l'Équation (3.8). Cette contradiction apparente peut être contournée en utilisant les formules de Black ou de Bachelier pour obtenir les prix et volatilités équivalentes dans le paradigme souhaité. En pratique, utiliser une fonction d'écart basée sur les prix permet de contourner cette difficulté.

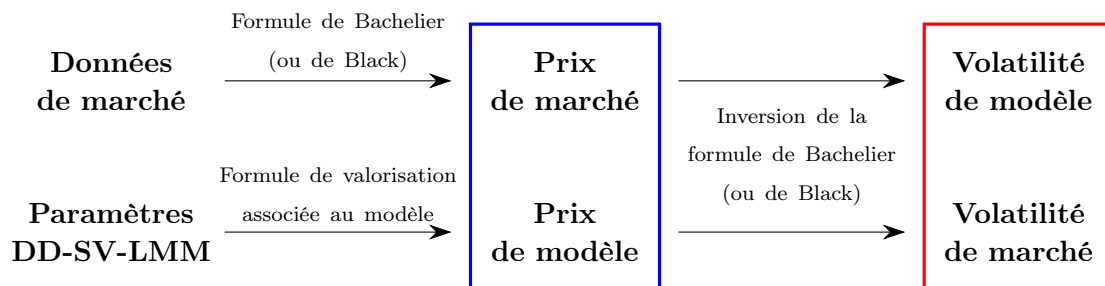


FIGURE 5.1 – Changement de paradigme de volatilité.

Cette figure décrit la méthodologie retenue pour homogénéiser les paradigmes de volatilité dans un calibrage. Les métriques d'erreur, MSE et RMSE, sont calculées entre des quantités cohérentes, encadrées en bleu et rouge.

### 5.1.4 Application d'un choc de taux

Pour le calcul du SCR associé au risque de taux en formule standard, l'approche couramment retenue est d'appliquer un choc additif sur la courbe réglementaire initiale, dont l'intensité par maturité est définie par l'EIOPA, sans pour autant modifier la volatilité de marché initiale. Des exemples de courbes choquées à la hausse et à la baisse pour l'économie européenne au 31/03/2022 sont présentées dans la Figure 5.2.

En revanche, la structure des prix de marché sur laquelle les modèles sont calibrés est altérée par la modification de la courbe initiale. En effet les prix de marché sont fonction de la courbe des taux utilisée et de la volatilité implicite cotée sur le marché, modifier la courbe des taux induit donc une modification des prix de marché à volatilités implicites invariantes.

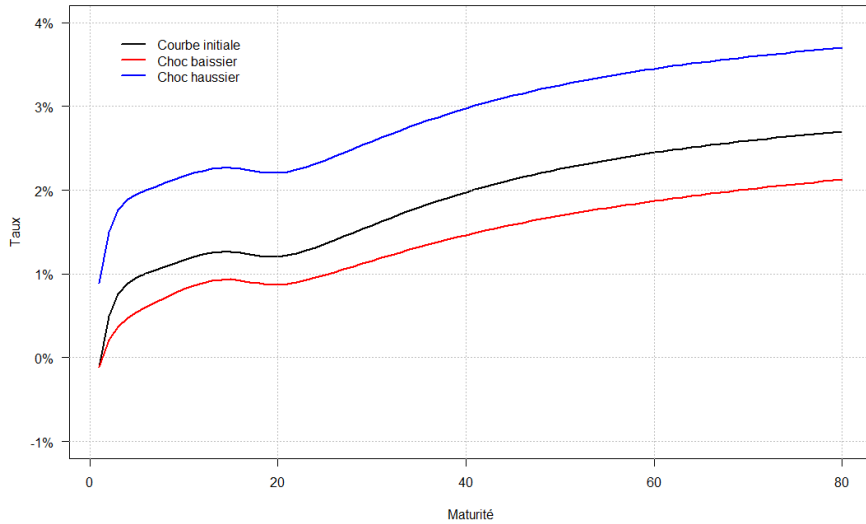
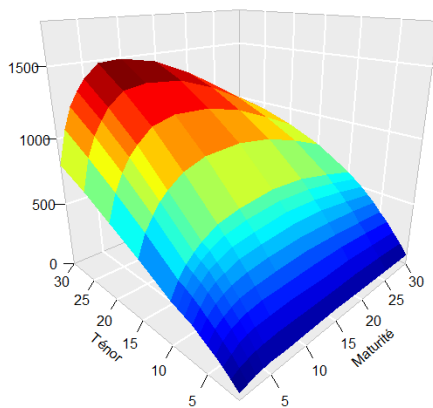
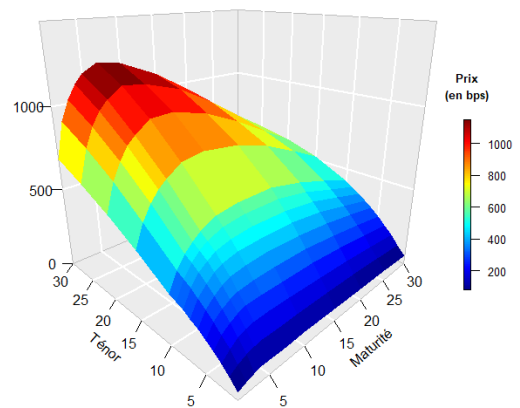


FIGURE 5.2 – Courbes zéro-coupon EIOPA choquées au 31/03/2022.

Sur la figure suivante, la surface des prix dite centrale est obtenue en convertissant les volatilités implicites de marché en prix à l'aide de la courbe EIOPA centrale (c'est-à-dire sans choc) ; la surface des prix dite choquée à la hausse est obtenue en convertissant ces mêmes volatilités en prix à l'aide de la courbe ayant subi un choc haussier, elle aussi fournie par l'EIOPA.



(a) Surface centrale.



(b) Surface choquée à la hausse.

FIGURE 5.3 – Application d'un choc de taux haussier au 31/03/2022.

Afin d'évaluer la pertinence d'un éventuel recalibrage, un test de cohérence avec les données de marché a été mené sur les données du 31/03/2022. Tout d'abord, le DD-SV-LMM a été calibré sur le scénario central. À partir de ces paramètres, des prix et volatilités implicites Monte-Carlo (correspondant à l'inverse, par la formule de Bachelier ou de Black, du prix Monte-Carlo) ont été calculés en prenant les courbes choquées comme données d'entrée. Le DD-SV-LMM a ensuite été calibré sur les scénarios choqués, puis les prix et volatilités implicites de Monte-Carlo ont été calculés sur ces paramètres recalibrés. Le fait de ne pas recalibrer le modèle provoque une perte, particulièrement visible sur les écarts de prix, de cohérence avec les données de marché. Lorsque des chocs seront appliqués, notamment lors des études ALM du chapitre suivant, le DD-SV-LMM sera recalibré sur les courbes de taux choquées.

	Choc baissier		Choc haussier	
	recalibré	non-recalibré	recalibré	non-recalibré
$MSE_{vol}$	$5.39 \cdot 10^{-7}$	$5.90 \cdot 10^{-7}$	$4.67 \cdot 10^{-7}$	$7.98 \cdot 10^{-7}$
$MSE_{prix}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$2.28 \cdot 10^{-5}$	$8.77 \cdot 10^{-6}$	$2.87 \cdot 10^{-5}$

TABLE 5.2 – Calculs des métriques d'écart sur les modèles recalibrés et non-recalibrés.

## 5.2 Validation du processus de calibrage dans un GSE

La note de l'autorité de contrôle prudentiel et de résolution [ACP20] propose, afin de valider un modèle utilisé dans un GSE risque-neutre et cohérent avec les données de marché, de recourir à des tests de martingalité pour valider le caractère risque-neutre et à des tests de re-valorisation pour valider la cohérence avec les données de marché. Cette section sera illustrée par l'évaluation du calibrage du DD-SV-LMM effectué en utilisant la méthode de valorisation dite de Heston en paradigme log-normal (Équation (4.2)) et la  $MSE_{prix}$  comme fonction objectif pour l'économie américaine au 31/03/2022.

### 5.2.1 Tests de martingalité

Le test de martingalité le plus évident, et le seul qui sera mentionné dans cette étude, consiste à étudier l'écart relatif entre l'estimateur de Monte-Carlo, à chaque pas de temps, du facteur de risque supposé être une martingale sous probabilité risque-neutre et la valeur initiale de ce même facteur de risque. Si  $M$  est un facteur de risque supposé martingale son espérance au temps  $t$  doit être égale à sa valeur initiale  $M(0)$ , cette espérance est estimée numériquement par la moyenne empirique (estimateur classique, déduit de la loi forte des grands nombres) sur les simulations. L'erreur relative au temps  $t$  s'écrit :

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N M_k(t) - M(0)}{M(0)},$$

où  $N$  est le nombre de simulations,  $M_k(t)$  est la valeur de la  $k^{\text{ème}}$  simulation au pas de temps  $t$  du facteur de risque et  $M(0)$  est sa valeur observée initiale.

Dans le cas d'un modèle de taux, la martingalité de deux quantités présente un intérêt particulier :

- Le déflateur  $D(t)$ , martingale sous probabilité risque-neutre. Théoriquement  $\mathbb{E}[D(t)] = P(0, t)$ , le test martingale est réalisé en pratique en comparant son estimateur  $\frac{1}{N} \sum_{i=k}^N D_k(t)$  au facteur d'actualisation initial  $P(0, t)$  ;
- Le prix zéro-coupon actualisé  $P(t, T)D(t)$ , sur lequel est formulée l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage à la base du développement théorique du DD-SV-LMM. Théoriquement  $\mathbb{E}[P(t, T)D(t)] = P(0, T)$ , le test martingale est réalisé en pratique en comparant son estimateur  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(t, T)D_k(t)$  à la valeur initiale  $P(0, T)$  du zéro-coupon.

Les figures suivantes représentent des tests de martingalité réalisés sur le déflateur et sur des zéro-coupons de maturité différentes, pour un calibrage effectué dans la configuration donnée précédemment. Les taux forward ont été projetés avec la dynamique exacte décrite par l'Équation (3.4) avec un pas de temps annuel sur 3000 trajectoires. Le niveau de l'intervalle de confiance empirique déduit de l'estimateur de Monte-Carlo est fixé à 95%, il est attendu qu'à certaines date le test martingale sorte de son intervalle de confiance. Les résultats sont satisfaisant pour des horizons de projection faibles, mais à mesure que l'horizon de projection augmente, le résultat du test se dégrade quelle que soit la maturité choisie.

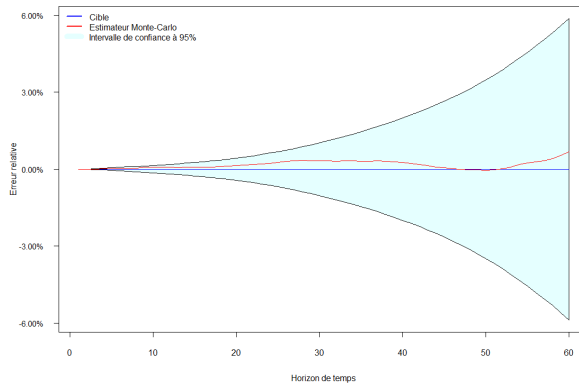
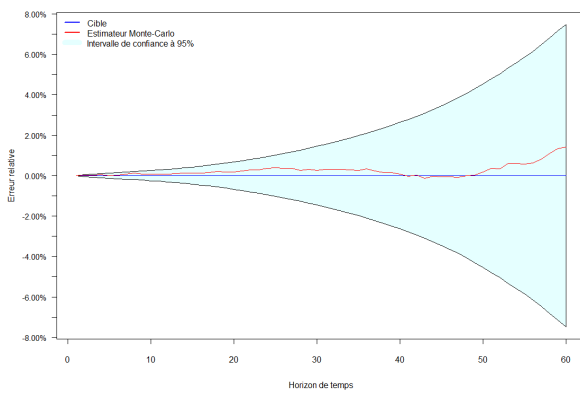
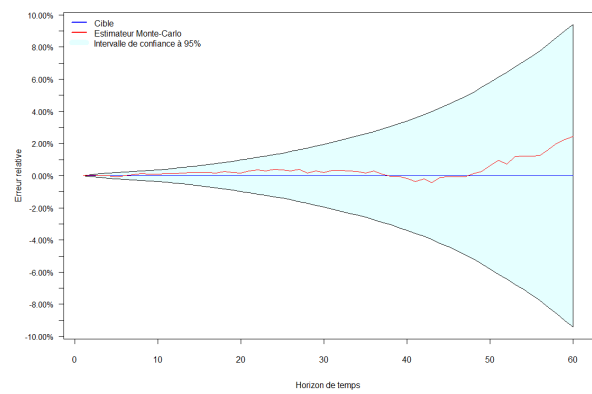


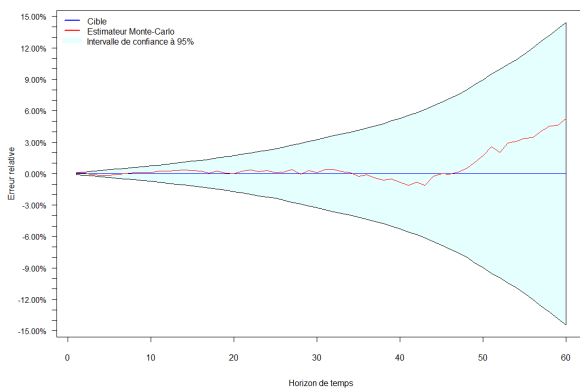
FIGURE 5.4 – Test de martingalité pour le déflateur.



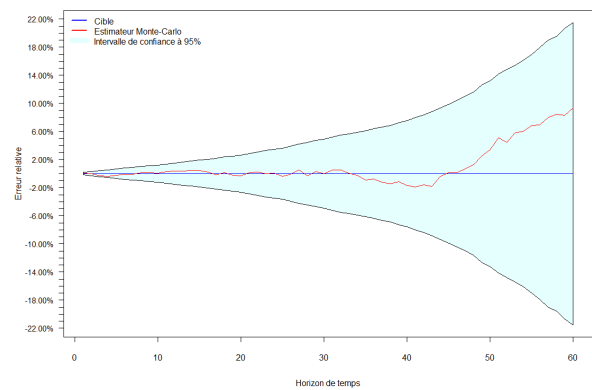
(a) Zéro-coupon de maturité  $T = 5$  ans.



(b) Zéro-coupon de maturité  $T = 10$  ans.



(c) Zéro-coupon de maturité  $T = 20$  ans.



(d) Zéro-coupon de maturité  $T = 30$  ans.

FIGURE 5.5 – Test de martingalité pour des obligations zéro-coupon.

## 5.2.2 Tests de re-valorisation

### Métrique agrégée

Le test de re-valorisation consiste à calculer les prix des swaptions utilisées pour calibrer le modèle à l'aide de l'estimateur de Monte-Carlo, qualifiés par la suite de « prix Monte-Carlo », puis à les comparer aux prix de marché. Les prix calculés à l'aide des méthodes de valorisation présentées dans le



chapitre précédent sont déduits du modèle figé présenté dans la Section 3.3, tandis que les prix Monte-Carlo sont issus de la projection des taux forward sous probabilité risque neutre avec la dynamique exacte décrite dans l'Équation (3.4). Ainsi, le processus de calibrage s'effectue à l'aide de formules de valorisation basées sur le modèle figé pour des raisons de temps de calcul. L'hypothèse de figement est validée *a posteriori* en s'assurant que les prix induits par le modèle qui repose sur cette hypothèse sont proches des prix de Monte-Carlo obtenus sans figement (mais qui portent tout de même une erreur de simulation). Un exemple issu du même environnement de calibrage que pour les tests de martingalité est fourni.

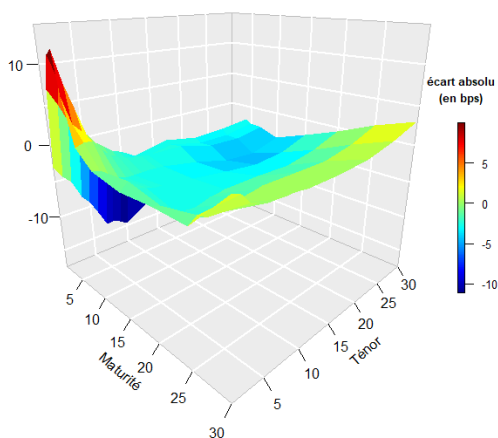
MSE entre prix de marché et de modèle	$4.35 \cdot 10^{-6}$
MSE entre prix de modèle et Monte-Carlo	$4.96 \cdot 10^{-6}$
MSE entre prix de marché et Monte-Carlo	$8.83 \cdot 10^{-6}$

TABLE 5.3 – Test de re-valorisation.

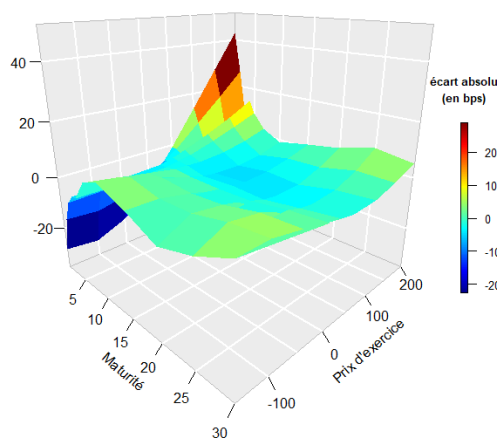
Comme attendu la MSE calculée entre des prix de marché et des swaptions valorisées à l'aide de la méthode de Monte-Carlo produit un résultat sensiblement différent de la MSE calculée entre des prix de marché et des swaptions valorisées à l'aide de la méthode de Heston, cet écart est dû notamment à l'hypothèse de figement. Les méthodes de valorisation des swaptions intègrent des hypothèses supplémentaires (comme par exemple la troncature de la série pour le développement en série de Gram-Charlier ou le développement en série de Fourier). La différence entre ces deux quantités reste cependant acceptable.

### Structure de volatilité

Généralement, on vérifie les écarts moyens entre grandeurs de marché, grandeurs de modèle et grandeurs de Monte-Carlo pour valider les tables de scénarios économiques. La validation du calibrage peut être étoffée en analysant les différences entre la structure de volatilité de marché et la structure de volatilité déduite des prix Monte-Carlo. La distance entre les quantités de marché et les quantités simulées (qui sont en pratique utilisées pour construire une table de scénarios économiques) est le critère final permettant de valider le calibrage d'un GSE. Cet écart peut se décomposer comme la somme de l'écart entre quantités de marché et quantités modèles d'une part et l'écart entre quantités modèles et quantités Monte-Carlo d'autre part. Le deuxième type d'erreur est généralement plus faible que l'erreur de calibrage.



(a) Ecarts de volatilité pour des swaptions à la monnaie.



(b) Ecarts de volatilité pour des swaptions en dehors de la monnaie.

FIGURE 5.6 – Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités Monte-Carlo.

Sur la Figure 5.6, les écarts de volatilité à la monnaie comme en dehors de la monnaie sont plus importants pour des swaptions de maturité inférieure à 10 ans. Entre les volatilités de marché et les volatilités Monte-Carlo l'écart relatif moyen est de 5.1%, pour un maximum de 37.7% atteint sur la swaption de maturité 1 ans, de ténor 10 ans et de prix d'exercice -100 bps. L'écart absolu moyen est de 5.15 bps pour un maximum de 40.16 bps atteint sur la swaption de maturité 1 ans, de ténor 10 ans et de prix d'exercice +200 bps.

## 5.3 Résultats numériques

### 5.3.1 Résultats agrégés

#### Fonction objectif retenue

Pour l'ensemble des calibrages effectués, les quatre métriques d'écart ont été calculées d'une part sur les valeurs de modèle et d'autre part sur les « valeurs Monte-Carlo » ou valeurs obtenues par simulation. Les tableaux représentés en Annexe D.4 regroupent ces résultats. Si la  $RMSE_{Vol}$  semble être uniformément moins performante que les trois autres métriques quelle que soit la méthode de valorisation utilisée, il est difficile de départager de la sorte les trois autres métriques. Les différentes fonctions objectif semblent permettre d'obtenir des calibrages comparables avec des erreurs de *market-consistency* relativement uniformes quelle que soit la méthode de valorisation des swaptions utilisée. Ainsi, le choix de la fonction objectif peut se faire relativement indépendamment du paradigme de volatilité et de la méthode de valorisation utilisée.

Sélectionner une unique fonction objectif, base commune sur laquelle les différentes méthodes de valorisation seront comparées, est délicat et sujet à caution. Après avoir exclu la  $RMSE_{Vol}$  pour ses moindres performances, la  $MSE_{Vol}$  a elle aussi été mise de côté pour des raisons de temps de calcul. En effet les formules de valorisation des swaptions produisent des prix qui doivent être convertis en volatilités à l'aide de la formule de Black ou de Bachelier à chaque itération de l'algorithme d'optimisation, induisant ainsi un coût supplémentaire. La métrique retenue comme référence de cette étude est la  $MSE_{prix}$ .

#### Performances par méthode de valorisation

Le tableau suivant recense les performances des calibrages effectués avec les différentes formules de valorisation des swaptions en minimisant la  $MSE_{prix}$ . Pour chaque calibrage, la  $MSE_{prix}$  est aussi calculée entre les prix de marché et les prix Monte-Carlo. Ces valeurs sont agrégées en moyenne dans le Tableau 5.4 sur les quinze jeux de données économiques pour chaque méthode de valorisation. Les sigles « H. LN » et « H. N » font respectivement référence aux méthodes dites de Heston en paradigme log-normal (Équation (4.2)) et normal (Équation (4.4)), le sigle « FFT » fait référence à la méthode de transformée de Fourier (Équation (4.5)), le sigle « G.-C. E » désigne la méthode du développement en série de Gram-Charlier (Équation (4.9)), enfin les sigles « DSF LN » et « DSF N » font respectivement référence aux méthodes de développement en série de Fourier en paradigme log-normal (Équation (4.13)) et normal (Équation (4.12)).

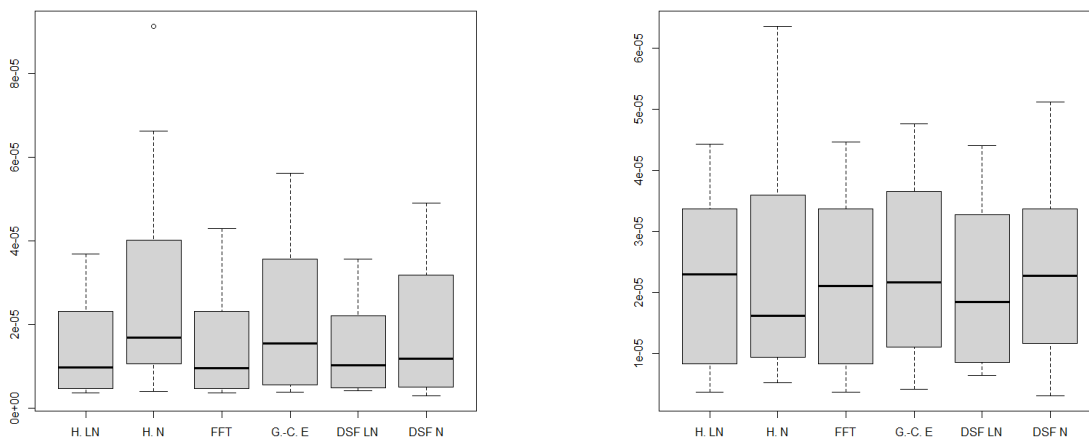
Méthode	Marché vs. Théorique	Théorique vs. Monte-Carlo	Marché vs. Monte-Carlo
<b>H. LN</b>	$2.98 \cdot 10^{-5}$	$5.98 \cdot 10^{-6}$	$3.61 \cdot 10^{-5}$
<b>H. N</b>	$5.13 \cdot 10^{-5}$	$8.42 \cdot 10^{-6}$	$3.69 \cdot 10^{-5}$
<b>FFT</b>	$2.99 \cdot 10^{-5}$	$5.93 \cdot 10^{-6}$	$3.62 \cdot 10^{-5}$
<b>G.-C. E</b>	$4.07 \cdot 10^{-5}$	$8.11 \cdot 10^{-6}$	$3.69 \cdot 10^{-5}$
<b>DSF LN</b>	$2.94 \cdot 10^{-5}$	$6.48 \cdot 10^{-6}$	$3.68 \cdot 10^{-5}$
<b>DSF N</b>	$3.75 \cdot 10^{-5}$	$8.44 \cdot 10^{-6}$	$3.74 \cdot 10^{-5}$

TABLE 5.4 –  $MSE_{prix}$  sur les valeurs de modèle et les valeurs Monte-Carlo.

La méthode de Heston reposant sur le paradigme normal semble fournir de moins bons résultats que les autres méthodes en terme d'écart entre les prix de marché et les prix théoriques. Les différences

de performance observées entre les méthodes de valorisation des swaptions sont moins importantes lorsque les prix de marché sont comparés aux prix Monte-Carlo. Il est à noter que pour les méthodes associées au paradigme normal, de manière surprenante au premier abord, les valeurs Monte-Carlo sont en moyenne plus proches des valeurs de marché que ne le sont les valeurs théoriques. Les erreurs de calibrage (marché vs. théorique) et de *market consistency* (marché vs. Monte-Carlo) sont acceptables pour toutes les méthodes de valorisation. Ces formules offrent suffisamment de degrés de liberté pour permettre une reproduction satisfaisante des données de marché sur les trajectoires simulées.

La Figure 5.7 permet d'évaluer la dispersion des deux métriques sur quatorze des quinze calibrages réalisés, les données GBP au 31/03/2020 ayant été évincées du graphique pour plus de lisibilité car présentant des valeurs atypique. Les diagrammes en boîtes confirment les observations formulées à l'aide de l'indicateur agrégé, les écarts entre les valeurs de marché et les valeurs de modèle se sont à nouveau révélés plus importants pour les formules de valorisations issues du paradigme normal. En terme d'écarts entre les valeurs de marché et les valeurs Monte-Carlo, toutes les méthodes offrent des résultats similaires.

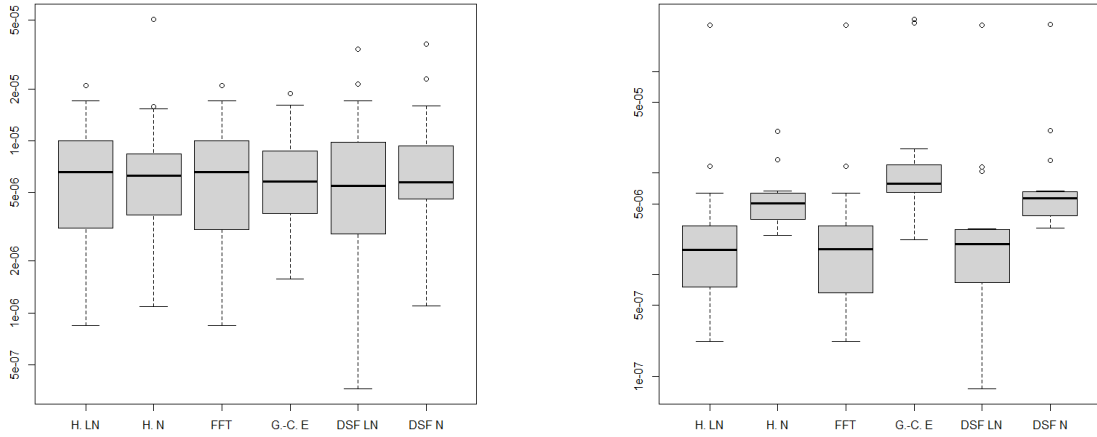


(a)  $MSE_{prix}$  marché vs. modèle pour chaque formule de valorisation.

(b)  $MSE_{prix}$  marché vs. Monte-Carlo pour chaque formule de valorisation.

FIGURE 5.7 – Diagrammes en boîtes des métriques étudiées.

Pour tenter d'expliquer le fait que la différence observée entre les méthodes associées au paradigme normal et celles associées au paradigme log-normal en comparant les prix de marché aux prix de modèle s'estompe lorsque les prix de marché sont comparés aux prix Monte-Carlo, les écarts entre les prix de modèle et les prix Monte-Carlo seront étudiée plus en détail. La  $MSE_{prix}$  entre les valeurs de modèle et les valeurs Monte-Carlo a été calculée séparément sur les swaptions ATM et AFM pour chaque méthode et chaque calibrage. Les diagrammes en boîtes des valeurs obtenues pour chaque méthode sur l'ensemble des quinze calibrages sont représentés ci-dessous. Pour les méthodes formulées dans les deux paradigme, les versions associées au paradigme normal semblent légèrement plus performantes en terme de dispersion que leur pendant log-normal pour des swaptions à la monnaie. En revanche, il apparaît très clairement que les méthodes de valorisation associées au paradigme normal sont moins performantes pour estimer le prix des swaptions en dehors de la monnaie.



(a)  $MSE_{prix}$  modèle vs. Monte-Carlo sur les swaptions ATM pour chaque formule de valorisation.

(b)  $MSE_{prix}$  modèle vs. Monte-Carlo sur les swaptions AFM pour chaque formule de valorisation.

FIGURE 5.8 – Diagrammes en boîtes des écarts entre les prix théoriques et les prix Monte-Carlo ATM et AFM.

Cependant, ces métriques agrégées ne donnent qu’une vision partielle de la manière dont la surface de volatilité est captée par le calibrage. Les différentes méthodes seront évaluées plus en détail sur un cas d’étude particulier, à savoir un calibrage effectué en prenant comme donnée d’entrée l’économie européenne en date du 31/03/2022 et effectué en minimisant la  $MSE_{prix}$  comme fonction objectif. La méthode FFT, produisant des résultats très proches de la méthode de référence, sera laissée de côté dans la suite de l’étude. Seules les méthode de Heston en paradigme normal, de développement en série de Gram-Charlier, de DSF en paradigme normal et log-normal seront donc étudiées plus en détail.

### 5.3.2 Cas d’étude : paramètres optimaux

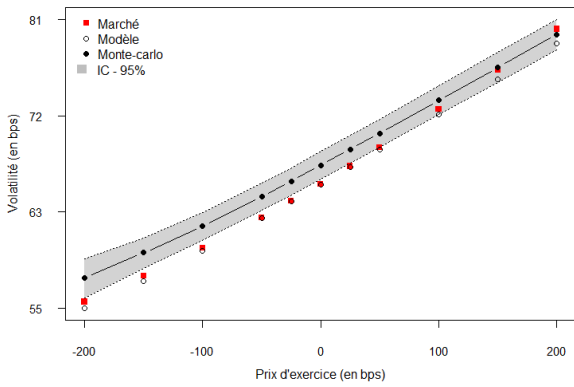
Le tableau suivant recense les paramètres du DD-SV-LMM obtenus à l’issu du calibrage pour chaque méthode, le déplacement  $\delta$  des taux forward ayant été fixé à 0.10. Les différentes formules de valorisation des swaptions mènent à des paramètres d’ordre de grandeur similaires.

Méthode	a	b	c	d	$\kappa$	$\theta$	$\epsilon$	$\rho$	$\delta$
<b>H. LN</b>	0.0834	0.0089	0.0689	0.0014	0.2574	0.3606	0.4307	0.9972	0.10
<b>H. N</b>	0.0921	0.0061	0.0596	0.0000	0.2122	0.3809	0.3964	0.9790	0.10
<b>G.-C. E</b>	0.0852	0.0092	0.07023	0.0000	0.2499	0.3820	0.4369	0.9937	0.10
<b>DSF LN</b>	0.0871	0.0073	0.0636	0.0002	0.2153	0.3705	0.3993	0.9836	0.10
<b>DSF N</b>	0.0866	0.0078	0.0655	0.0004	0.2182	0.3765	0.4054	0.9963	0.10

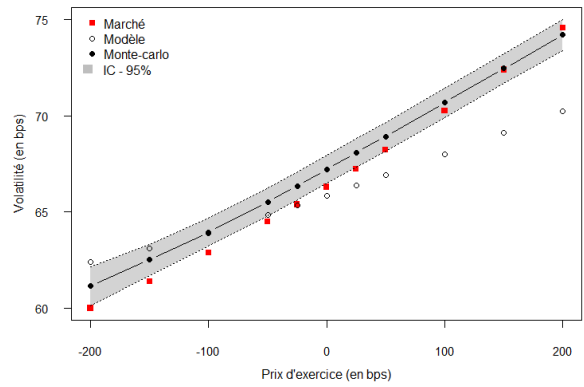
TABLE 5.5 – Paramètres du DD-SV-LMM calibrés sur l’économie européenne au 31/03/2022.

### 5.3.3 Cas d’étude : *smile* de volatilité

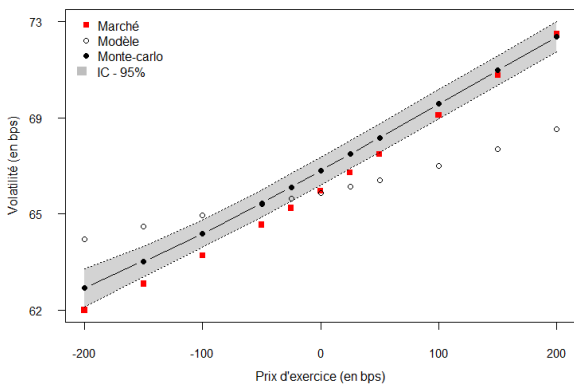
Les écarts entre la structure de volatilité de marché et la structure de volatilité implicite issue des prix Monte-Carlo sont représentés en Figure 5.6 pour la méthode de Heston en paradigme log-normal, et en Annexe D.5 pour les méthodes de Heston en paradigme normal, de développement en série de Gram-Charlier et de DSF en paradigme normal et log-normal. Comme la stabilité des paramètres calibrés pouvait le suggérer, les écarts entre la structure de volatilité de marché et la structure de volatilité implicite issue des prix Monte-Carlo ont des structures très semblables pour les différentes méthodes.



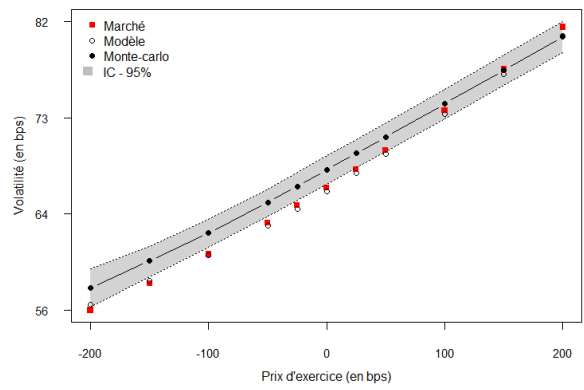
(a) Méthode de Heston en paradigme log-normal.



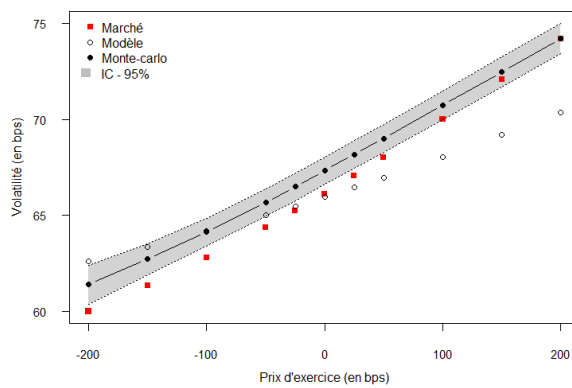
(b) Méthode de Heston en paradigme normal.



(c) Méthode de Gram-Charlier.



(d) Méthode du DSF en paradigme log-normal.



(e) Méthode du DSF en paradigme normal.

FIGURE 5.9 – Smiles de volatilité pour des swaptions 10Y/10Y.

Les figures précédentes représentent des coupes de la surface de volatilité en dehors de la monnaie pour des swaptions de maturité et de ténor égaux à 10 ans. Les volatilités de marché, volatilités de modèle et volatilités Monte-Carlo avec intervalle de confiance empirique à 95% sont représentés en fonction du prix d'exercice. L'observation de ces graphiques éclaire la moindre performance des modèles dérivés du paradigme normal en terme d'erreur entre les prix de marché et les prix modèle. En effet l'ajout d'un paramètre de décalage  $\delta$  dans un paradigme normal n'apporte pas sur les prix théoriques la pente qu'il induit en paradigme log-normal sur la structure de volatilité.

## 5.4 Conclusions

### 5.4.1 Gain en temps de calcul

Le tableau suivant expose le temps moyen de calibrage, calculé sur les quinze jeux de données économiques, et confirme les observations formulées dans la Section 4.5. Le développement en série de Gram-Charlier est à nouveau la méthode de calibrage la plus rapide, suivie par les deux versions du développement en série de Fourier, la transformée de Fourier accélérée et enfin les deux versions de la méthode dite de Heston.

Méthode	Temps de calibrage (secondes)
Heston log-normal	21.5
Heston normal	24.1
Transformée de Fourier	13.1
Gram-Charlier	3.84
DSF normal	8.11
DSF log-normal	6.01

TABLE 5.6 – Temps de calibrage des différentes méthodes.

### 5.4.2 Cohérence avec les données de marché

Si en dernier lieu le critère retenu pour l'évaluation de la cohérence avec les données de marché d'un calibrage est la distance entre les valeurs de marché et les valeurs Monte-Carlo obtenues après simulation du modèle calibré, une étude plus précise peut être menée en décomposant cette erreur. En plus de cette première métrique, l'écart entre les prix de marché et les prix de modèle permet d'évaluer la capacité du modèle à reproduire avec précision les données de marché, et l'écart entre les prix de modèle et les prix Monte-Carlo mesure la cohérence de la fonction objectif à minimiser lors du calibrage. Il est raisonnable de penser que les prix de modèle doivent être proches des prix Monte-Carlo, afin qu'une minimisation de l'écart entre les prix de marché et les premiers induisent une minimisation de l'écart entre les prix de marché et les seconds. L'erreur de simulation due à la discrétisation du modèle ainsi qu'aux hypothèses de figement est généralement, mais pas systématiquement, faible devant l'erreur de calibrage.

Les méthodes dérivées du paradigme normal ont montré une faiblesse en comparaison du cadre log-normal en terme d'écart entre les prix de modèle et les prix Monte-Carlo, portée par une erreur sur la valorisation des swaptions AFM. Cependant cette faiblesse ne semble pas se répercuter trop lourdement sur la cohérence entre les prix de marché et les prix Monte-Carlo étant donné que toutes les formules de valorisation satisfont de manière équivalente à ce critère, indépendamment du paradigme de volatilité. Afin d'évaluer l'impact du choix de la méthode de calibrage sur la valorisation économique d'un portefeuille d'assurance, les scénarios économiques produits par la simulation du modèle calibré seront par la suite utilisés comme données d'entrée du modèle ALM présenté dans le chapitre suivant.

# Chapitre 6

## Modélisation ALM

### Préambule

Une fois les modèles financiers calibrés, un GSE est utilisé pour simuler conjointement les différents facteurs de risque modélisés sous la probabilité risque-neutre. Ces simulations forment une partie des données d'entrée des modèles ALM (pour *Assets and Liabilities Management*) utilisés notamment pour valoriser les portefeuilles d'assurance vie en modélisant le comportement du portefeuille de la compagnie d'assurance dans les différentes conditions économiques simulées et dans un cadre réglementaire donné. Le modèle ALM utilisé dans cette étude et les différentes hypothèses de modélisation sous-jacentes seront présentés.

### 6.1 Cadre général du modèle ALM

Dans un contrat d'assurance vie placé sur un fonds euros, un assuré confie son épargne à un assureur chargé de protéger et de faire fructifier son capital selon une politique de revalorisation dépendante aussi bien des garanties contractuelles que de la situation économique et du comportement des assurés. En raison de l'optionnalité intégrée de certains produits d'assurance, l'évaluation de ces contrats ainsi que la production des indicateurs de solvabilité associés doit reposer sur une méthode simulateur de type Monte-Carlo dans laquelle la performance des placements, la gestion de la compagnie d'assurance et le comportement des assurés sont projetés à travers la situation du bilan comptable.

Dans ce cadre de travail, deux visions du bilan d'une compagnie d'assurance coexistent, un bilan comptable d'une part et un bilan économique dérivé de la directive Solvabilité II d'autre part. Ces deux bilans et les différents postes associés sont représentés dans la figure suivante, ces deux visions du bilan seront détaillées par la suite.

<u>Actif (<math>t</math>)</u>	<u>Passif (<math>t</math>)</u>	<u>Actif (<math>t</math>)</u>	<u>Passif (<math>t</math>)</u>
$A_{cash}^{book}(t)$	PM ( $t$ )	$A_{cash}^{mkt}(t)$	VIF ( $t$ )
$A_{eq}^{book}(t)$	PPB ( $t$ )	$A_{eq}^{mkt}(t)$	BEL ( $t$ )
$A_{re}^{book}(t)$	RK ( $t$ )	$A_{re}^{mkt}(t)$	
$A_{oblig}^{book}(t)$		$A_{oblig}^{mkt}(t)$	

FIGURE 6.1 – Bilan comptable (à gauche) et économique (à droite) simplifiés.

#### 6.1.1 Bilan comptable

L'actif du bilan comptable regroupe l'ensemble des actifs financiers et immobiliers que possède la compagnie d'assurance, ceux-ci y sont inscrit en valeur nette comptable (VNC). La valeur nette comptable est calculée à partir de la valeur d'acquisition de l'actif à laquelle sont retranchés les éventuels amortissements et provisions associés à sa détention. Le passif du bilan comptable est constitué des différentes réserves représentant la dette de l'assureur envers les assurés.

#### Provision mathématique (PM)

Les provisions mathématiques représentent le montant des engagements de la compagnie d'assurance envers ses assurés. Dans le cas du modèle présenté, elles correspondent aux encours revalorisés des assurés.

### Provision pour participation aux bénéfiques (PPB)

La compagnie d'assurance est tenue de verser une partie de son résultat technique et financier aux assurés dans le cadre de la participation aux bénéfiques. La PPB (ou PPE pour participation aux excédents) permet de différer le versement de la participation aux bénéfiques d'un délai maximal de 8 ans.

### Réserve de capitalisation (RK)

La réserve de capitalisation est utilisée pour amortir les éventuelles dépréciations d'actifs auxquelles pourrait faire face la compagnie d'assurance. Elle est alimentée par les plus-values réalisées lorsqu'un actif obligataire est vendu à une valeur supérieure à sa valeur nette comptable, définie plus en détail dans la Section 6.2.2.

## 6.1.2 Bilan économique

Comme indiqué dans la Section 1.1.1, les actifs de la compagnie d'assurance sont inscrits au bilan économique en valeur de marché. Le passif sera structuré différemment par rapport au bilan prudentiel présenté dans le chapitre introductif de cette étude, il sera constitué du BEL et de la VIF. Le capital de solvabilité requis (inscrit au bilan économique présenté dans la Figure 1.2) est lié à la VIF par la formule standard du SCR. Dans cette formule standard, le SCR est calculé en appliquant une série de choc initiaux sur les projection ALM pour chaque sous-module de risque. Ces chocs induisent des écarts de VIF qui sont retenus comme SCR sous-modulaires. Ces SCR sous-modulaires sont ensuite agrégés à l'aide de matrices de corrélation en SCR modulaires, eux mêmes agrégés de manière similaire pour obtenir enfin le SCR global de la compagnie.

### Best Estimate of Liabilities (BEL)

Les exigences quantitatives du régime prudentiel solvabilité II imposent un calcul des provisions techniques des compagnies d'assurance en *best estimate*, c'est-à-dire en considérant la somme des flux futurs de trésorerie pondérés par la probabilité associée et actualisés à l'aide d'un déflateur stochastique simulé dans le générateur de scénarios économiques. Le BEL s'écrit :

$$\text{BEL} = \frac{1}{N_s} \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{N_s} D_i(0, n) \text{CF}_i^p(n),$$

où  $\text{CF}_i^p(n)$  représente l'ensemble des prestations fournies par la compagnie d'assurance en période  $n$  pour la  $i^{\text{ème}}$  simulation et  $D_i(0, n)$  est le facteur d'actualisation pour l'année  $n$  généré par la  $i^{\text{ème}}$  simulation.

### Value of In-Force (VIF)

La VIF est un indicateur de la performance du portefeuille d'assurance, elle représente le résultat espéré généré par le portefeuille pour l'assureur, son calcul repose sur une méthode analogue à celle du BEL :

$$\text{VIF} = \frac{1}{N_s} \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{N_s} D_i(0, n) \text{CF}_i^r(n),$$

avec les mêmes notations que pour le BEL et où  $\text{CF}_i^r(n)$  est le résultat financier net de la compagnie d'assurance en période  $n$  pour la  $i^{\text{ème}}$  simulation.

**Remarque.** La valorisation d'un portefeuille d'assurance ou du bilan complet d'une compagnie d'assurance vie peut être motivée par plusieurs objectifs : calculs réglementaires, études prospectives, cession de tout ou partie d'un portefeuille, etc.



### 6.1.3 Fonctionnement général de l'algorithme ALM

L'algorithme utilisé dans cette étude est un modèle simplifié permettant de décrire très brièvement les règles de gestion ALM, les modèles utilisés en réalité sont bien plus complexes et ont pour objectif de reproduire le plus fidèlement possible le fonctionnement du portefeuille modélisé. L'algorithme ALM sera divisé en cinq phases successives menées en parallèle pour les différents scénarios économiques et de manière itérative sur les années de projection. Les deux premières phases concernent l'actif du bilan. Lors de la troisième phase, le passif est décréu des prestations de mortalité. La quatrième phase est la plus complexe de l'algorithme, elle consiste pour la compagnie d'assurance à fixer le taux servi aux assurés pour la revalorisation des provisions mathématiques. La dernière étape consiste à faire vieillir d'un an les contrats modélisés et de leur appliquer des rachats structurels et conjoncturels. La figure suivante expose de manière synthétique le fonctionnement du moteur ALM.

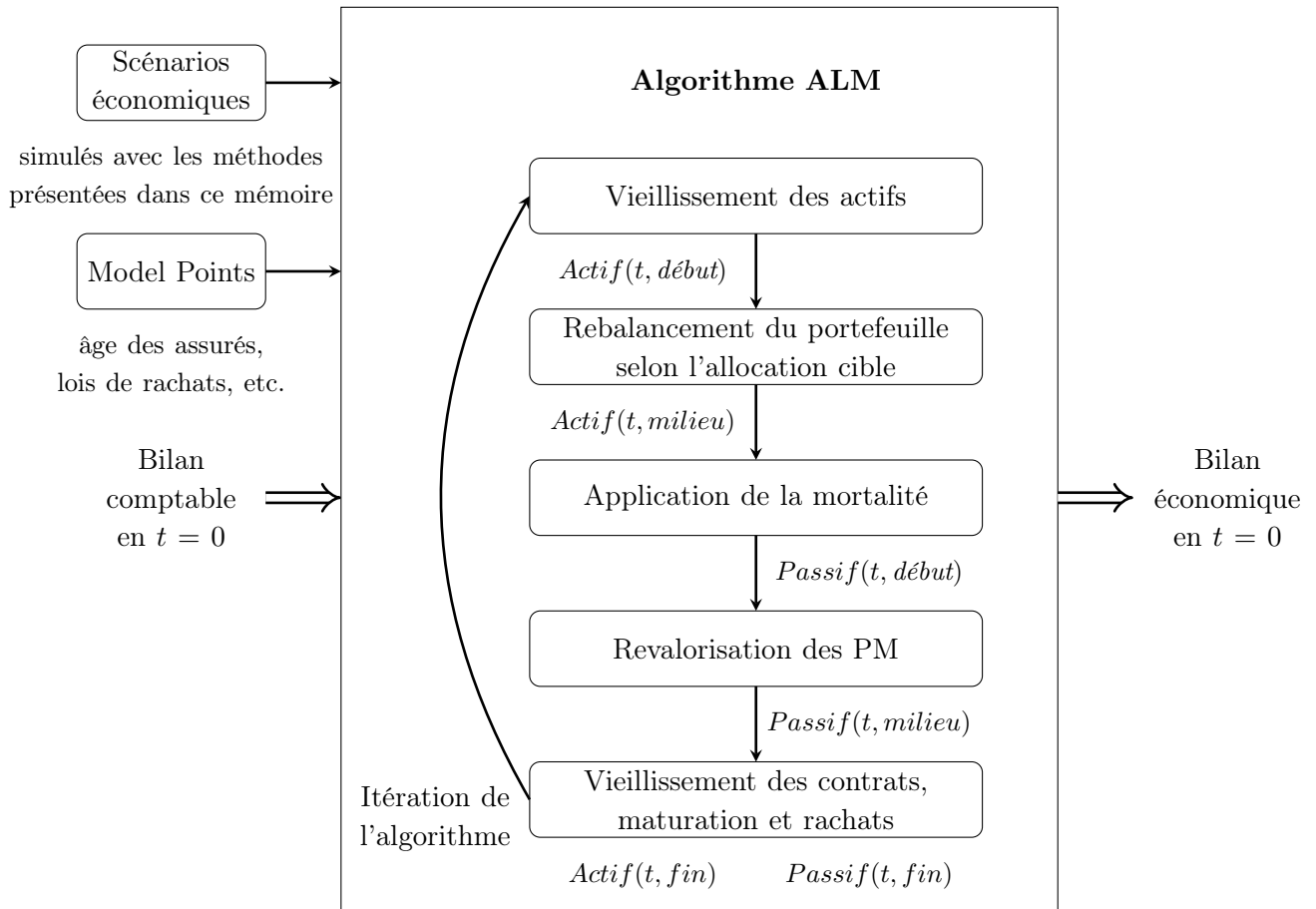


FIGURE 6.2 – Schéma de principe de l'algorithme ALM.

## 6.2 Modélisation de l'actif

Les hypothèses initiales sont les suivantes : les actifs sont supposés infiniment divisibles, le marché est liquide et sans coût de transaction. La compagnie d'assurance conserve une allocation d'actifs cible constante au cours de la projection et procède à la ré-allocation de son portefeuille d'actifs au début de chaque itération de l'algorithme.

Les valeurs comptables (VC) et de marché (VM) par unité de nominal ainsi que les nominaux associés sont répartis en couches selon l'ancienneté de l'actif considéré. Pour la trésorerie la VM est égale à la VC et reste constante au cours de la projection, une unique couche sera donc suffisante pour modéliser cette classe d'actif. La VM des indices actions et immobilier évolue chaque année et la VC de ces actifs est égale à leur VM à l'année d'acquisition. Lors de la  $N^{ième}$  année de projection, il faut donc disposer de  $N + 1$  couches pour stocker la VC par unité de nominal et le nominal associé. Les obligations sont elles aussi réparties en couches, à chaque itération de l'algorithme

une nouvelle couche est ajoutée avec une VC et une VM égale à 1 et un coupon au pair déterminé à l'aide de la courbe des taux. Lors de la  $N^{ième}$  année de projection, il faut donc disposer de  $N +$  le nombre d'obligation distinctes en portefeuille en  $t = 0$  couches, pour les obligations.

### 6.2.1 Trésorerie

#### Vieillessement de la trésorerie

La trésorerie est capitalisée chaque année au taux sans risque dérivé du zéro-coupon de maturité 1 an. Soit  $A_{cash}^{book}(t, fin)$  la valeur comptable de la trésorerie détenue par la compagnie d'assurance à la fin de l'année de projection  $t$ , la valeur  $A_{cash}^{book}(t + 1, début)$  détenue l'année suivante se décompose comme suit :

$$A_{cash}^{book}(t + 1, début) = A_{cash}^{book}(t, fin) + I_{cash}(t) + I_{oblig}(t),$$

où  $I_{cash}(t)$  est résultat financier généré par la trésorerie égal à  $A_{cash}^{book}(t, fin) \times \left( \frac{1}{P(t, t + 1)} - 1 \right)$ , et  $I_{oblig}(t)$  l'encaissement des coupons associés aux obligations.

### 6.2.2 Obligations

#### Produits modélisés

Le risque de taux est modélisé à l'aide du DD-SV-LMM au centre de cette étude. A chaque pas de temps, la courbe des taux zéro-coupons jusqu'à une maturité de 30 ans est déduite de la projection des taux forward sous probabilité risque-neutre suivant l'Équation de diffusion (3.5). Les actifs échangés sur le marché des taux sont des obligations à taux fixe émises au pair de maturité égale à 15 ans. Connaissant la courbe des taux initiale, le coupon  $c$  associé à une obligation de maturité  $M$  s'écrit :

$$c = \frac{1 - P(0, M)}{\sum_{i=1}^M P(0, i)}, \quad \text{ou bien} \quad c = 1 - (1 + r_a(t))^{-1},$$

avec  $r_a(t)$  le taux de rendement actuariel de l'obligation au temps  $t$ . La valeur de marché inscrite au bilan prudentiel au temps  $t$  d'une obligation de nominal  $N$  versant un coupon  $c \times N$  et dont le temps restant à maturité est  $T$  vaut :

$$VM(t) = \sum_{i=t+1}^T cNP(t, i) + NP(t, T).$$

La valeur nette comptable d'une telle obligation est :

$$VC(t) = \sum_{i=t+1}^T cN(1 + r_a(t))^{-(i-t)} + N(1 + r_a(t))^{-(T-t)}.$$

Par définition du taux de rendement actuariel, la valeur nette comptable est constante au cours du temps et égale à 1.

#### Vieillessement des actifs obligataires

Comme indiqué précédemment la valeur comptable des obligations est constante au cours du temps. En revanche la trésorerie augmente d'un montant  $I_{oblig}(t)$ , correspondant à la somme de la valeur des coupons multipliée par le nominal associé à chaque obligation que possède la compagnie d'assurance :

$$I_{oblig}(t) = \sum c_i \times N_i,$$

où  $c_i$  est le coupon de la  $i^{ième}$  obligation détenue en portefeuille et  $N_i$  le nominal de cette même obligation.

### 6.2.3 Actions et immobilier

#### Produits modélisés

Les indices action et immobilier sont modélisés de manière similaire à l'aide d'un modèle de Black-Scholes à volatilité déterministe par terme, brièvement présenté en Annexe E.1. Les produits (fictifs) disponibles sur le marché des actions ou bien de l'immobilier sont des parts de l'indice correspondant.

#### Vieillessement des actions et de l'immobilier

Ces actifs sont inscrits au bilan comptable à leur valeur d'achat, l'indice modélisé n'inclut pas de dividendes et le vieillissement du portefeuille action et immobilier de la compagnie d'assurance modélisée ne génère pas de produits financiers en lui même.

### 6.2.4 Rebalancement du portefeuille

Le modèle ALM utilisé fait l'hypothèse d'une unique allocation d'actifs cible, définie sur les actifs en valeur de marché et constante au cours de la projection. La phase de rebalancement, advenant en deuxième position dans la Figure 6.2, est consécutive à la phase de vieillissement des actifs et vise à réajuster les placements de la compagnie d'assurance afin qu'ils correspondent à l'allocation d'actif cible. Une nouvelle couche est créée pour les classes d'actifs organisées en plusieurs couches et le montant à investir ou désinvestir est défini pour chaque classe.

Dans le cas d'une vente, les couches d'actifs sont vidées de la plus ancienne à la plus récente. Les plus ou moins-values éventuelles réalisées sur les actions ou l'immobilier sont intégrées au résultat financier, les plus ou moins-values éventuelles réalisées sur les obligations sont intégrées à la réserve de capitalisation. Dans le cas où celle-ci serait vide, les moins-values seraient entièrement supportées par l'assureur. Soit  $VM_{actif}$  la valeur de marché de l'actif concerné après vieillissement des actifs,  $VM_{cible}$  la valeur de marché à atteindre et  $N_{actif}$  le nominal de l'actif concerné.

Si  $VM_{actif} \geq VM_{cible}$  la quantité d'actif vendue  $N_{vente}$  s'écrit :

$$N_{vente} = N_{actif} - \frac{N_{actif} \times VM_{cible}}{VM_{actif}}.$$

Si  $VM_{actif} \leq VM_{cible}$  la quantité d'actif achetée  $N_{achat}$  s'écrit :

$$N_{achat} = \frac{N_{actif} \times VM_{cible}}{VM_{actif}} - N_{actif}.$$

Au cours de la phase de rebalancement de la  $t^{ème}$  itération de l'algorithme, la vente de parts de l'indice action et immobilier génère des produits financiers  $I_{eq}(t)$  et  $I_{re}(t)$ . À l'issue de la phase de rebalancement, le résultat financiers de la compagnie d'assurance est la somme des intérêts de la trésorerie, des coupons perçus et des plus-values réalisées en vendant des actions ou de l'immobilier :

$$I_{fin}(t) = I_{cash}(t) + I_{oblig}(t) + I_{eq}(t) + I_{re}(t).$$

## 6.3 Modélisation du passif

Un *model point* peut se définir comme un groupe d'assurés partageant des caractéristiques communes. Ces caractéristiques peuvent par exemple être utilisées pour définir un *model point* : le TMG contractuel ou le taux de prélèvement des frais de gestion, les caractéristique des assurés peuvent être leur âge, leur ancienneté dans le contrat ou encore la loi utilisée pour modéliser leur comportement de rachats structurels et conjoncturels. La granularité du *model point* est d'autant plus importante que le nombre de caractéristiques considérées est important. Un unique *model point* a été défini lors de chaque simulation ALM pour les études menées dans ce mémoire.

### 6.3.1 Mortalité

Un taux de mortalité déterministe est appliqué à chaque itération de l'algorithme avant la revalorisation des provisions mathématiques, il est extrait de la table de mortalité réglementaire « TGH-05 », utilisée pour les contrats d'assurance vie (à l'exception des rentes viagères). Les taux de mortalité utilisés dans les études ALM menées dans ce mémoire sont renseignés en Annexe E.2.

### 6.3.2 Revalorisation des provisions mathématiques

Placée sur un fonds en euros, l'épargne des assurés est garantie par la compagnie d'assurance et revalorisée chaque année en appliquant un taux de revalorisation dépendant du TMG et du résultat financier de l'assureur. La compagnie d'assurance est tenue de reverser au moins 85% des produits financiers réalisés à ces derniers, ce procédé est appelé participation aux bénéfices. Un taux de chargement contractuel est prélevé chaque année par la compagnie d'assurance sur les encours de ses assurés afin de couvrir ses frais opérationnels. Dans un environnement économique compétitif, la compagnie d'assurance peut choisir de verser un taux supérieur au taux minimal fixé par la réglementation, dans le but de limiter les rachats conjoncturels.

Le taux de revalorisation cible  $r_{cible}$  que la compagnie d'assurance cherchera à atteindre pour son fonds en euros est fixé par l'algorithme ALM de la sorte :

- le taux de revalorisation  $r_{bonus} = \frac{PPE(8ans)}{PM}$  correspond au taux de revalorisation induit par la distribution de la part de la PPB dotée 8 ans plus tôt et arrivant à échéance ;
- le taux de revalorisation  $r_{min} = TMG + r_{bonus}$  correspond au taux de revalorisation minimal contractuel que devra fournir la compagnie d'assurance à ses assurés quelle que soit la performance de ses placements ;
- le taux de revalorisation  $r_{PB} = 85\% \times r_{perf} \times r_{engt}$  correspond au taux additionnel généré par la participation aux bénéfices, avec  $r_{perf}$  le rendement de l'actif de l'assureur défini comme :

$$r_{perf} = \frac{I_{fin}(t)}{A^{book}(t-1, fin)}.$$

Et  $r_{engt}$  le ratio des engagements défini par :

$$r_{engt} = \frac{PM(t, début) + RK(t, début) + PPB(t, début)}{PM(t, début)}.$$

- Le taux de revalorisation garanti  $r_{gar} = \max(r_{PB}, TMG) + r_{bonus}$  correspond au taux que la compagnie d'assurance est tenue de verser à ses assurés dans le cadre de ses obligations contractuelles ;
- Le taux de revalorisation final  $r_{final} = \max(r_{min}, r_{cible})$  est le taux que la compagnie d'assurance cherchera à verser à ses assurés afin d'éviter d'éventuels rachats conjoncturels.  $r_{cible}$  est le taux de revalorisation en deçà duquel des rachats conjoncturels auront lieu.

En fonction de la performance des placements de la compagnie d'assurance, la politique de revalorisation de la provision mathématique nette des prestations de mortalité est représentée sur la Figure 6.3.

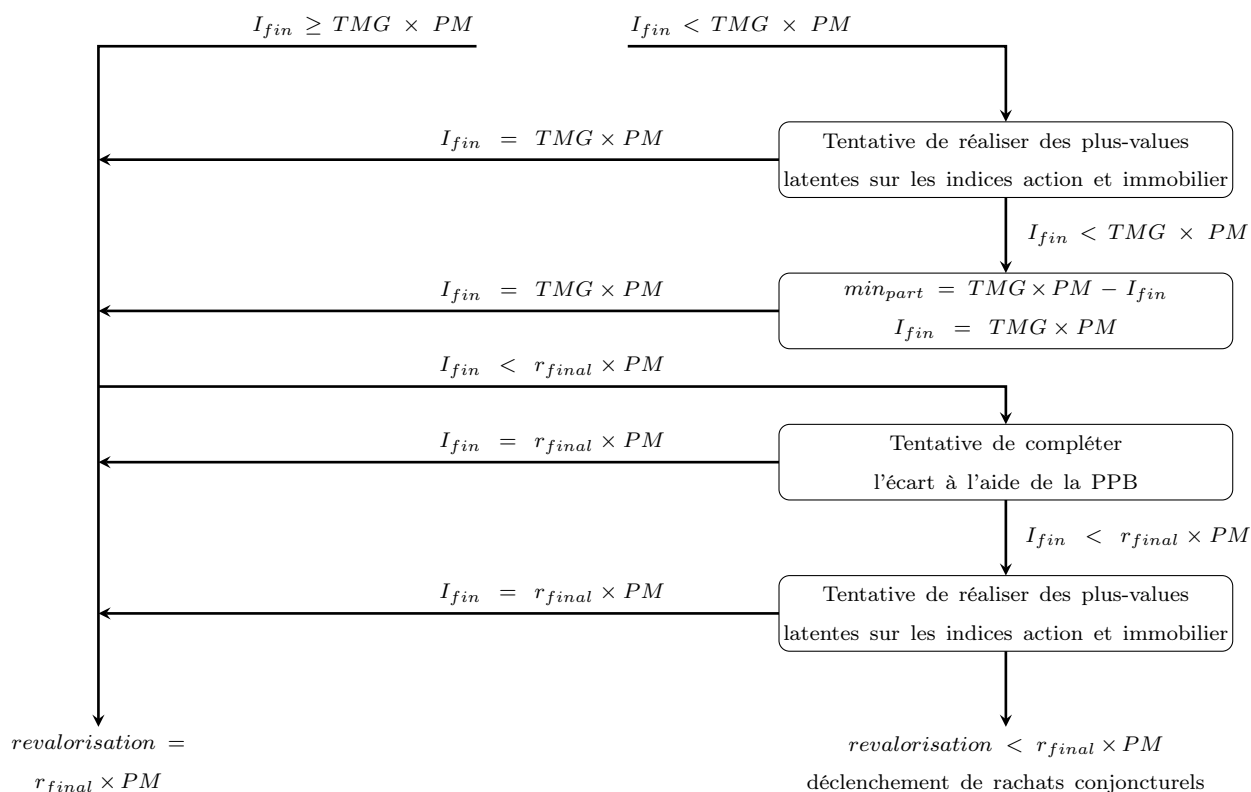


FIGURE 6.3 – Politique de revalorisation des provisions mathématiques.

Comme mentionné précédemment, la compagnie d'assurance modélisée cherche à verser à ses assurés le taux de revalorisation  $r_{final}$ . Dans le cas où sa production financière est suffisamment élevée, la compagnie revalorise automatiquement l'encours de ses assurés au taux précité. Dans le cas contraire si la production financière est inférieure au  $TMG$  la compagnie tentera de réaliser des plus-values latentes sur les indices action et immobilier afin d'atteindre le niveau de revalorisation associé au  $TMG$ . Si, une fois ce niveau atteint, le taux de revalorisation de l'encours est encore inférieur à  $r_{final}$  la compagnie cherchera à compléter l'écart restant à l'aide d'une reprise de  $PPB$  et d'une nouvelle réalisation de plus-values latentes.

Dans le cadre de modélisation ALM retenu pour ce mémoire, les rachats conjoncturels seront modélisés. Le taux de référence  $r_{cible}$  attendu par les assurés est le taux associé au zéro-coupon de maturité 1 an au moment de la revalorisation. Si la compagnie d'assurance devait échouer à servir à ses assurés un taux au moins égal à  $r_{cible}$  les lois de rachat conjoncturelles, définies dans la section suivante, pourraient s'appliquer.

### 6.3.3 Lois de rachats

#### Rachats structurels

Les rachats structurels sont modélisés par une loi déterministe et indépendante de la situation économique lors de la revalorisation des PM. Les lois de rachat structurelles sont généralement dépendantes des caractéristiques du contrat, de l'âge de l'assuré et de l'ancienneté du contrat. Dans cette étude, la seule variable retenue sera l'ancienneté. Le taux de rachat structurel sera supposé constant et égal à 3% quelle que soit l'ancienneté du contrat, un unique pic de rachats sera fixé à 6% pour la 9<sup>ième</sup> année d'ancienneté afin de prendre en compte l'incitation au rachat provoquée par la fiscalité avantageuse appliquée aux contrats d'assurance vie d'une ancienneté supérieure à 8 ans.

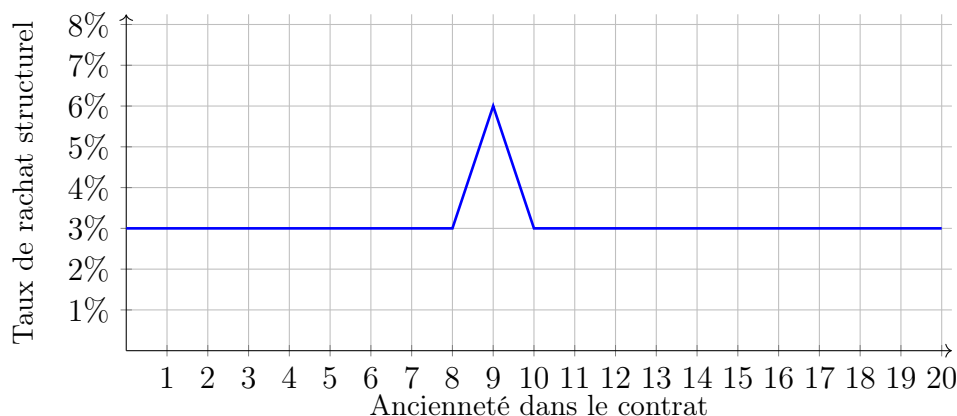


FIGURE 6.4 – Loi de rachats structurels.

### Rachats conjoncturels

Les rachats conjoncturels permettent de moduler le comportement des assurés en fonction de la situation économique. En effet lorsque le taux servi  $r_{servi}$  est inférieur au taux cible  $r_{cible}$ , des rachats conjoncturels peuvent advenir et s'ajouter aux rachats structurels. Les Orientations Nationales Complémentaires du *Quantitative Impact Studies* 5 [ACP13] proposent deux lois de rachats, l'une correspondant à un plancher minimum de rachats et l'autre à une plafond maximum de rachats. Le taux de rachat conjoncturel  $RC$  est fonction de l'écart entre  $r_{servi}$  et  $r_{cible}$  :

$$RC = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } r_{servi} - r_{cible} < \alpha \\ RC_{max} \frac{r_{servi} - r_{cible} - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \beta < r_{servi} - r_{cible} < \alpha \\ 0 & \text{si } r_{servi} - r_{cible} > \beta \end{cases}$$

Si l'écart entre le taux servi par la compagnie d'assurance et le taux attendu par les assurés est raisonnablement faible et supérieur à  $\beta$ , le taux de rachat conjoncturel sera égal à 0. A mesure que l'écart entre le taux servi et le taux attendu se creuse, le taux de rachat augmente linéairement jusqu'à atteindre la valeur  $RC_{max}$  pour un écart égal à  $\alpha$ , seuil au-delà duquel les assurés deviennent indifférents à une baisse supplémentaire de la revalorisation de leur encours. Les paramètres  $RC_{max}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  des lois minimales, moyennes et maximales utilisées dans l'algorithme ALM sont détaillés dans le tableau suivant :

Loi de rachat	$RC_{max}$	$\beta$	$\alpha$
Minimale	20%	-2%	-6%
Moyenne	30%	-1%	-5%
Maximale	40%	0%	-4%

TABLE 6.1 – Paramètres utilisés pour les lois de rachats conjoncturels.

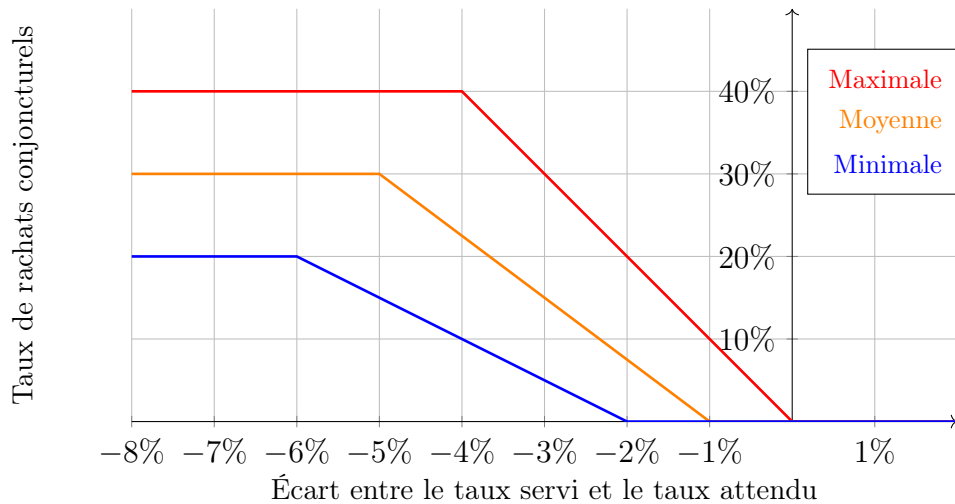


FIGURE 6.5 – Lois de rachats conjoncturels.

## 6.4 Hypothèses du modèle ALM

Le modèle ALM précédemment présenté a été éprouvé sous différentes hypothèses, présentées par la suite. Ces hypothèses portent sur les données d'entrée économiques retenues pour calibrer le générateur de scénarios économiques utilisé, l'allocation d'actifs initiale de la compagnie d'assurance modélisée et les *model points* de passif modélisés.

### Environnement économique

- Différentes tables de scénarios économiques ont été prises comme données d'entrée pour les études ALM réalisées dans ce mémoire. Les tables utilisées sont issues de simulations calibrées sur les données européennes datant du 31/12/2021 et du 31/03/2022 avec des courbes de taux centrales et choquées, à la hausse comme à la baisse, selon la définition donnée par l'EIOPA.

### Hypothèses globales

- 3000 simulations ont été utilisées ;
- le taux d'imposition sur les bénéfices est fixé à 34.43% ;
- la participation aux bénéfices réglementaire est fixée à 85%.

### Hypothèses d'actif

- La trésorerie, les zéro-coupons de maturité inférieure ou égale à 30 ans et un indice action ainsi qu'un indice immobilier ont été modélisés ;
- l'allocation par classe d'actif pour l'ensemble des compagnies d'assurance françaises est extraite de [EIO22] ;
- l'actif initial est de 1Md€ en valeur comptable et en valeur de marché, les actifs initiaux ne comportent pas de plus ou moins-values latentes.

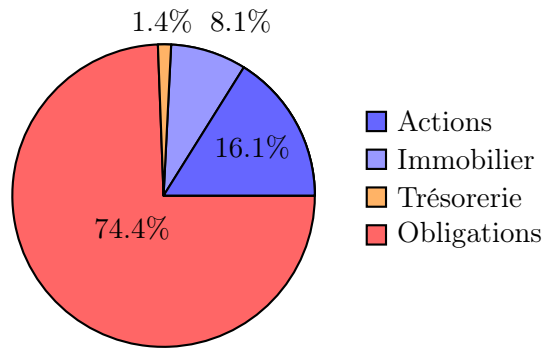


FIGURE 6.6 – Allocation d'actifs cible du modèle ALM (en % VM).

### Hypothèses de passif

- La compagnie d'assurance fonctionne en *run-off*, les contrats courants sont vieillis jusqu'à épuisement de la provision mathématique pour cause de rachat ou de mortalité et la compagnie d'assurance n'intègre pas de nouveaux assurés ;
- un unique *model-point* a été utilisé pour chaque simulation ;
- l'ancienneté des assurés est fixée à 0 lors du lancement du modèle ALM ;
- les simulations ont été réalisées pour des assurés âgés de 50 ans ;
- pour les rachats structurels la loi présentée en Section 6.3.3 a été employée ;
- des simulations ont été réalisées en l'absence de rachats conjoncturels et en utilisant les trois lois définies en Section 6.3.3 ;
- le taux de chargement prélevé par la compagnie d'assurance est fixé à 0.55% ;
- le taux minimum garanti est fixé à 0% ;
- le passif initial n'est constitué que de la PM, dotée d'un montant de 1Md€.

**Remarque.** Les simulations ALM menées dans ce mémoire prennent le parti de modéliser des contrats nouvellement acquis, le passif initial est uniquement constitué des provisions mathématiques contenant l'apport initial des assurés. Un portefeuille d'actifs nouvellement constitué, dont la valeur de marché est égale à la valeur comptable, est adossé à ce passif.

## 6.5 Résultats de la projection ALM

Une fois la simulation terminée, le modèle ALM produit différents indicateurs permettant de suivre la projection du bilan à chaque date de simulation, ces derniers sont brièvement présentés en prenant comme exemple une projection utilisant les données en date du 31/03/2022 sans choc de taux, où le DD-SV-LMM a été calibré avec la méthode de référence donnée par l'Équation (4.2). Le *model-point* utilisé est un groupe d'assurés âgés de 50 ans dont le comportement de rachats conjoncturel suit la loi moyenne.

### Valorisation économique du bilan

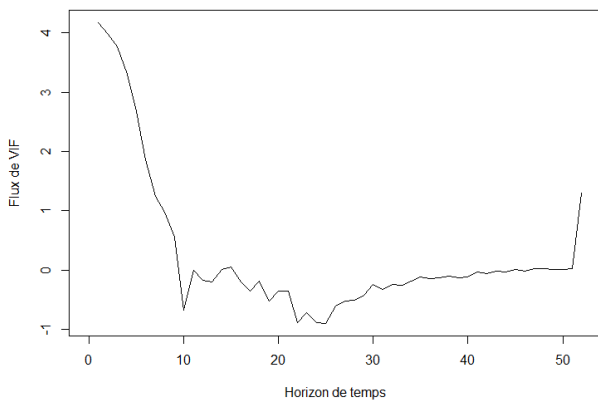
La première sortie du modèle à considérer est la valeur de la VIF et du BEL calculés par le modèle. Le BEL correspond à la valeur probable actualisée des engagements de l'assureur. La VIF correspond aux résultats nets d'impôts actualisés de la compagnie d'assurance au cours de la projection. Les impôts sont eux aussi pris en compte dans la valorisation économique du bilan. On remarque que les impôts sont plus importants que la VIF, cela peut s'expliquer par l'asymétrie engendrée par le fait que la compagnie d'assurance ne paie d'impôts qu'en cas de résultat positif, et supporte l'ensemble de la perte dans le cas contraire.



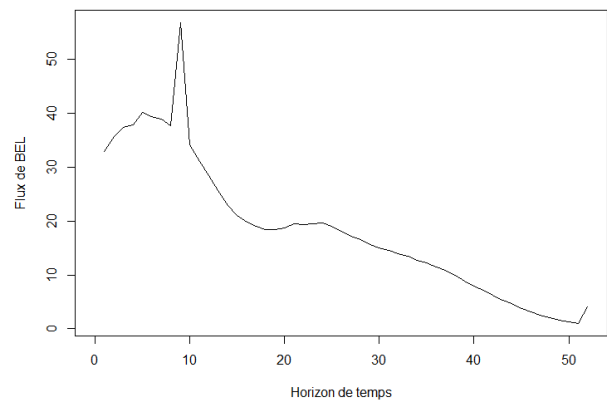
BEL	VIF	Impôts
952.136	13.3177	35.2675

TABLE 6.2 – Valorisation économique du bilan à la date initiale.

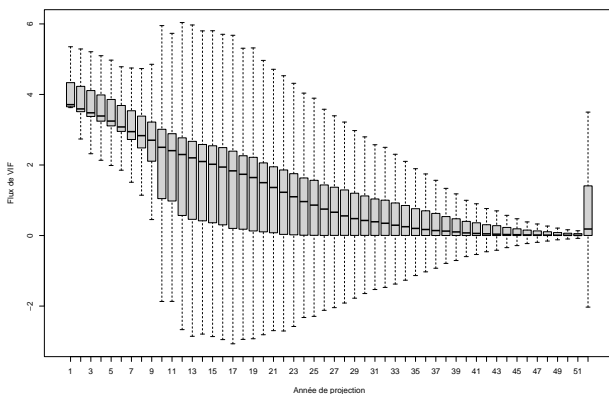
Lors de chaque année de projection, 3000 scénarios économiques fournissent autant de flux de VIF et de BEL. Il est possible d’observer l’évolution moyenne de ces flux au cours de la projection en considérant la Figure 6.7a pour la VIF et la Figure 6.7b pour le BEL. Les Figures 6.7c et 6.7d représentent respectivement les diagrammes en boîtes des flux de VIF et de BEL observés à chaque pas de temps. Le pic de rachats structurels est bien visible sur les Figures 6.7b et 6.7d.



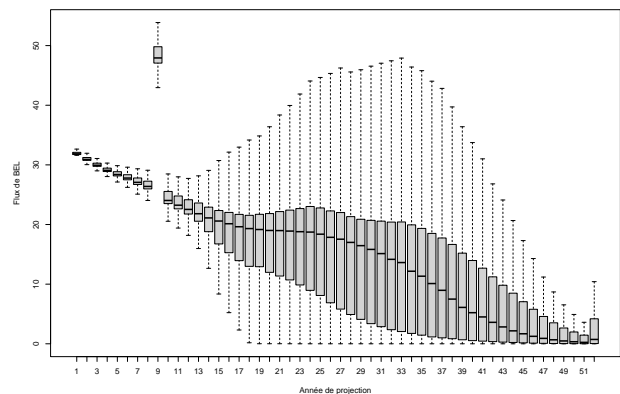
(a) Flux de VIF moyen au cours de la projection.



(b) Flux de BEL moyen au cours de la projection.



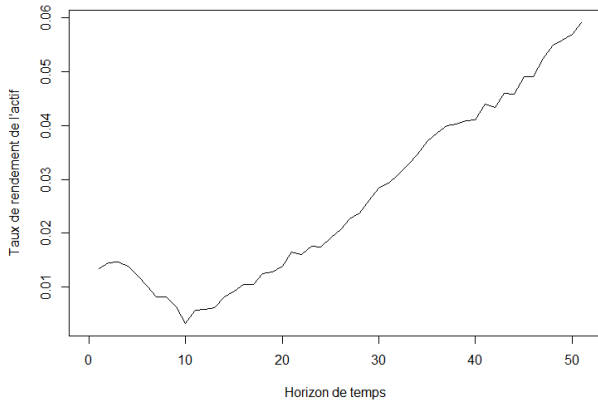
(c) Quantiles de VIF au cours de la projection.



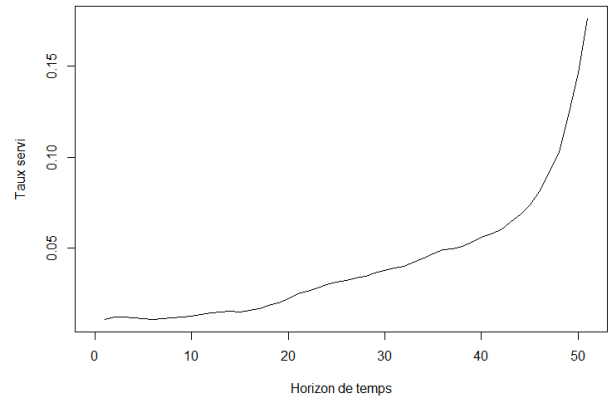
(d) Quantiles de BEL au cours de la projection.

FIGURE 6.7 – Evolution des flux de VIF et de BEL au cours de la projection.

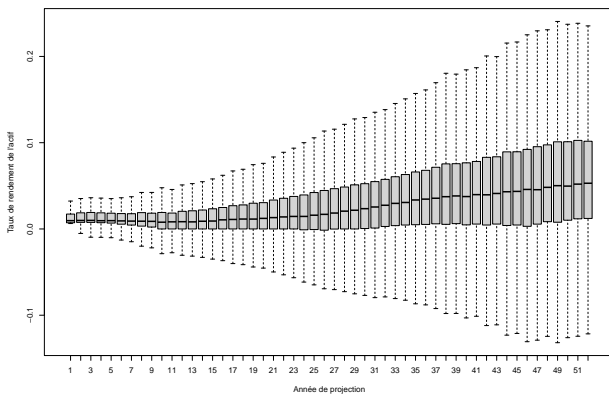
Les figures suivantes permettent de visualiser de manière similaire le taux de rendement de l’actif ainsi que le taux servi aux assurés. Les niveaux moyens du taux de rendement de l’actif et du taux servi sont respectivement représentés dans les Figures 6.8a et 6.8b. Les Figures 6.8c et 6.8d représentent respectivement les diagrammes en boîtes des taux de rendement de l’actif et de taux servi aux assurés observés à chaque pas de temps. Le niveau moyen de ces deux quantités ainsi que leur dispersion augmentent globalement au cours du temps. Si le taux de rendement de l’actif peut prendre des valeurs négatives, le taux servi doit toujours rester à sa limite inférieure, le TMG ici fixé à 0.



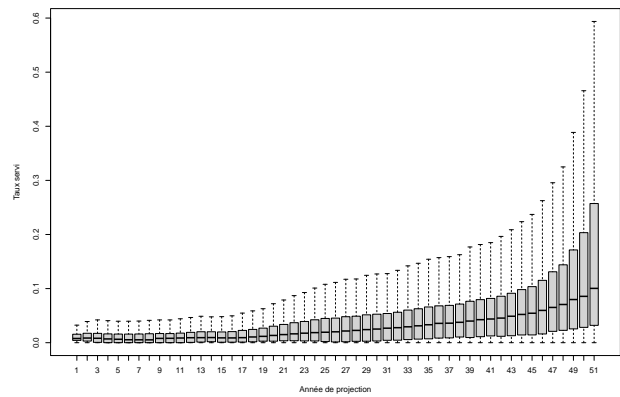
(a) Taux de rendement de l'actif moyen au cours de la projection.



(b) Taux servi moyen au cours de la projection.



(c) Quantiles du taux de rendement de l'actif.



(d) Quantiles du taux servi.

FIGURE 6.8 – Evolution du taux de rendement de l'actif et du taux servi au cours de la projection.

Enfin, la liquidation progressive du portefeuille de contrats d'assurance vie est représentée par l'évolution de la valeur comptable du passif et l'évolution du taux de chute. Le taux de chute représente le taux de décroissance de la provision mathématique résultant de la mortalité et des rachats. L'Histogramme 6.9a représente le niveau moyen respectif de chacune des provisions modélisées au cours de la projection et l'Histogramme 6.9b représente le taux de chute pour chaque année de projection avec la part respective des différentes causes. Le taux de chute final est de 100% car la dernière année de projection correspond au terme de la table de mortalité utilisée.

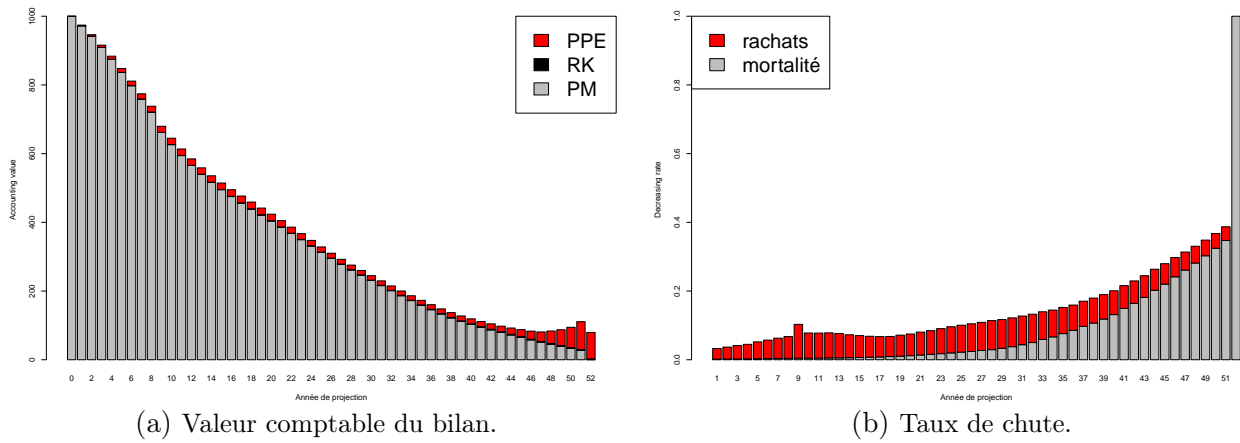


FIGURE 6.9 – Liquidation progressive du portefeuille d'assurance au cours de la projection.

Après avoir présenté le fonctionnement du modèle ALM utilisé dans ce mémoire et les indicateurs fournis par ce dernier, l'étude va à présent s'orienter vers la mesure de l'effet d'un changement de méthode de calibrage du DD-SV-LMM sur ces indicateurs.

# Chapitre 7

## Impact de la méthode de calibrage sur la projection ALM

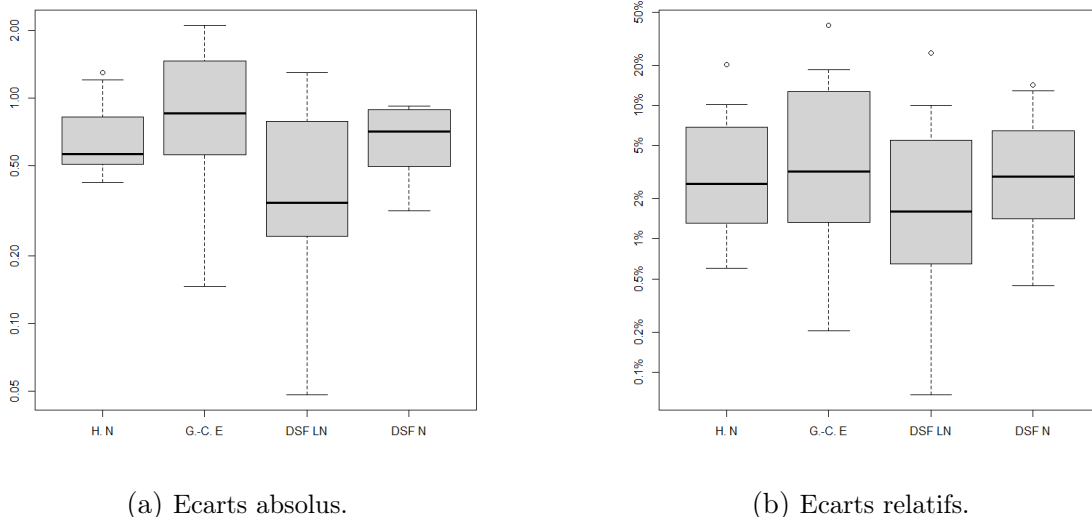
### Préambule

Le modèle ALM présenté dans la section précédente a été utilisé pour mesurer l'impact de la méthode de calibrage choisie pour le DD-SV-LMM sur la valorisation d'un portefeuille d'assurance vie. Plusieurs projections ont donc été réalisées en utilisant des tables de scénarios économiques dont le module de taux d'intérêts a été généré par le DD-SV-LMM calibré à l'aide des différentes méthodes étudiées dans ce mémoire. Comme lors de l'évaluation du calibrage, les résultats ont d'abord été évalués de manière agrégée avant de procéder à une analyse plus fine.

### 7.1 Analyse générale de l'impact sur la VIF

Pour rappel, la méthode de valorisation dite de Heston en paradigme log-normal définie par l'Équation (4.2) a été posée comme référence de cette étude. L'impact des méthodes proposées, à savoir la méthode de Heston en paradigme normal, le développement en série de Gram-Charlier en cadre normal et enfin le développement en série de Fourier en paradigme normal et log-normal, sur la valorisation d'un portefeuille d'assurance sera évalué en observant les écarts de VIF.

Les données de marché du 31/12/2021 et du 31/03/2022 associées aux courbes de taux réglementaires EIOPA, en prenant en compte la courbe des taux centrale et sa version choquée à la hausse et à la baisse, constituent six jeux de données économiques. Pour chacun de ces jeux de données économiques, une table de scénarios économiques a été générée pour chaque méthode de calibrage du DD-SV-LMM à l'étude, donnant ainsi un total de 30 tables de scénarios économiques à étudier. Des projection ALM ont été réalisées pour des assurés de 50 ans en l'absence de rachats conjoncturels aussi bien qu'en modélisant ces derniers par chacune des trois lois de rachats évoquées précédemment. Cela donne un total de 120 simulations ALM réalisées, 24 pour chaque méthode de calibrage.



(a) Ecarts absolus.

(b) Ecarts relatifs.

FIGURE 7.1 – Diagrammes en boîtes des écarts entre la VIF de référence et la VIF issue des autres méthodes.

La figure précédente représente le diagramme des quantiles des écarts, relatifs et absolus, entre la VIF de référence et la VIF induite par chaque méthode pour les 24 projections ALM. L'utilisation de la méthode du développement en série de Gram-Charlier semble induire des écarts globalement plus

élevés par rapport à la méthode de référence. Au contraire, le DSF en paradigme log-normal semble faire preuve d'un niveau d'écart sensiblement plus faible par rapport aux autres méthodes. Cet écart est vraisemblablement dû au fait qu'il s'agisse de la seule méthode issue du même paradigme que la méthode de référence.

## 7.2 Analyse des écarts extrêmes

La table de scénarios économiques issue de l'application de la méthode de développement en série de Gram-Charlier aux données économiques du 31/12/2021 comportant une courbe des taux initiale choquée à la baisse donne les résultats les plus extrêmes. Dans cette configuration, l'écart relatif maximal d'une valeur de 47.94% est atteint pour un *model-point* dont le comportement de rachat conjoncturel suit la loi moyenne et l'écart absolu maximal d'une valeur de 3.01 M€ est atteint pour un *model-point* dont le comportement de rachat conjoncturel suit la loi maximale.

La figure suivante représente l'écart de VIF cumulé annuellement induit par l'utilisation de la méthode de Gram-Charlier par rapport à la méthode de référence ( $VIF_{G.-C.E.} - VIF_{H.LN}$ ) pour des projections réalisées avec chacune des lois de rachats conjoncturels. Les courbes ont une allure similaire mais une amplitude croissante en fonction de l'intensité de la loi de rachats conjoncturels.

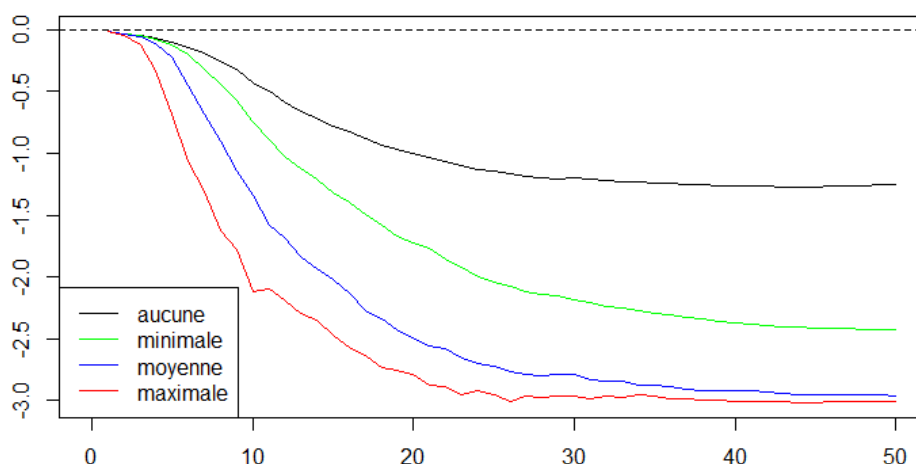


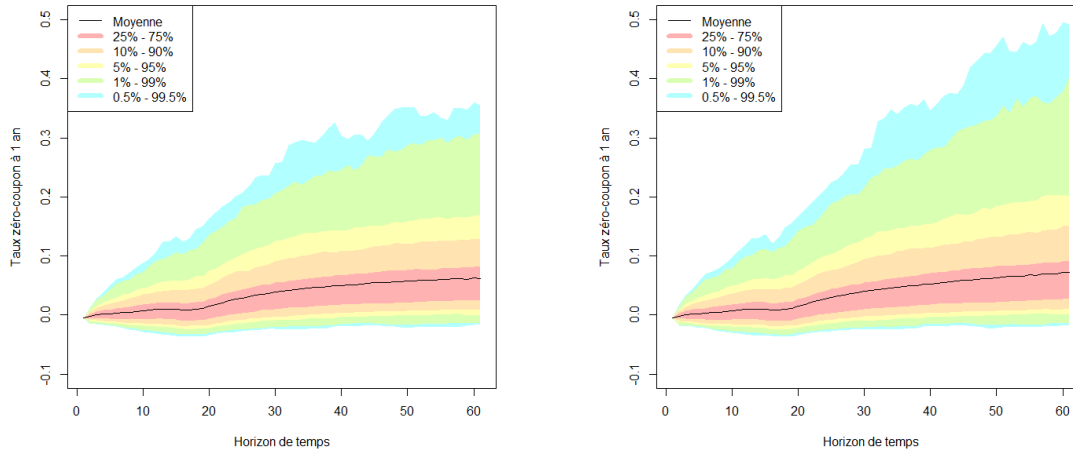
FIGURE 7.2 – Écarts de VIF induits par la méthode de Gram-Charlier par loi de rachats conjoncturels.

Ces écarts peuvent être expliqués en observant les données d'entrée du modèle ALM que constituent les scénarios économiques générées à partir des données du 31/12/2021 choquées à la baisse. Au premier abord, une hétérogénéité apparaît entre les paramètres calibrés en utilisant la méthode de référence et ceux calibrés en utilisant la méthode de Gram-Charlier. Cette différence de paramètres calibrés se traduit ensuite par un profil différent pour les taux projetés.

La Figure 7.3 représente l'évolution des quantiles du taux zéro-coupon de maturité un an (taux de référence attendu par les assurés) au cours de la projection. Cette figure indique que le taux de référence est sensiblement plus dispersé et atteint des valeurs plus élevées pour le développement en série de Gram-Charlier. Ce phénomène peut expliquer la prépondérance des rachats induits par la méthode de Gram-Charlier par rapport à la méthode de référence.

	a	b	c	d	$\kappa$	$\theta$	$\epsilon$	$\rho$	$\delta$
<b>H. LN</b>	0.04900	0.01060	0.07199	0.00141	0.20627	0.40030	0.40614	0.99997	0.10000
<b>G.-C. E</b>	0.06309	0.00578	0.06054	0.00594	0.15178	0.42879	0.36078	0.99904	0.10000

TABLE 7.1 – Paramètres calibrés pour chaque méthode.



(a) Méthode de Heston en paradigme log-normal. (b) Développement en série de Gram-Charlier.

FIGURE 7.3 – Graphique des quantiles des taux zéro-coupons à 1 an.

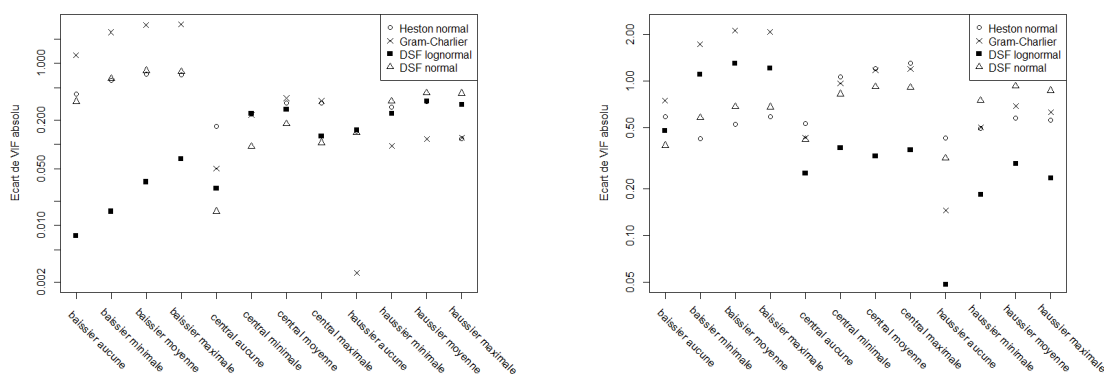
### 7.3 Lien avec la *market-consistency*

Le tableau suivant présente les résultats de cohérence avec les données de marché des différents scénarios économiques, sous la forme de  $MSE_{prix}$  entre les prix de marché et les prix Monte-Carlo, pour chaque méthode de calibrage étudiée. Une fois encore, les différentes méthodes de calibrage semblent équivalentes en terme de cohérence avec les données de marché.

		H. LN	H. N	G.-C. E	DSF LN	DSF N
31/12/2021	Choc baissier	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$1.29 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$
	Central	$1.42 \cdot 10^{-5}$	$1.34 \cdot 10^{-5}$	$1.40 \cdot 10^{-5}$	$1.35 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$
	Choc haussier	$1.02 \cdot 10^{-5}$	$1.11 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$9.85 \cdot 10^{-6}$
31/03/2022	Choc baissier	$1.53 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$1.56 \cdot 10^{-5}$	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$1.69 \cdot 10^{-5}$
	Central	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$1.33 \cdot 10^{-5}$
	Choc haussier	$1.03 \cdot 10^{-5}$	$9.70 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-5}$	$9.74 \cdot 10^{-6}$	$9.41 \cdot 10^{-6}$

TABLE 7.2 – *Market-consistency* des calibrages utilisés pour générer les données d'entrée ALM.

Les écarts de VIF absolus sont représentés pour chaque date en fonction du choc appliqué à la courbe des taux initiale et de la loi de rachats modélisée. Ces observations confirment les analyses formulées dans la section précédente. En effet pour chaque méthode les écarts de VIF sont d'autant plus importants que le niveau de la loi retenue pour modéliser les comportements des rachats est haut. Généralement, les écarts de VIF observés sont moindres lorsque le niveau initial de la courbe des taux d'intérêts est plus élevé, à chaque date les écarts de VIF sont globalement plus importants pour les courbes choquées à la baisse.



(a) Ecarts de VIF absolus en date du 31/12/2021. (b) Ecarts de VIF absolus en date du 31/03/2022.

FIGURE 7.4 – Ecarts de VIF observés pour l’ensemble des projections ALM.

**Clef de lecture.** *La modélisation effectuée avec les données économiques en date du 31/12/201 avec un choc baissier sans modéliser de rachats conjoncturels est désignée par l’appellation « baissier aucune ». Pour cette modélisation, le DSF en paradigme log-normal présentait l’écart de VIF le moins important par rapport à la méthode de référence suivi par le DSF et la méthode de Heston tous deux en paradigme normal. La méthode de Gram-Charlier présentait l’écart le plus important.*

Une vérification similaire du critère de cohérence avec les données de marché n’assure pas une production de scénarios économiques équivalents ni une valorisation économique du bilan équivalente. En effet pour le jeu de données économiques du 31/12/2012 auquel a été appliqué un choc baissier, la méthode du développement en série de Gram-Charlier présente un niveau de cohérence avec les données de marché de l’ordre de  $1.37 \cdot 10^{-5}$  et le DSF en paradigme log-normal présente un score de cohérence avec les données de marché similaire de  $1.38 \cdot 10^{-5}$ . Cependant, les écarts de VIF induits par ces deux méthodes et observés sur la Figure 7.4a sont apparaissent clairement quelle que soit la loi de rachats conjoncturels utilisée.

# Conclusion

## Méthodes de calibrage accélérées pour le DD-SV-LMM

Ce mémoire a pour objectif de proposer de nouvelles méthodes de valorisation des swaptions permettant un calibrage accéléré et efficace du DD-SV-LMM produisant des scénarios économiques exploitables du point de vue opérationnel.

Les premières études bibliographiques menées lors de la réalisation de ce mémoire visaient à explorer le DD-SV-LMM afin de saisir la complexité de ce modèle à volatilité stochastique. Incluant un trop grand nombre de quantités aléatoires dans sa version initiale, le modèle doit être simplifié en figeant certaines quantités stochastiques à leur valeur initiale. Deux formulations distinctes des hypothèses de figement conduisent à deux dynamiques distinctes pour le taux swap, un paradigme normal et un paradigme log-normal.

Ces études se sont ensuite orientées vers les formules initialement proposées pour la valorisation des swaptions sous ce modèle, la méthode dite de Heston et la méthode de transformée de Fourier accélérée. Enfin, la phase de recherches bibliographiques s'est achevée sur l'investigation de méthodes accélérées pour la valorisation des swaptions. Toutes deux basées sur l'estimation de la densité du taux swap à terme, le développement en série de Gram-Charlier propose de l'approcher par une loi normale perturbée par une série polynomiale tandis que le développement en série de Fourier (ou DSF) propose de l'approcher par une série d'harmoniques de la fonction cosinus.

Ces méthodes ont ensuite été implémentées et intégrées dans un générateur de scénarios économiques risque-neutre et cohérent avec les données de marché. Les nouvelles méthodes implémentées ont permis une accélération significative du calibrage du DD-SV-LMM, en effet les méthodes du développement en série de Gram-Charlier et du développement en série de Fourier permettent des accélérations respectives de 89% et de 79%. Des tests de calibrage ont été réalisés en utilisant différents jeux de données économiques, la réplication des données de marché s'est révélée satisfaisante quelle que soit la méthode retenue. Parmi les nouvelles méthodes proposées, le développement en série de Fourier en paradigme log-normal a toutefois fait preuve de meilleures performances tandis que le développement en série de Gram-Charlier s'est démarqué par une certaine faiblesse.

Enfin, l'influence de la méthode de tarification des swaptions utilisée pour calibrer le DD-SV-LMM sur la valorisation d'un portefeuille d'assurance vie a été mesurée. Les tables de scénarios économiques générées par le DD-SV-LMM calibré à l'aide de différentes méthodes de valorisation des swaptions ont été prises comme données d'entrée d'un modèle de projection ALM simplifié. Les observations effectuées sur les calibrages ont en partie été confirmées dans la mesure où le développement en série de Fourier en paradigme log-normal produisait les résultats les plus proches de ceux de la méthode de référence et le développement en série de Gram-Charlier produisait les résultats les plus éloignés. Au-delà de sa rapidité d'exécution et de ses bonnes performances, le développement en série de Fourier est une méthode particulièrement prometteuse en raison de sa souplesse et de son caractère polyvalent, en effet celle-ci peut s'appliquer à n'importe quel modèle tant que la fonction génératrice des moments de la distribution de l'actif sous-jacent est connue.



## Références

- [AFP17] D. ACKERER, D. FILIPOVIC et S. PULIDO. “The Jacobi stochastic volatility model”. In : *Finance and Stochastics* (2017).
- [ACP13] ACPR. “Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l’exercice 2013 de préparation à Solvabilité II”. In : (2013).
- [ACP20] ACPR. “Générateurs de scénarios économiques : points d’attention et bonnes pratiques”. In : *Revue de l’ACPR, décembre 2020* (2020).
- [ACP22] ACPR. “Placements financiers des sociétés d’assurance - France 2ème Trimestre 2022”. In : (2022).
- [AP18] K. ARMEL et F. PLANCHET. “Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l’évaluation économique des contrats d’épargne?”. In : *Assurance et gestion des risques/Insurance and risk management* (2018).
- [Bac00] Louis BACHELIER. “Théorie de la spéculation”. Thèse de doct. 1900.
- [BS73] F. BLACK et M. SCHOLES. “The pricing of options and corporate liabilities”. In : *Journal of political economy* (1973).
- [BM07] Damiano BRIGO et Fabio MERCURIO. *Interests Rate Models - Theory and Practice : with Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance, 2007.
- [Cha21] Antonin CHAIX. “Instruments financiers - notes de cours”. 2021.
- [CH22] Antonin CHAIX et Caroline HILLAIRET. “Modèles de la courbe des taux d’intérêt - notes de cours”. 2022.
- [Cra28] H. CRAMER. “On the composition of elementary errors : First paper : Mathematical deductions”. In : *Scandinavian Actuarial Journal* (1928).
- [DABB17] L. DEVINEAU, P-E. ARROUY, P. BONNEFOY et A. BOUMEZOUED. “Fast calibration of the LIBOR market model with stochastic volatility and displaced diffusion”. In : *Journal of industrial and management optimization* (2017).
- [DPS00] D. DUFFIE, J. PAN et K. SINGLETON. “Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions”. In : *Econometrica* (2000).
- [EIG] EIGEN. *Librairie C++ Eigen*. [https://eigen.tuxfamily.org/dox/unsupported/group\\_MatrixFunctions\\_Module.html](https://eigen.tuxfamily.org/dox/unsupported/group_MatrixFunctions_Module.html).
- [EIO22] EIOPA. “Asset exposures : [https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/statistics-and-risk-dashboards/insurance-statistics\\_en](https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/statistics-and-risk-dashboards/insurance-statistics_en)”. 2022.
- [EIO] EIOPA. *Courbes EIOPA mensuelles*. [https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures\\_en](https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en).
- [Eur09] Directive EUROPÉENNE. “DIRECTIVE 2009/138/CE DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 25 novembre 2009 sur l’accès aux activités de l’assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)”. In : (2009).
- [Fan10] Fang FANG. “The COS Method : An Efficient Fourier Method for Pricing Financial Derivatives”. Thèse de doct. Technische Universiteit Delft, 2010.
- [Hes93] S. L. HESTON. “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”. In : *The review of financial studies* (1993).
- [JP21] G. JUNIKE et K. PANKRASHKIN. “Precise option pricing by the COS method - How to choose the truncation interval”. In : (2021).

- [Meh21] Sophian MEHALLA. “Taux d’intérêt pour l’assurance : approximations et calibrages de modèles”. Thèse de doct. École des Ponts ParisTech, 2021.
- [Ort19] Laetitia ORTA. “Intégration du risque de change au sein d’un Générateur de Scénarios Économiques et impact sur la valorisation de portefeuilles d’assurance vie”. Thèse de doct. ENSAE ParisTech, 2019.
- [Val22] Franck Le VALLOIS. “Réglementation et assurance - notes de cours”. 2022.
- [WZ06] Lixin WU et Fan ZHANG. “LIBOR market model with stochastic volatility”. In : *Journal of industrial and management optimization* (2006).

# Annexes

## A Annexes relatives à la technique du changement de numéraire

### A.1 Technique du changement de numéraire

**Définition 1. (Numéraire)** *Un numéraire est un actif à valeurs strictement positives ne payant pas de dividendes.*

Un numéraire est utilisé pour normaliser le prix des actifs. Pour des raisons d'actualisation des flux financiers, le numéraire utilisé sous la probabilité risque neutre est le compte de marché monétaire  $B(t)$ .

**Proposition A.1. (Changement de numéraire)** *L'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés financiers est équivalente à l'existence d'une mesure de probabilité dite risque-neutre  $\mathbb{Q}$  équivalente à la mesure historique  $\mathbb{P}$  sous laquelle les prix des actifs actualisés au taux sans risque sont des martingales :*

$$\frac{X_t}{B(t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_T}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Soit  $U(t)$  un autre numéraire, il existe une probabilité  $\mathbb{Q}^U$  équivalente à  $\mathbb{Q}$  telle que le processus des prix des actifs normalisés par  $U(t)$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}^U$  :

$$\frac{X_t}{U(t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{X_T}{U(T)} \middle| \mathbf{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

De plus, la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure  $\mathbb{Q}^U$  par rapport à la mesure  $\mathbb{Q}$  est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}} \bigg|_{\mathcal{F}_T} = \frac{U(T)B(0)}{U(0)B(T)}.$$

La technique de changement de numéraire est utilisée à des fins de valorisation des actifs. En effet une conséquence directe de la proposition précédente est l'invariance du prix des actifs par changement de numéraire :

$$X_t = B(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_T}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = U(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{X_T}{U(T)} \middle| \mathbf{F}_t \right].$$

### A.2 Numéraires utilisés au cours de ce mémoire

**Définition 1. (Obligation zéro-coupon de maturité  $T_{i+1}$ )** *Ce numéraire noté  $P(t, T_{i+1})$  est utilisé pour tarifier les options sur taux forward de maturité  $T_i$  et de ténor  $T_{i+1} - T_i$  traitées dans ce mémoire. La mesure associée est appelée probabilité forward-neutre et notée  $\mathbb{Q}^{i+1}$ . Sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  est :*

$$m_t = \frac{d\mathbb{Q}^{i+1}}{d\mathbb{Q}} \bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t, T_{i+1})}{P(0, T_{i+1}) B(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

En reprenant la dynamique du prix des obligations zéro-coupon proposée dans l'Équation (3.1), une application directe de la formule d'Itô mène à :

$$dm_t = m_t \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1}) d\mathbf{Z}_t.$$

Soient  $\mathbf{Z}_t$  et  $W_t$  deux mouvements brownien standard sous  $\mathbb{Q}$ . D'après le théorème de Girsanov, les processus  $\mathbf{Z}_t^{i+1}$  et  $W_t^{i+1}$  définis par :

$$\begin{cases} d\mathbf{Z}_t^{i+1} &= \mathbf{Z}_t - \langle d\mathbf{Z}_t, dm_t/m_t \rangle, \\ dW_t^{i+1} &= W_t - \langle dW_t, dm_t/m_t \rangle. \end{cases}$$

Sont des mouvements brownien standard sous  $\mathbb{Q}^{i+1}$ . En reprenant la structure de corrélation définie dans l'Équation (3.4), la dynamique des processus  $\mathbf{Z}_t^{i+1}$  et  $W_t^{i+1}$  est spécifiée par :

$$\begin{cases} d\mathbf{Z}_t^{i+1} &= \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})dt, \\ dW_t^{i+1} &= W_t + \xi_i(t)dt. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Avec :

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^i \frac{\tau_k F_k(t) \rho_k(t) \|\gamma_k(t)\|}{1 + \tau_k F_k(t)}.$$

**Définition 2. (Niveau d'annuité d'un swap  $B_{m,n}^S(t)$ )** Ce numéraire est utilisé dans ce mémoire pour tarifer les options sur taux swap de maturité  $T_m$  et de ténor  $T_m - T_n$ . La mesure associée est appelée probabilité swap-forward et notée  $\mathbb{Q}^S$ . Sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  est :

$$m_t^S = \frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_{m,n}^S(t)}{B_{m,n}^S(0) B(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

En reprenant la dynamique du prix des obligations zéro-coupon proposée par l'Équation (3.1), une application directe de la formule d'Itô mène à :

$$dm_t^S = m_t^S \sum_{i=m}^{n-1} \alpha_i(t) \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1}) d\mathbf{Z}_t.$$

Soient  $\mathbf{Z}_t$  et  $W_t$  deux mouvements brownien standard sous  $\mathbb{Q}$ . Un calcul analogue à celui mené précédemment donne :

$$\begin{cases} d\mathbf{Z}_t^S &= \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\sigma}^S(t, T)dt, \\ dW_t^S &= W_t + \xi_i^S(t)dt. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Avec :

$$\boldsymbol{\sigma}^S(t) = \sum_{i=m}^{n-1} \alpha_i(t) \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1}) \quad \text{et} \quad \xi_i^S(t) = \sum_{i=m}^{n-1} \alpha_i(t) \xi_i(t), \quad \text{où} \quad \alpha_i(t) = \frac{\tau_i P(t, T_{i+1})}{B^S(t)}.$$

**Remarque.** Les deux calculs menés précédemment peuvent être adaptés au cas du DD-SV-LMM en intégrant le facteur de volatilité stochastique  $\sqrt{V(t)}$ . La dérive des mouvements browniens standards sous  $\mathbb{Q}^i$  et  $\mathbb{Q}^S$  est alors multipliée par le facteur  $\sqrt{V(t)}$ .

## B Annexes relatives au DD-SV-LMM

### Dynamique de $\log\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right)$

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage sur les obligations zéro-coupon conduit à considérer la dynamique suivante pour le prix de ces actifs :

$$dP(t, T) = P(t, T) (r_t dt + \boldsymbol{\sigma}(t, T) \cdot d\mathbf{Z}_t).$$

Où  $r_t$  est le processus déterministe ou stochastique associé au taux court,  $\boldsymbol{\sigma}(t, T)$  un vecteur de volatilité déterministe et dépendant du temps et  $\mathbf{Z}_t$  un mouvement brownien standard sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  associée au numéraire  $B(t)$ .

Par définition de la fonction logarithme et linéarité de l'opérateur différentiel,

$$d \log\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right) = d \log P(t, T_i) - d \log P(t, T_{i+1}).$$

Par application de la formule d'Itô au logarithme des prix de zéro-coupons,

$$\begin{aligned} d \log\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right) &= \frac{1}{P(t, T_i)} dP(t, T_i) - \frac{1}{2} \frac{1}{P(t, T_i)^2} P(t, T_i)^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_i)\|^2 dt \\ &\quad - \frac{1}{P(t, T_{i+1})} dP(t, T_{i+1}) + \frac{1}{2} \frac{1}{P(t, T_{i+1})^2} P(t, T_{i+1})^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})\|^2 dt \\ &= (\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})) \cdot d\mathbf{Z}_t - \frac{1}{2} \left( \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_i)\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})\|^2 \right) dt. \end{aligned}$$

### Dynamique de $\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}$

Par application de la formule d'Itô à  $\exp\left(\log\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right)\right)$ ,

$$\begin{aligned} d \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} &= d \exp\left(\log\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right)\right) \\ &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} d \log\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right) + \frac{1}{2} \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})\|^2 dt \\ &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} \left[ (\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})) \cdot d\mathbf{Z}_t - \frac{1}{2} \left( \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_i)\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})\|^2 \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})\|^2 dt \right] \\ &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} [(\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})) d\mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})) \cdot dt]. \end{aligned}$$

### Dynamique de $F(t, T_i, T_{i+1})$

Par injection de la formule du taux forward définie dans l'Équation 2.5,

$$dF(t, T_i, T_{i+1}) = (1 + \tau_i F(t, T_i, T_{i+1})) (\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})) \cdot [d\mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1}) dt].$$

$\begin{aligned} dF(t, T_i, T_{i+1}) &= F(t, T_i, T_{i+1}) \gamma_i(t) \cdot [d\mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1}) dt], \\ \gamma_i(t) &= \frac{1 + \tau_i F(t, T_i, T_{i+1})}{F(t, T_i, T_{i+1})} (\boldsymbol{\sigma}(t, T_i) - \boldsymbol{\sigma}(t, T_{i+1})). \end{aligned}$
---

## C Annexes relatives aux formules de valorisation des swaptions

### C.1 Quadrature de Gauss-Laguerre

La quadrature de Gauss-Laguerre est une méthode de quadrature utilisée pour approcher les intégrales de la forme suivante à l'ordre  $n$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \omega_k(x_k) f(x_k).$$

Avec  $\omega_k(x_k) = \frac{x_k}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_k)]^2}$  où  $x_k$  est la  $k^{\text{ème}}$  racine du polynôme de Laguerre  $L_n$ . Les polynômes de Laguerre sont une séquence de polynômes  $L_0, L_1, \dots$  définis par la formule suivante :

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

Cette méthode de quadrature peut être généralisée à une intégrale quelconque de la sorte :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx, \quad \text{où } g(x) = f(x) e^x.$$

Par exemple, dans le cas de la formule de valorisation de Heston en paradigme log-normal défini dans l'Équation 4.2 l'espérance  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbb{1}_{S_{m,n}(T_m) \geq K}]$  peut être approchée de la sorte :

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \{ e^{-iu \log K/S_{m,n}(0)} \Phi_{T_m}(iu) \}}{u} du \approx \sum_{k=0}^n \omega_k(u_k) \frac{\text{Im} \{ e^{-iu_k \log K/S_{m,n}(0)} \Phi_{T_m}(iu_k) \}}{u_k} e^{u_k}.$$

### C.2 Transformée de Fourier accélérée

Sous probabilité swap-forward, le prix d'une swaption s'écrit comme l'espérance de la fonction de rémunération de l'option :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(S_{m,n}(T_m) - K)^+].$$

Le log-ratio du taux swap  $s = \log \left( \frac{S_{m,n}(t)}{S_{m,n}(0)} \right)$  et le log-strike de la swaption  $k = \log \left( \frac{K}{S_{m,n}(0)} \right)$  étant introduits, le prix d'une swaption peut alors s'écrire :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) S_{m,n}(0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ (e^s - e^k)^+ \right] = B_{m,n}^S(0) S_{m,n}(0) G_{T_m}(k).$$

En posant  $f_{S_{m,n}}(s)$  la densité de  $\log \left( \frac{S_{m,n}(t)}{S_{m,n}(0)} \right)$  :

$$G_{T_m}(k) = \int_k^{+\infty} (e^s - e^k) f_{S_{m,n}}(s) ds.$$

La fonction  $G_{T_m}(k)$  n'est pas réintégrable sur  $\mathbb{R}$  car elle tend vers  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(e^s)^+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ \frac{S_{m,n}(t)}{S_{m,n}(0)} \right] = 1$  quand  $k$  tends vers  $-\infty$ . Ce problème peut être contourné en amortissant la valeur de l'option en posant :

$$g_{T_m}(k) = e^{ak} G_{T_m}(k), \quad \text{avec une constante } a > 0.$$

La transformée de Fourier de la fonction amortie existe et s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} g_{T_m}(k) dk = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \int_{s=k}^{+\infty} e^{ak} (e^s - e^k) f_{S_{m,n}}(s) ds \right) e^{iuk} dk \\ &= \int_{s=-\infty}^{+\infty} \left( \int_{k=-\infty}^s (e^s - e^k) e^{k(a-iu)} f_{S_{m,n}}(s) dk \right) ds \\ &= \int_{s=-\infty}^{+\infty} f_{S_{m,n}}(s) \left\{ e^s \int_{k=-\infty}^s e^{k(a-iu)} dk - \int_{k=-\infty}^s e^{k(a-iu+1)} dk \right\} ds \\ &= \int_{s=-\infty}^{+\infty} f_{S_{m,n}}(s) \frac{e^{(1+a+iu)s}}{(a+iu)(1+a+iu)} ds = \frac{\phi_{T_m}(1+a+iu)}{(a+iu)(1+a+iu)}. \end{aligned}$$

Enfin, pour retrouver  $G_{T_m}(k)$  et donc le prix de la swaption, il suffit de calculer la transformée de Fourier inverse de  $\mathcal{G}(u)$  :

$$G_{T_m}(k) = \frac{e^{-ak}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iuk} \mathcal{G}(u) du.$$

### C.3 Développement en série de Gram-Charlier

La variable d'intérêt est le taux swap à terme  $S_{m,n}(T_m)$ . En reprenant les notations de la Section 4.3.3 la valeur de la swaption s'écrit :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \int_{\mathbb{R}} \eta(s) f_{T_m}(s) ds.$$

On se place dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}_r^2$  introduit dans la Section 4.3.2. L'espérance  $\mu_r$  de la loi gaussienne de référence  $\varphi_r$  est fixée à  $S_{m,n}(0)$  et sa variance est notée  $\sigma_r$ . Le ratio de vraisemblance de la densité du taux swap à terme par rapport à la gaussienne de référence  $\bar{f}_{T_m}(s) = f_{T_m}(s)/\varphi_r(s)$  peut être approché par une série de Gram-Charlier d'ordre  $N$  dans l'espace de Hilbert associé à  $\varphi_r$  :

$$\bar{f}_{T_m}(s) = \sum_{n=0}^N \langle \bar{f}_{T_m}, \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2} \check{H}_p(s)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) &= B_{m,n}^S(0) \int_{\mathbb{R}} \eta(s) \varphi_r(s) \frac{f_{T_m}(s)}{\varphi_r(s)} ds = B_{m,n}^S(0) \int_{\mathbb{R}} \eta(s) \varphi_r(s) \sum_{n=0}^N \langle \bar{f}_{T_m}, \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2} \check{H}_p(s) ds \\ &= B_{m,n}^S(0) \sum_{n=0}^N \langle \bar{f}_{T_m}, \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2} \int_{\mathbb{R}} \eta(s) \varphi_r(s) \check{H}_p(s) ds \\ &= B_{m,n}^S(0) \sum_{n=0}^N \langle \bar{f}_{T_m}, \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2} \times \langle \eta(s), \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2}. \end{aligned}$$

$\langle \bar{f}_{T_m}, \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2}$  se calcule en reprenant l'expression explicite des polynôme de Hermite donnée par l'Équation (4.6) :

$$\langle \bar{f}_{T_m}, \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2} = \int_{\mathbb{R}} f_{T_m}(u) \check{H}_p(u) du = \frac{1}{\sqrt{p!}} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \frac{(-1)^k p!}{2^k k! (p-2k)!} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ (S_{m,n}(T_m) - \mu_r)^{p-2k} \right]}{(\sigma_r)^{p-2k}}.$$

Le premier polynôme de Hermite standardisé est  $\check{H}_1 = 1$  :

$$\begin{aligned} \langle \eta(s), \check{H}_1 \rangle_{\mathcal{L}_r^2} &= \int_{\mathbb{R}} (s - K)^+ \varphi_r(s) ds = \int_K^{+\infty} (s - K) \varphi_r(s) ds \\ &= \sigma_r \varphi \left( \frac{\mu_r - K}{\sigma_r} \right) + (\mu_r - K) \phi \left( \frac{\mu_r - K}{\sigma_r} \right). \end{aligned}$$

$\langle \eta(s), \check{H}_2 \rangle_{\mathcal{L}_r^2}$  est multiplié dans la série par le terme  $\langle \bar{f}_{T_m}, \check{H}_2 \rangle_{\mathcal{L}_r^2} = 0$  et ne sera donc pas calculé. Pour les termes d'indice supérieur,  $\langle \eta(s), \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2}$  est calculé en utilisant la définition des polynômes de Hermite à partir de la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de la densité  $\varphi(x)$  d'une loi normale donnée par la Définition (12). Adaptée aux polynômes de Hermite standardisés associées à  $\varphi_r(x)$  cette formule devient :

$$\frac{d^n \varphi_r(x)}{dx^n} = (-1)^n (\sigma_r)^{-n} \sqrt{n!} \check{H}_n(x) \varphi_r(x).$$

En injectant cette expression dans la formule de  $\langle \eta(s), \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2}$  :

$$\begin{aligned} \langle \eta(s), \check{H}_p \rangle_{\mathcal{L}_r^2} &= \int_{\mathbb{R}} (s - K)^+ \check{H}_p(s) \varphi_r(s) ds = \int_K^{+\infty} (s - K) \frac{(-1)^p (\sigma_r)^p}{\sqrt{p!}} \frac{d^p \varphi_r(s)}{ds^p} ds \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^p (\sigma_r)^p}{\sqrt{p!}} \frac{d^{p-1} \varphi_r(s)}{ds^{p-1}} ds = - \left[ \frac{(-1)^p (\sigma_r)^p}{\sqrt{p!}} \frac{d^{p-2} \varphi_r(s)}{ds^{p-2}} \right]_K^{+\infty} \\ &= \frac{\sigma_r^2}{\sqrt{p(p-1)}} \check{H}_{p-2}(K) \varphi_r(K). \end{aligned}$$

## C.4 Développement en série de Fourier en cosinus

### C.4.1 DSF paradigme normal

En reprenant les notations utilisées dans la Section 4.4.2, avec  $\Psi_{T_m}(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [e^{z S_{m,n}(T_m)}]$  la fonction caractéristique du taux swap à terme  $S_{m,n}(T_m)$  de densité  $f_{T_m}$ , le prix d'une swaption s'écrit :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) \int_a^b (u - K)^+ f_{T_m}^N(u) du.$$

Avec :

$$f_{T_m}^N(u) = \frac{1}{b-a} + \sum_{k=1}^N A_k \cos\left(k\pi \frac{u-a}{b-a}\right), \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \Psi_{T_m}(z) \left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \exp\left(-i \frac{ka\pi}{b-a}\right) \right\}.$$

Il est admis que  $a \leq K \leq b$ , dans le cas contraire, l'optionnalité de la swaption serait absurde dans la mesure où le taux swap n'atteindrait la frontière d'exercice de la swaption qu'avec une probabilité négligeable. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) &= B_{m,n}^S(0) \int_K^b (u - K) \left( \frac{1}{b-a} + \sum_{k=1}^N A_k \cos\left(k\pi \frac{u-a}{b-a}\right) \right) du \\ &= B_{m,n}^S(0) \left( \frac{(b-K)^2}{2(b-a)} + \sum_{k=1}^N A_k \int_K^b (u - K) \cos\left(k\pi \frac{u-a}{b-a}\right) du \right). \end{aligned}$$

Le calcul de la dernière intégrale donne :

$$\int_K^b (u - K) \cos\left(k\pi \frac{u-a}{b-a}\right) du = \left(\frac{b-a}{k\pi}\right)^2 \left[ (-1)^k - \cos\left(k\pi \frac{K-a}{b-a}\right) \right].$$

Ce qui permet d'obtenir la formule du DSF dans le paradigme normal donnée par l'Équation (4.12).

### C.4.2 DSF paradigme log-normal

En reprenant les notations utilisées dans la Section 4.4.2, avec  $\Phi_{T_m}^K(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[ e^{z \log \frac{S_{m,n}(T_m)}{K}} \right]$  la fonction caractéristique de  $\log \frac{S_{m,n}(T_m)}{K}$ . Le prix d'une swaption s'écrit alors :

$$PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) = B_{m,n}^S(0) K \int_a^b (e^y - 1)^+ f_K^N(y) dy,$$

Avec :

$$f_K^N(y) = \frac{1}{b-a} + \sum_{k=1}^N A_k \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right), \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \Phi_{T_m}^K(z) \left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \exp\left(-i \frac{ka\pi}{b-a}\right) \right\}.$$



$$\begin{aligned}
PV_{swaption}(0, T_m, T_n, K) &= B_{m,n}^S(0) \int_0^b (e^y - 1) \left( \frac{1}{b-a} + \sum_{k=1}^N A_k \cos \left( k\pi \frac{y-a}{b-a} \right) \right) dy \\
&= B_{m,n}^S(0) \left( \frac{e^b - b - 1}{2(b-a)} + \sum_{k=1}^N A_k \int_0^b (e^y - 1) \cos \left( k\pi \frac{y-a}{b-a} \right) dy \right).
\end{aligned}$$

La dernière intégrale vaut :

$$\int_0^b (e^y - 1) \cos \left( k\pi \frac{y-a}{b-a} \right) dy = \frac{1}{1 + (k\pi/(b-a))^2} \left( (-1)^k e^b - \cos \left( -k\pi \frac{a}{b-a} \right) + \frac{b-a}{k\pi} \sin \left( -k\pi \frac{a}{b-a} \right) \right).$$

Ce qui permet d'obtenir la formule du DSF dans le paradigme log-normal donnée par l'Équation 4.13.

## D Annexes relatives au calibrage du DD-SV-LMM

### D.1 Algorithme de Nelder-Mead

Soit une fonction  $f$  définie sur un espace de dimension  $N$ . L'algorithme fait évoluer un ensemble de  $N+1$  points qui, au fil de son développement, vont converger vers un point où la fonction est localement minimale. Cet algorithme est défini par cinq paramètres :

- $n_{iter}$  le nombre d'itération maximal de l'algorithme (fixé à 500);
- $\alpha$  un coefficient de réflexion (fixé à 1);
- $\gamma$  un coefficient d'expansion (fixé à 2);
- $\rho$  un coefficient de contraction (fixé à 0.5);
- $\sigma$  un coefficient d'homotétie (fixé à 0.5).

Choix de  $N + 1$  points notés  $\{x_1, \dots, x_{N+1}\}$  de l'espace de inconnues de dimension  $n$ ;

**tant que**  $i < n_{iter}$  **faire**

```
┌ Ordonnancement et ré-indexation des points de manière à avoir  $f(x_1) \leq \dots \leq f(x_{N+1})$ ;  
├ Calcul du centre de gravité  $x_0$  de tous les points à l'exception de  $x_{N+1}$ ;  
├ Calcul de la réflexion  $x_r = x_0 + \alpha(x_0 - x_{N+1})$  de  $x_{N+1}$  par rapport à  $x_0$ ;  
├ si  $f(x_1) \leq f(x_r) \leq f(x_{N+1})$  alors  
│   ┌  $x_{N+1} \leftarrow x_r$ ;  
│   └  $i \leftarrow i + 1$ ;  
├ si  $f(x_r) \leq f(x_1)$  alors  
│   ┌ Calcul de  $x_e = x_0 + \gamma(x_r - x_0)$ ;  
│   └ si  $f(x_e) \leq f(x_r)$  alors  
│     ┌  $x_{N+1} \leftarrow x_e$ ;  
│     └  $i \leftarrow i + 1$ ;  
│   └ sinon  
│     ┌  $x_{N+1} \leftarrow x_r$ ;  
│     └  $i \leftarrow i + 1$ ;  
├ si  $f(x_N) \leq f(x_r)$  alors  
│   ┌ Calcul de  $x_c = x_0 + \rho(x_{N+1} - x_0)$ ;  
│   └ si  $f(x_c) \leq f(x_{N+1})$  alors  
│     ┌  $x_{N+1} \leftarrow x_c$ ;  
│     └  $i \leftarrow i + 1$ ;  
│   └ sinon  
│     ┌  $x_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1)$ ;  
│     └  $i \leftarrow i + 1$ ;
```

**Algorithme 1** : Algorithme de Nelder-Mead.

## D.2 Structure de volatilité ATM des différents jeux de données économiques

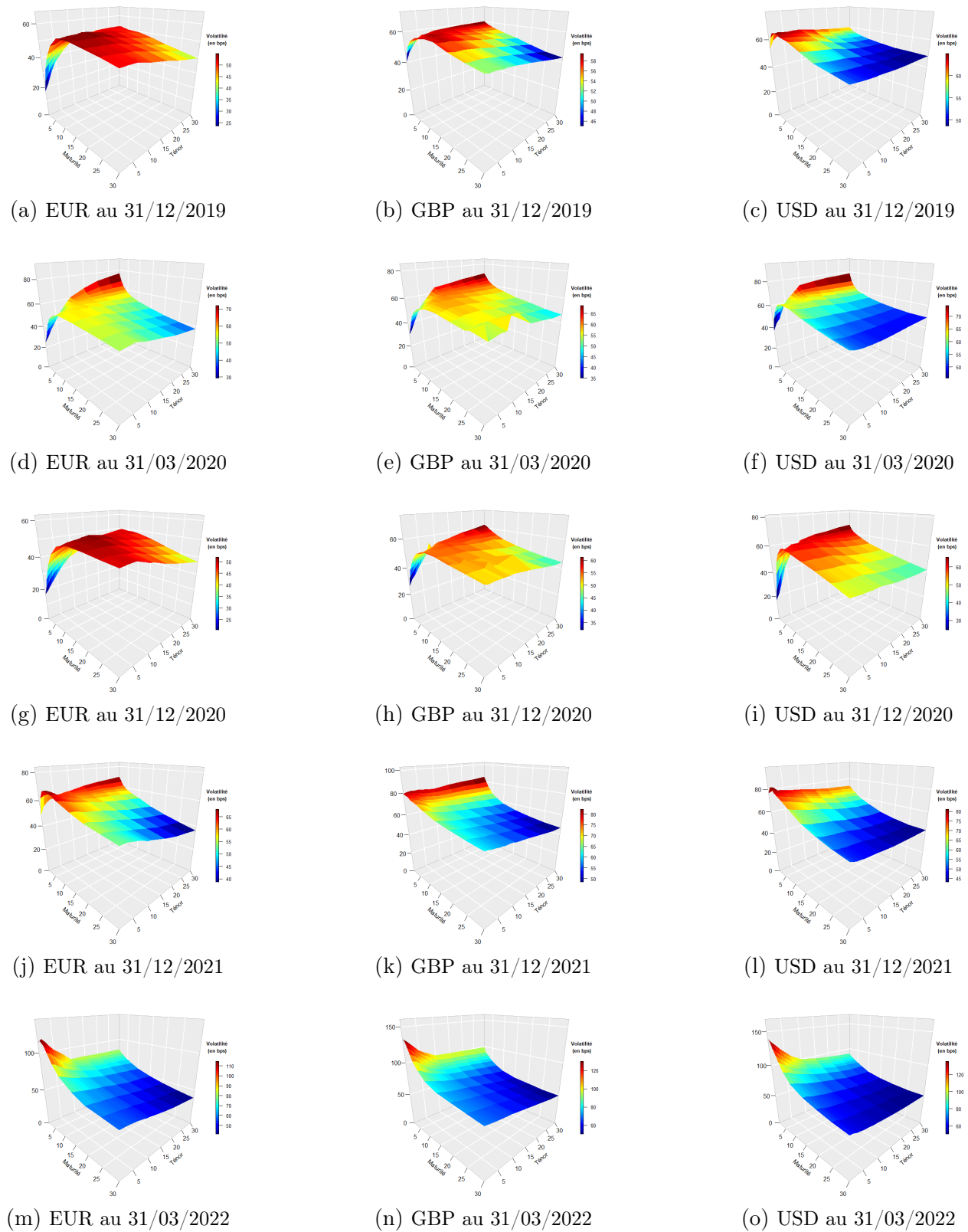


FIGURE D.1 – Nappes de volatilité ATM.

### D.3 Structure de volatilité AFM des différents jeux de données économiques

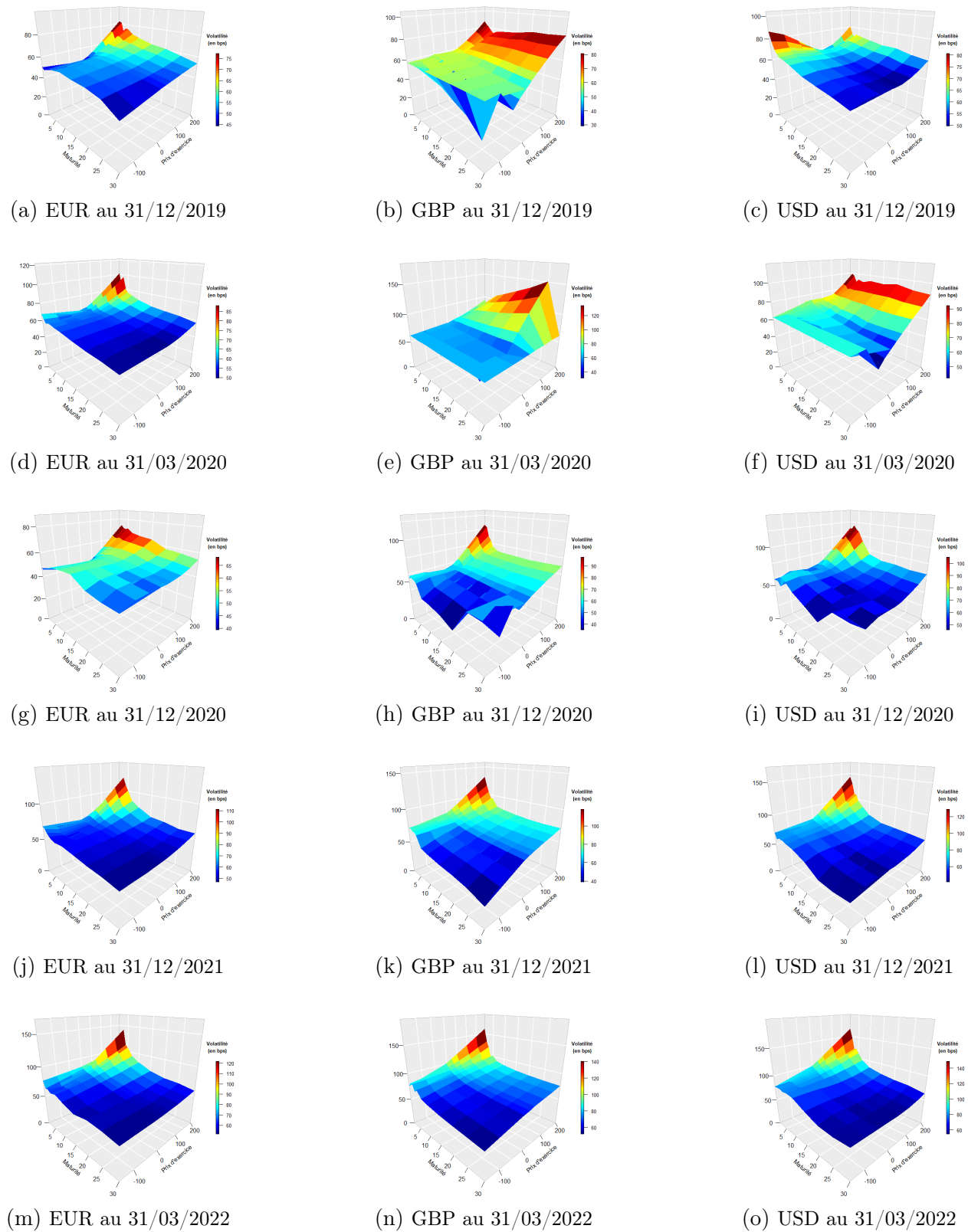


FIGURE D.2 – Nappes de volatilité AFM.

## D.4 Métriques d'écart agrégées

Méthode	Fonction objectif	$MSE_{prix}$	$RMSE_{prix}$	$MSE_{vol}$	$RMSE_{vol}$
H. LN	$MSE_{prix}$	$2.98 \cdot 10^{-5}$	$5.61 \cdot 10^{-3}$	$4.66 \cdot 10^{-7}$	$5.37 \cdot 10^{-3}$
H. LN	$RMSE_{prix}$	$3.50 \cdot 10^{-5}$	$3.95 \cdot 10^{-3}$	$3.87 \cdot 10^{-7}$	$4.23 \cdot 10^{-3}$
H. LN	$MSE_{vol}$	$3.36 \cdot 10^{-5}$	$4.61 \cdot 10^{-3}$	$3.86 \cdot 10^{-7}$	$4.35 \cdot 10^{-3}$
H. LN	$RMSE_{vol}$	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-6}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$
H. N	$MSE_{prix}$	$5.13 \cdot 10^{-5}$	$1.67 \cdot 10^{-1}$	$7.91 \cdot 10^{-7}$	$6.70 \cdot 10^{-3}$
H. N	$RMSE_{prix}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-2}$	$7.56 \cdot 10^{-7}$	$7.23 \cdot 10^{-3}$
H. N	$MSE_{vol}$	$5.47 \cdot 10^{-5}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$	$7.29 \cdot 10^{-7}$	$5.44 \cdot 10^{-3}$
H. N	$RMSE_{vol}$	$2.14 \cdot 10^{-4}$	$1.83 \cdot 10^{-1}$	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$
FFT	$MSE_{prix}$	$2.99 \cdot 10^{-5}$	$5.84 \cdot 10^{-3}$	$4.69 \cdot 10^{-7}$	$5.46 \cdot 10^{-3}$
FFT	$RMSE_{prix}$	$3.52 \cdot 10^{-5}$	$4.07 \cdot 10^{-3}$	$3.90 \cdot 10^{-7}$	$4.28 \cdot 10^{-3}$
FFT	$MSE_{vol}$	$3.43 \cdot 10^{-5}$	$4.52 \cdot 10^{-3}$	$3.88 \cdot 10^{-7}$	$4.31 \cdot 10^{-3}$
FFT	$RMSE_{vol}$	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-6}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$
G.-C. E	$MSE_{prix}$	$3.80 \cdot 10^{-5}$	$8.07 \cdot 10^{-3}$	$8.33 \cdot 10^{-7}$	$7.37 \cdot 10^{-3}$
G.-C. E	$RMSE_{prix}$	$4.51 \cdot 10^{-5}$	$6.57 \cdot 10^{-3}$	$7.88 \cdot 10^{-7}$	$6.73 \cdot 10^{-3}$
G.-C. E	$MSE_{vol}$	$4.39 \cdot 10^{-5}$	$6.88 \cdot 10^{-3}$	$7.17 \cdot 10^{-7}$	$6.05 \cdot 10^{-3}$
G.-C. E	$RMSE_{vol}$	$2.04 \cdot 10^{-4}$	$1.92 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$
DSF LN	$MSE_{prix}$	$2.94 \cdot 10^{-5}$	$6.39 \cdot 10^{-3}$	$5.03 \cdot 10^{-7}$	$6.09 \cdot 10^{-3}$
DSF LN	$RMSE_{prix}$	$3.53 \cdot 10^{-5}$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	$3.85 \cdot 10^{-7}$	$4.26 \cdot 10^{-3}$
DSF LN	$MSE_{vol}$	$3.43 \cdot 10^{-5}$	$4.67 \cdot 10^{-3}$	$3.89 \cdot 10^{-7}$	$4.50 \cdot 10^{-3}$
DSF LN	$RMSE_{vol}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$
DSF N	$MSE_{prix}$	$3.75 \cdot 10^{-5}$	$6.70 \cdot 10^{-3}$	$6.17 \cdot 10^{-7}$	$6.07 \cdot 10^{-3}$
DSF N	$RMSE_{prix}$	$4.18 \cdot 10^{-5}$	$5.01 \cdot 10^{-3}$	$4.76 \cdot 10^{-7}$	$4.85 \cdot 10^{-3}$
DSF N	$MSE_{vol}$	$3.92 \cdot 10^{-5}$	$5.32 \cdot 10^{-3}$	$4.79 \cdot 10^{-7}$	$4.88 \cdot 10^{-3}$
DSF N	$RMSE_{vol}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$

TABLE D.1 – Écart entre les valeurs de marché et les valeurs de modèle.

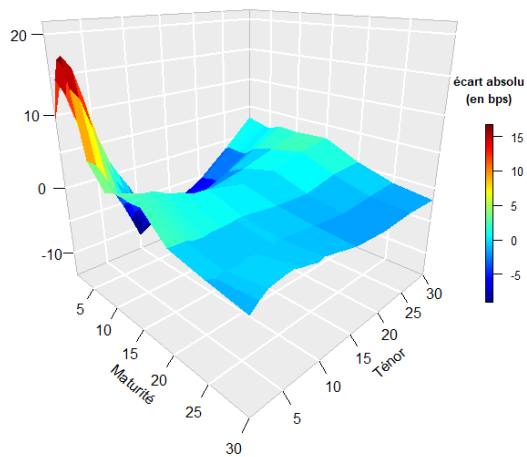
**Clef de lecture.** *Quinze calibrages, un pour chaque jeu de données économiques, ont été réalisés en minimisant la  $MSE_{prix}$  pour des prix calculés avec la méthode référence de Heston en paradigme log-normal. Pour chacun de ces calibrages, les prix de modèle optimaux ont été convertis en volatilité implicite de Bachelier et la  $RMSE_{vol}$  a été calculée entre ces quantités et les volatilités de marché, la moyenne de ces valeurs sur les quinze jeux de données économiques est de  $5.37 \cdot 10^{-3}$ .*

Méthode	Fonction objectif	$MSE_{prix}$	$RMSE_{prix}$	$MSE_{vol}$	$RMSE_{vol}$
H. LN	$MSE_{prix}$	$3,61 \cdot 10^{-05}$	$6,21 \cdot 10^{-07}$	$7,66 \cdot 10^{-03}$	$7,47 \cdot 10^{-03}$
H. LN	$RMSE_{prix}$	$4,28 \cdot 10^{-05}$	$5,99 \cdot 10^{-07}$	$1,10 \cdot 10^{-02}$	$6,69 \cdot 10^{-03}$
H. LN	$MSE_{vol}$	$3,78 \cdot 10^{-05}$	$5,09 \cdot 10^{-07}$	$6,01 \cdot 10^{-03}$	$5,92 \cdot 10^{-03}$
H. LN	$RMSE_{vol}$	$1,93 \cdot 10^{-04}$	$1,16 \cdot 10^{-06}$	$1,63 \cdot 10^{-02}$	$1,45 \cdot 10^{-02}$
H. N	$MSE_{prix}$	$3,69 \cdot 10^{-05}$	$6,26 \cdot 10^{-07}$	$7,71 \cdot 10^{-03}$	$8,09 \cdot 10^{-03}$
H. N	$RMSE_{prix}$	$4,46 \cdot 10^{-05}$	$6,45 \cdot 10^{-07}$	$2,20 \cdot 10^{-02}$	$1,06 \cdot 10^{-02}$
H. N	$MSE_{vol}$	$3,78 \cdot 10^{-05}$	$5,22 \cdot 10^{-07}$	$6,73 \cdot 10^{-03}$	$6,65 \cdot 10^{-03}$
H. N	$RMSE_{vol}$	$1,92 \cdot 10^{-04}$	$1,17 \cdot 10^{-06}$	$1,81 \cdot 10^{-02}$	$1,65 \cdot 10^{-02}$
FFT	$MSE_{prix}$	$3,62 \cdot 10^{-05}$	$6,24 \cdot 10^{-07}$	$7,78 \cdot 10^{-03}$	$7,44 \cdot 10^{-03}$
FFT	$RMSE_{prix}$	$4,27 \cdot 10^{-05}$	$5,89 \cdot 10^{-07}$	$1,10 \cdot 10^{-02}$	$6,63 \cdot 10^{-03}$
FFT	$MSE_{vol}$	$3,87 \cdot 10^{-05}$	$5,11 \cdot 10^{-07}$	$6,05 \cdot 10^{-03}$	$6,11 \cdot 10^{-03}$
FFT	$RMSE_{vol}$	$1,93 \cdot 10^{-04}$	$1,16 \cdot 10^{-06}$	$1,63 \cdot 10^{-02}$	$1,45 \cdot 10^{-02}$
G.-C. E	$MSE_{prix}$	$3,85 \cdot 10^{-05}$	$6,75 \cdot 10^{-07}$	$8,94 \cdot 10^{-03}$	$7,65 \cdot 10^{-03}$
G.-C. E	$RMSE_{prix}$	$5,10 \cdot 10^{-05}$	$6,98 \cdot 10^{-07}$	$9,08 \cdot 10^{-03}$	$8,29 \cdot 10^{-03}$
G.-C. E	$MSE_{vol}$	$4,23 \cdot 10^{-05}$	$6,03 \cdot 10^{-07}$	$8,13 \cdot 10^{-03}$	$6,99 \cdot 10^{-03}$
G.-C. E	$RMSE_{vol}$	$2,08 \cdot 10^{-04}$	$1,29 \cdot 10^{-06}$	$1,99 \cdot 10^{-02}$	$1,64 \cdot 10^{-02}$
DSF LN	$MSE_{prix}$	$3,68 \cdot 10^{-05}$	$6,55 \cdot 10^{-07}$	$8,34 \cdot 10^{-03}$	$8,33 \cdot 10^{-03}$
DSF LN	$RMSE_{prix}$	$4,28 \cdot 10^{-05}$	$5,52 \cdot 10^{-07}$	$1,11 \cdot 10^{-02}$	$6,49 \cdot 10^{-03}$
DSF LN	$MSE_{vol}$	$3,97 \cdot 10^{-05}$	$5,16 \cdot 10^{-07}$	$6,44 \cdot 10^{-03}$	$6,41 \cdot 10^{-03}$
DSF LN	$RMSE_{vol}$	$1,89 \cdot 10^{-04}$	$1,15 \cdot 10^{-06}$	$1,65 \cdot 10^{-02}$	$1,49 \cdot 10^{-02}$
DSF N	$MSE_{prix}$	$3,74 \cdot 10^{-05}$	$6,50 \cdot 10^{-07}$	$7,89 \cdot 10^{-03}$	$8,13 \cdot 10^{-03}$
DSF N	$RMSE_{prix}$	$4,45 \cdot 10^{-05}$	$6,21 \cdot 10^{-07}$	$1,45 \cdot 10^{-02}$	$7,46 \cdot 10^{-03}$
DSF N	$MSE_{vol}$	$3,78 \cdot 10^{-05}$	$5,19 \cdot 10^{-07}$	$6,30 \cdot 10^{-03}$	$6,38 \cdot 10^{-03}$
DSF N	$RMSE_{vol}$	$1,89 \cdot 10^{-04}$	$1,15 \cdot 10^{-06}$	$1,65 \cdot 10^{-02}$	$1,49 \cdot 10^{-02}$

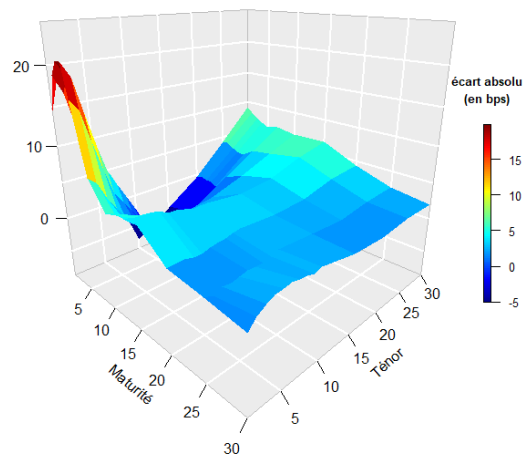
TABLE D.2 – Écart entre les valeurs de marché et les valeurs de Monte-Carlo.

**Clef de lecture.** *Quinze calibrages, un pour chaque jeu de données économiques, ont été réalisés en minimisant la  $MSE_{prix}$  pour des prix calculés avec la méthode référence de Heston en paradigme log-normal. Pour chacun de ces calibrages, les prix Monte-Carlo obtenus en simulant la diffusion du DD-SV-LMM à l'aide du paramétrage optimal ont été convertis en volatilité implicite de Bachelier et la  $RMSE_{vol}$  a été calculée entre ces quantités et les volatilités de marché, la moyenne de ces valeurs sur les quinze jeux de données économiques est de  $7.47 \cdot 10^{-3}$ .*

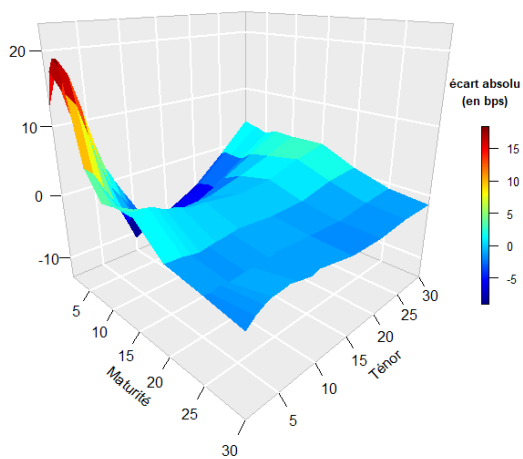
## D.5 Structure de volatilité ATM et AFM



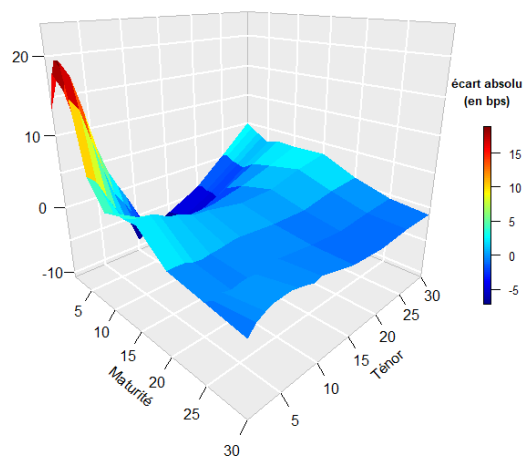
(a) Méthode de Heston en paradigme normal



(b) Méthode de Gram-Charlier

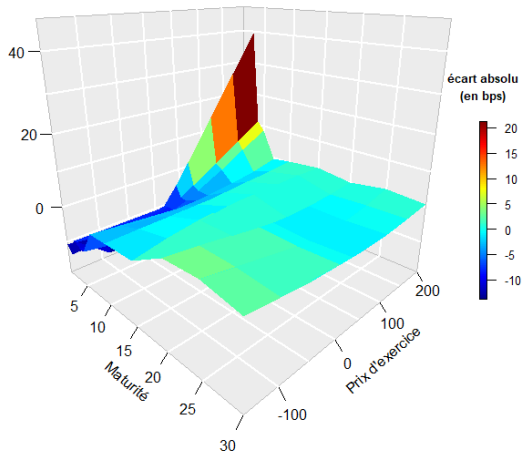


(c) Méthode du DSF en paradigme log-normal

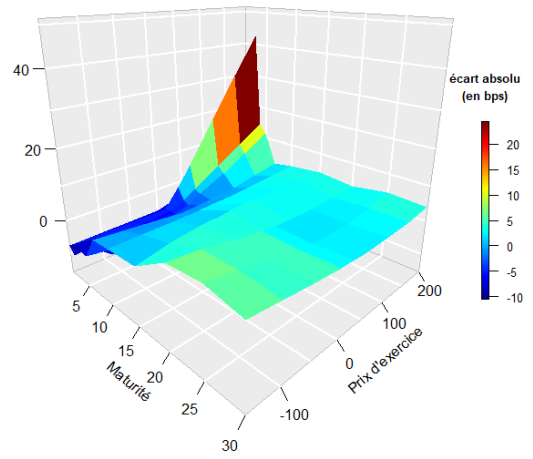


(d) Méthode du DSF en paradigme normal

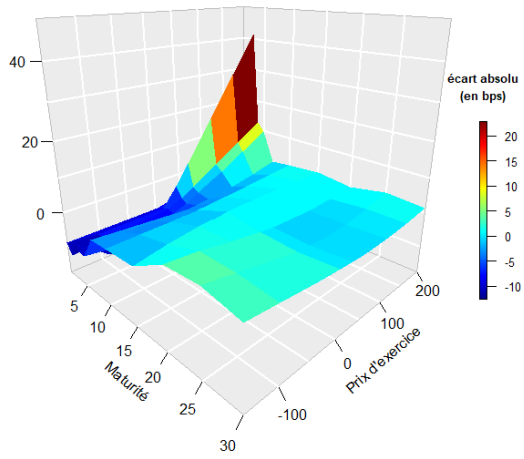
FIGURE D.3 – Écarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités Monte-Carlo pour des swaptions à la monnaie.



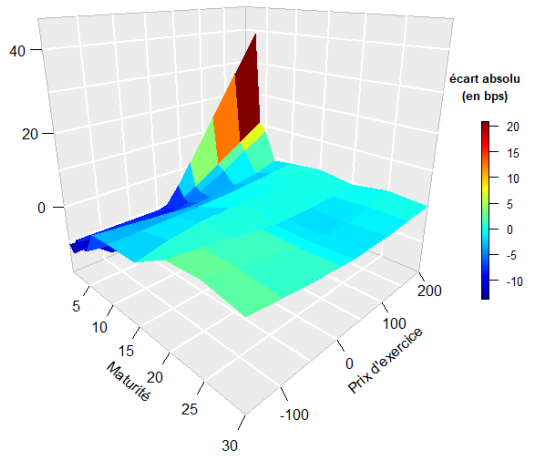
(a) Méthode de Heston en paradigme normal



(b) Méthode de Gram-Charlier



(c) Méthode du DSF en paradigme log-normal



(d) Méthode du DSF en paradigme normal

FIGURE D.4 – Écarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités Monte-Carlo pour des swaptions en dehors de la monnaie.



## E Annexes relatives à la modélisation ALM

### E.1 Modèle utilisé pour l'indice action

Le modèle de Black & Scholes à volatilité déterministe par terme est une extension du modèle log-normal de Black & Scholes. L'indice action noté  $S_t$  suit la dynamique suivante sous la probabilité risque-neutre :

$$dS_t = S_t (r_t dt + \sigma(t) dZ_t).$$

Où  $r_t$  est le processus déterministe ou stochastique associé au taux court,  $\sigma(t)$  une fonction de volatilité déterministe dépendante du temps et  $Z_t$  un mouvement brownien standard sous la probabilité risque-neutre. L'équation différentielle stochastique précédente est résolue par application de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d \log (S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (S_t \sigma(t))^2 dt \\ &= \left( r_t - \frac{\sigma(t)^2}{2} \right) dt - \sigma(t) dZ_t. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_t = S_0 \exp \left( \int_0^t \left( r_s - \frac{\sigma(s)^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dZ_s \right).$$

Dans ce modèle, le prix d'un call de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  s'écrit :

$$\begin{aligned} PS(T, K, \sigma(t)) &= \exp \left( \int_0^t r_s ds \right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+] \\ &= S_0 \Phi(d_1) - K \exp \left( - \int_0^t r_s ds \right) \Phi(d_2), \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\log \left( \frac{S_0}{K} \right) + \int_0^t \left( r_s - \frac{\sigma(s)^2}{2} \right) ds}{\sqrt{\int_0^t \sigma(s)^2 ds}}, \\ d_2 = \frac{\log \left( \frac{S_0}{K} \right) + \int_0^t \left( r_s + \frac{\sigma(s)^2}{2} \right) ds}{\sqrt{\int_0^t \sigma(s)^2 ds}}. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Pour des données de calibrage correspondant à des volatilités implicites d'options à la monnaie de maturités différentes, le modèle de Black & Scholes à volatilité déterministe par terme permet de répliquer parfaitement la structure de volatilité de marché.

## E.2 Table de mortalité utilisée

Age	Taux de mortalité	Age	Taux de mortalité
50	0,179%	76	2,689%
51	0,202%	77	2,943%
52	0,222%	78	3,310%
53	0,251%	79	3,807%
54	0,293%	80	4,386%
55	0,343%	81	5,005%
56	0,376%	82	5,905%
57	0,414%	83	6,654%
58	0,449%	84	7,613%
59	0,458%	85	8,579%
60	0,479%	86	9,704%
61	0,515%	87	10,698%
62	0,548%	88	11,844%
63	0,593%	89	13,143%
64	0,673%	90	14,928%
65	0,745%	91	16,418%
66	0,821%	92	18,151%
67	0,923%	93	20,218%
68	1,052%	94	22,024%
69	1,196%	95	24,144%
70	1,383%	96	26,114%
71	1,576%	97	28,156%
72	1,772%	98	30,273%
73	2,003%	99	32,464%
74	2,217%	100	34,723%
75	2,415%		

TABLE E.1 – Table de mortalité utilisée pour la modélisation ALM (extraite de la TGH05).