

**Mémoire présenté pour la validation de la Formation
« Certificat d'Expertise Actuarielle »
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires
le 8 juillet 2021**

Par : Céline REMAL

Titre : Quels critères d'optimisation pour une étude ALM d'une institution de prévoyance ?

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut des
actuaires :*

Entreprise : PRO BTP

Nom : _____

Signature et Cachet :

*Membres présents du jury de l'Institut du Risk
Management :*

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Omar HAMAOU

Signature :

Invité :

Nom : _____

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature(s) du candidat(s)

Secrétariat :

Bibliothèque :

Résumé

Afin de faire face à ses engagements, l'institution de prévoyance BTP Prévoyance investit les primes perçues sur des actifs financiers. Ces placements financiers permettent d'apporter à l'institution une source de revenus supplémentaires mais également des risques additionnels. Se pose alors la problématique de quelle part des primes allouer à quel type d'actif afin de respecter les engagements pris au passif.

A travers ce mémoire, nous avons cherché à définir l'allocation dite « optimale » pour l'institution. Pour cela nous avons choisi une métrique de décision orientée assuré : taux de revalorisation $S1$; et une métrique de décision orientée assureur : rendement des fonds propres $S2$. La théorie de l'utilité espérée appliquée à ces métriques nous a permis de modéliser le comportement des différents individus et déterminer l'allocation optimale d'un set d'allocations, en maximisant sous contraintes une combinaison des deux espérances d'utilité.

Cette étude a permis de mettre en exergue l'intérêt des investissements en infrastructures et en Private Equity (classe « diversifié ») qui grâce à leur espérance de performance élevée et leur faible volatilité permettent une réelle amélioration de l'espérance de rendement des fonds propres $S2$ pour un risque légèrement supérieur à celui de l'allocation courante. Ces actifs disposent également de revenus récurrents confortables qui viendront alimenter la revalorisation. En revanche, ils sont relativement couteux en capital et entraînent une dégradation de l'espérance de ratio de solvabilité qui reste néanmoins supérieure à 200% grâce à l'intégration de cette contrainte dans notre problématique.

La réalisation de sensibilités sur la contrainte d'espérance de ratio a montré que si l'on souhaite l'améliorer, il faut être prêt à renoncer à du rendement de fonds propres prudentiels en favorisant la poche obligataire au détriment du diversifié. Dans une moindre mesure, il faut également être prêt à diminuer le niveau de revalorisation des engagements.

Enfin, l'augmentation du poids affecté à la revalorisation (fixé à 2 dans la problématique) va quant à elle, permettre de définir des allocations « optimales » avec une espérance de revalorisation plus importante que l'allocation cible et avec une espérance de rendement de fonds propres moindre pour un niveau de risque quasiment équivalent. Cela se fera grâce à la diminution du monétaire au profit de l'obligataire.

Mots clés : ALM, gestion actif-passif, prévoyance, politique financière, Solvabilité 2, fonction d'utilité.

Abstract

In order to fulfil its commitments, the institution BTP Prévoyance invests received premiums on financial assets. These financial investments provide an additional source of income to the institution but also generate additional risks. This raises the issue of what share of the premiums to allocate to what type of asset in order to meet its commitments.

Through this thesis, we have sought to define the optimal assets allocation for the institution. To that aim, we have chosen an insured-oriented decision metric : re-valuation rate S1 of the liabilities, as well as an insurer-oriented decision metric : the return on Solvency 2 own funds. The expected utility hypothesis applied to these metrics allowed us to model the behavior of these two individuals and to determine the optimal allocation of the tested allocations by maximizing under constraints a combination of the two utility expectations.

This study highlights the benefit of investing in infrastructure and private equity ("diversified" class). Their high performance expectation and their low volatility, allow a noticeable improvement in the expected return on Solvency 2 own funds for a slightly higher risk than the current allocation. These assets also have comfortable recurring income that will fuel the re-valuation. Even though, they are relatively costly in terms of capital and lead to a deterioration in the expected solvency ratio which nevertheless remains above 200% thanks to the integration of this constraint in our problematic.

The realisation of sensitivities on the expected ratio constraint showed that if we want to improve it, we must be ready to give up return on Solvency 2 own funds and favor the bond share at the detriment of the diversified one. To a lesser extent, we must also be prepared to reduce the level of re-valuation of commitments.

Finally, the increase in the weight assigned to the liabilities re-valuation (set at 2 in the problematic) will allow us to define "optimal" allocations with an expected re-valuation greater than the target allocation and with an expected Solvency 2 own funds lower for an almost equivalent level of risk. This will be done through the decrease in monetary share for the benefit of the bonds share.

Keywords : Asset and Liability Management (ALM), provident fund, financial policy, Solvency 2, utility function.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Omar HAMAOU, responsable de l'équipe Pilotage Financier et ALM au sein de la Direction de l'Actuariat et du Pilotage Financier (DAPFi) de PRO BTP pour m'avoir proposé un sujet motivant et m'avoir encadré dans la rédaction de ce mémoire.

J'adresse également un grand remerciement à toute l'équipe Pilotage Financier et ALM, pour son soutien et pour l'aide précieuse qu'elle m'a apportée.

Enfin, je souhaite témoigner ma reconnaissance à mes proches pour leur soutien, sans lequel, tout cela n'aurait pas été possible.

Table des matières

1. Introduction.....	6
2. Contexte et problématique	7
2.1. Contexte	7
2.2. Problématique.....	9
3. Analyse	10
3.1. Analyse du portefeuille	10
3.2. Choix de l'allocation optimale.....	22
3.3. Objectif final	30
4. Modélisation.....	33
4.1. Principes organisationnels et fonctionnels	33
4.2. Modélisation de l'actif.....	35
4.3. Interaction Actif-Passif	40
4.4. Calcul des indicateurs S2	42
5. Applications	43
5.1. Situation initiale	45
5.2. Recherche de l'allocation optimale.....	58
5.3. Sensibilités.....	66
6. Conclusion	78
7. Bibliographie.....	79
8. Annexes	80
8.1. SCR marché.....	80
8.2. Scénarios	83
8.3. Passif.....	87

1. Introduction

En tant qu'institution de prévoyance, BTP Prévoyance perçoit des primes et s'engage sous certaines conditions à payer des prestations en cas de sinistres futurs.

Les primes encaissées sont connues alors que les prestations qui seront à verser, ne le sont pas au moment de la réception de ces primes. Ces prestations futures sont estimées et des provisions sont évaluées par des calculs actuariels (**passif**).

Afin d'honorer ses engagements futurs, BTP Prévoyance mutualise ses contrats. Les primes qui ne sont pas immédiatement reversées à des assurés vont être investies dans des actifs financiers (**actifs**).

Les placements financiers permettent d'apporter à l'institution une source de revenus supplémentaires, en particulier sur les engagements longs, mais également des risques additionnels.

Se pose alors la problématique de quelle part des primes allouer à quel type d'actif afin de respecter les engagements pris au passif.

La gestion actif-passif (Asset Liability Management (ALM) en anglais) vise à répondre à cette problématique. En effet, elle consiste entre autres à identifier et à évaluer les risques à l'actif et au passif, présents ou prévisibles au bilan des référentiels comptable, prudentiel et valeur, compte tenu d'hypothèses prospectives financières, techniques et commerciales à une date d'évaluation donnée ; puis à mettre en œuvre des actions de mitigation de ces risques afin de mieux maîtriser les trajectoires futures.

A travers ce mémoire, nous cherchons à définir l'allocation dite « optimale » pour l'institution de prévoyance BTP Prévoyance. Pour cela nous avons choisi une métrique de décision orientée assuré et une métrique de décision orientée assureur. La théorie de l'utilité espérée appliquée à ces métriques nous a permis de modéliser le comportement des différents individus et d'établir un classement des allocations testées pour in fine choisir l'allocation cible.

Ce mémoire s'articule en quatre grandes parties.

La première partie de ce mémoire établira le contexte de l'étude à travers une brève présentation de la politique financière et du cadre réglementaire de Solvabilité 2. Nous exposerons ensuite la problématique de ce mémoire.

Après l'analyse du portefeuille actif et passif de l'institution, nous chercherons dans la deuxième partie à définir des métriques de décision pour notre allocation dite « optimale ». Les rappels académiques sur la théorie de l'utilité espérée et le choix des fonctions à utiliser dans notre problématique nous permettront d'aboutir à sa forme analytique.

La troisième partie de ce mémoire se concentre sur l'outil utilisé et donc sur la modélisation de l'actif, du passif et des interactions actif-passif.

Enfin, la dernière partie est consacrée à la résolution numérique de notre problématique en se basant sur des données de fin décembre 2018. Nous allons donc dans un premier temps rechercher l'allocation cible puis dans un second, réaliser des sensibilités qui permettront de mieux appréhender l'impact des différents choix et hypothèses sur l'allocation cible.

2. Contexte et problématique

A travers une brève présentation de la politique financière et du cadre réglementaire de Solvabilité 2, nous établirons le contexte de notre étude. Nous exposerons par la suite sa problématique.

2.1. Contexte

2.1.1. Politique financière

Chaque année, l'exercice de définition de la politique financière de BTP Prévoyance a lieu. La politique financière permet d'établir le cadre de référence des décisions financières en accord avec la politique générale de l'institution. Elle définit et hiérarchise les objectifs et les contraintes en matière de gestion financière à moyen terme (gestion stratégique). La gestion à court terme visant à saisir des opportunités du marché (gestion tactique) est quant à elle, laissée à la main des gérants d'actifs mais doit respecter les objectifs et contraintes de la politique financière.

L'expression de la politique financière passe notamment par la définition de l'allocation cible et ses marges de manœuvre.

Actuellement, BTP Prévoyance définit son allocation d'actifs cible en se basant sur le pilotage du ratio de Solvabilité 2. Cette contrainte provient de la définition de l'objectif stratégique de l'institution et de son appétence au risque qui donne le niveau de risque que l'institution considère comme acceptable. A ce titre, elle constitue ainsi l'un des principaux indicateurs de risque pour le pilotage stratégique de l'institution.

2.1.2. Solvabilité 2

Depuis le 1er Janvier 2016, les entreprises du secteur assurantiel (compagnies d'assurance, de réassurance, mutuelles, bancassureurs, et institutions de prévoyance) sont soumises à la réglementation Solvabilité II pour le calcul de leur besoin en capital et de leurs fonds propres prudentiels. Son but est de définir des exigences de solvabilité harmonisées en Europe, et d'encourager les entreprises à mieux connaître et évaluer les risques auxquels elles sont exposées.

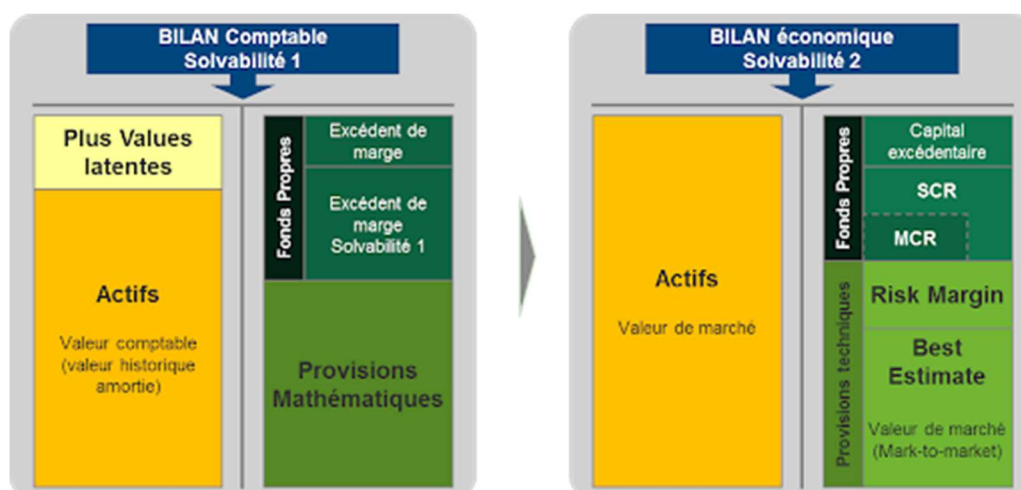
2.1.2.1. *Ratio de Solvabilité*

Le ratio de Solvabilité est obtenu en rapportant les Fonds Propres Prudentiels (FPP) au Capital de Solvabilité Requis (SCR). Si le ratio est supérieur à 100% alors l'institution est considérée comme réglementairement solvable, sinon elle est réglementairement insolvable.

2.1.2.2. *Bilan et Fonds Propres Prudentiels*

Les Fonds Propres prudentiels sont calculés par différence entre les actifs du bilan prudentiel et les provisions techniques (Best Estimate et Risk Margin).

Du bilan comptable au bilan économique Solvabilité 2 (ou bilan prudentiel) :



Les actifs du bilan prudentiel Solvabilité 2 sont valorisés de façon économique c'est-à-dire en valeur de marché.

Le passif du bilan prudentiel Solvabilité 2 est aussi estimé à sa valeur économique réelle (Fair Value), c'est-à-dire à la valeur à laquelle il serait vendu à une autre entreprise. Il est composé des Fonds Propres Prudentiel (FPP), de la Marge pour Risque (MR) et du *Best Estimate* (BE).

2.1.2.3. SCR

Le Capital de Solvabilité Requis (SCR) correspond au niveau minimum de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour s'assurer avec une probabilité de 99.5% de ne pas être en faillite à horizon 1 an. Le SCR représente donc le capital requis nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur.

Afin d'évaluer ce capital, les assureurs disposent de trois méthodes : l'application de la formule standard, le développement d'un modèle interne ou l'utilisation d'un modèle interne partiel. BTP Prévoyance a opté pour la formule standard. Celle-ci repose sur une approche modulaire des risques. Les risques sont décomposés en modules du même type, eux-mêmes décomposés en sous-modules comme le montre la figure ci-dessous.



La gestion des actifs n'a d'influence ni sur les risques de souscription (Vie, Non-Vie et Santé), ni sur les risques opérationnels et le risque incorporels. Nous considérons son impact faible sur le risque de contrepartie (lié uniquement à la trésorerie en banque). Aussi, dans le cadre de ce mémoire, nous n'aborderons que le SCR de marché directement en lien avec la gestion des actifs.

Le risque de marché résulte de l'incertitude liée à l'évolution des valeurs de marché des instruments financiers ayant un impact sur l'actif ou le passif du bilan. Le SCR marché est composé de six sous-modules (cf annexe) :

- **Le risque de taux** qui correspond à la perte de fonds propres économiques occasionnée par un choc instantané à la hausse/baisse de la courbe des taux de référence (communiquée mensuellement par l'EIOPA).
- **Le risque action** qui correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une baisse instantanée du cours des actions. Il est lui-même composé de 4 sous modules (Type 1, type 2, investissements d'infrastructure éligibles et investissements en sociétés d'infrastructure éligibles).
- **Le risque immobilier** qui correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une baisse instantanée de la valeur des investissements immobiliers.
- **Le risque de spread** qui correspond au risque de variation à la baisse des marges (spread) de crédit par rapport à la courbe des taux d'intérêt sans risque.
- **Le risque de change** qui correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une variation du taux de change à la hausse ou à la baisse.
- **Le risque de concentration** qui correspond à la perte de fonds propres qui résulterait d'une diminution soudaine de la valeur des actifs correspondant à l'exposition sur signature unique.

2.2. Problématique

Si le ratio de Solvabilité S2, en tant que contrainte réglementaire, permet de s'assurer de la solvabilité de l'institution et est donc essentielle à toute prise de décision, il n'apparaît pas comme étant la seule métrique à pouvoir contribuer à un pilotage efficace.

La performance des actifs, le résultat financier, la performance des fonds propres prudentiels, etc. sont autant d'indicateurs qui peuvent entrer dans le pilotage stratégique.

Mais alors quel(s) critère(s) d'optimisation faut-il retenir pour définir l'allocation d'actif optimale de BTP Prévoyance ?

Nous avons donc cherché d'autres métriques permettant d'établir l'allocation cible de l'institution grâce à l'étude du portefeuille actif et passif.

3. Analyse

A travers l'analyse du portefeuille actif et passif et l'étude de la théorie de l'utilité espérée, cette deuxième partie reprend les réflexions menées pour aboutir à l'expression analytique de la problématique.

3.1. Analyse du portefeuille

3.1.1. Portefeuille Passif

Après une présentation générale de l'assurance prévoyance et santé, nous verrons les produits constituant le passif de l'institution BTP Prévoyance.

3.1.1.1. L'assurance Prévoyance et Santé en France

Les institutions de prévoyance sont des organismes d'assurance réglementés, spécialisés en santé et prévoyance à destination des salariés. La majorité des institutions de prévoyance appartient à des groupes paritaires de protection sociale (GPS). Ces dernières font partie des principaux acteurs du système de protection sociale français, et permettent de compléter le système de Sécurité Sociale pour de nombreuses personnes.

[La protection sociale](#)

La protection sociale désigne les différents mécanismes permettant aux individus de faire face aux risques sociaux, c'est-à-dire aux situations qui engendrent une baisse de leurs ressources ou une hausse de leurs dépenses, susceptibles de compromettre leur sécurité économique ou celle de leur famille.

Le champ d'intervention de la protection sociale est restreint aux risques sociaux suivants :

- maladie ;
- invalidité ;
- accidents du travail et maladies professionnelles ;
- vieillesse - survie ;
- famille ;
- emploi ;
- logement ;
- pauvreté - exclusion sociale.

Les risques maladie et invalidité intègrent à la fois les dépenses de soins de santé (consultations médicales, médicaments, etc.) et la compensation des diminutions de salaire consécutives à une interruption temporaire ou permanente de travail pour raison de santé.

Ressources en 2017 :

Le financement du système de protection sociale français provient principalement des cotisations sociales patronales et salariales et des impôts et taxes (contribution sociale généralisée (CSG) et contribution au remboursement de la dette sociale (CRDS)).

Mds €	Ressources	% Ressources
Cotisations sociales	474,9	60,9%
Impôts et taxes	188,9	24,2%
Contributions publiques	96,2	12,3%
Autres	19,8	2,5%
Total	779,7	100%

Source : La protection sociale en France et en Europe en 2017 - Résultats des comptes de la protection sociale - édition 2019

Dépenses en 2017 :

Les dépenses de protection sociale concernent en majorité les pensions de retraite (45,5% des dépenses) et les prestations de santé (35% des dépenses) qui recouvrent notamment les prestations de prévoyance payées en compensation des pertes de revenus liées à une incapacité à travailler, temporaire ou permanente voire à un décès, à l'issue d'un accident ou d'une maladie.

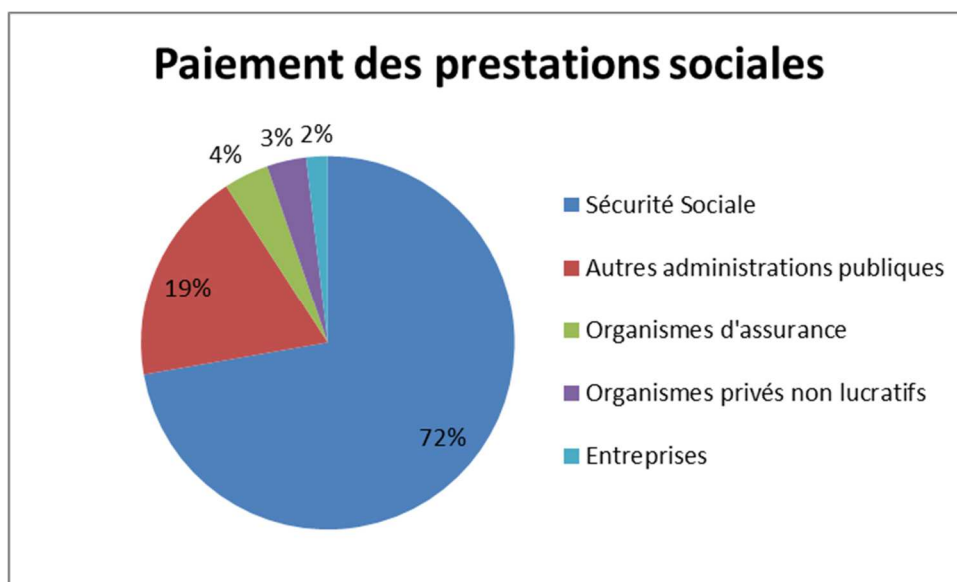
Mds €	Prestations	% Prestations
Vieillesse - survie	331,1	45,5%
Santé	255,8	35,0%
<i>Maladie</i>	208,8	28,7%
<i>Invalidité</i>	40,1	5,5%
<i>Accidents de travail</i>	6,9	0,8%
Famille	55,2	7,6%
Emploi	44,3	6,1%
Logement	18,5	2,5%
Pauvreté - exclusion sociale	23,1	3,2%
Total	727,9	100%

Source : La protection sociale en France et en Europe en 2017 - Résultats des comptes de la protection sociale - édition 2019

Les intervenants

La protection sociale est assurée par l'Etat, des organismes publics, des entreprises, des associations ou, comme PRO BTP, par des organismes d'assurance.

Prise en charges des prestations en 2017 :



Source : La protection sociale en France et en Europe en 2017 - Résultats des comptes de la protection sociale - édition 2019

Parmi les différents types d'organisme d'assurance on distingue :

Organisme d'assurance	Règlementation	Produits
Sociétés d'assurance	Code des assurances	Tout type de couverture d'assurance
Sociétés d'assurance mutuelle		
Mutuelles et leurs unions	Code de la mutualité	Spécialisées dans la couverture des risques sociaux en proposant essentiellement voire uniquement des assurances en santé, prévoyance, dépendance, épargne et retraite (hors MRH, auto, etc.)
Institutions de prévoyance et leurs unions	Code de la sécurité sociale	

3.1.1.2. Description des produits de BTP Prévoyance

L'étude réalisée se fera sur le périmètre de BTP Prévoyance. Dans cette partie, les différents produits de l'institution seront présentés.

Les produits de Prévoyance

Les produits de prévoyance de BTP Prévoyance, hors contrats particuliers, sont des contrats collectifs d'assurance obligatoires ou supplémentaires. Ils sont régis par le code de la Sécurité Sociale et décrits dans les différents accords de branches associés à chaque régime.

Plusieurs régimes de prévoyance sont gérés par BTP Prévoyance :

- Les régimes conventionnels avec adhésion obligatoire pour l'entreprise et le salarié ;
- Les régimes supplémentaires avec adhésion facultative pour l'entreprise et obligatoire pour le salarié si l'entreprise y a adhéré ;
- Les contrats particuliers, facultatifs pour le salarié.

À chacun de ces régimes, sont associés des tarifs et des garanties différentes pour des contrats annuels à tacite reconduction.

Les garanties présentes dans les contrats précédents sont les suivantes :

- **Garanties en cas de décès**

La garantie en cas de décès se décline sous trois formes :

- ✓ Capital décès : versement d'un capital au conjoint survivant (mariage, pacs ou concubinage), à défaut aux descendants, à défaut aux ascendants ;
- ✓ Rente conjoint : versement d'une rente viagère et/ou temporaire au conjoint survivant ;
- ✓ Rente d'éducation : versement d'une rente aux enfants à charge de l'adhérent.

- **Garanties en cas d'arrêt de travail**

- ✓ Indemnités journalières (incapacité)

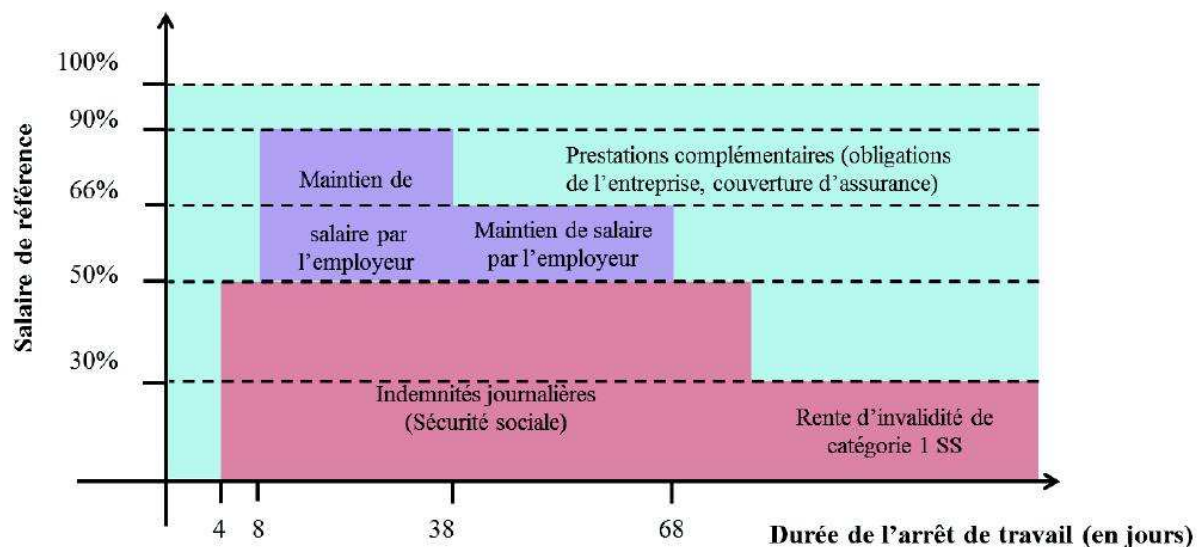
En cas d'interruption de travail totale et continue de l'assuré, due à une maladie ou à un accident, il a le droit à une indemnité journalière complémentaire à celle de la Sécurité Sociale.

- ✓ Rentes d'invalidité

L'assuré bénéficie d'une rente d'invalidité en complément de celle versée par la Sécurité Sociale.

Une personne est considérée comme invalide si, après un accident ou une maladie d'origine non professionnelle, sa capacité de travail ou de gain est réduite d'au moins 2/3.

Prises en charges des prestations en cas d'arrêt de travail :



- **Garanties santé**

- ✓ Forfait parentalité et accouchement

A chaque naissance ou en cas d'adoption d'un enfant de moins de 7 ans, un capital est versé à l'assuré.

- ✓ Hospitalisation chirurgicale

En cas de séjour dans un établissement hospitalier au titre d'une intervention chirurgicale, les frais relatifs à la chambre particulière sont en partie pris en charge par l'assureur.

- **Garantie en cas de départ à la retraite**

Lorsqu'il liquide ses droits à la retraite, l'assuré a le droit à une indemnité de fin de carrière (IRT) qui correspond au cumul de l'indemnité légale de départ ou de mise à la retraite, due en application des dispositions du Code du travail et d'un complément d'indemnité conventionnelle.

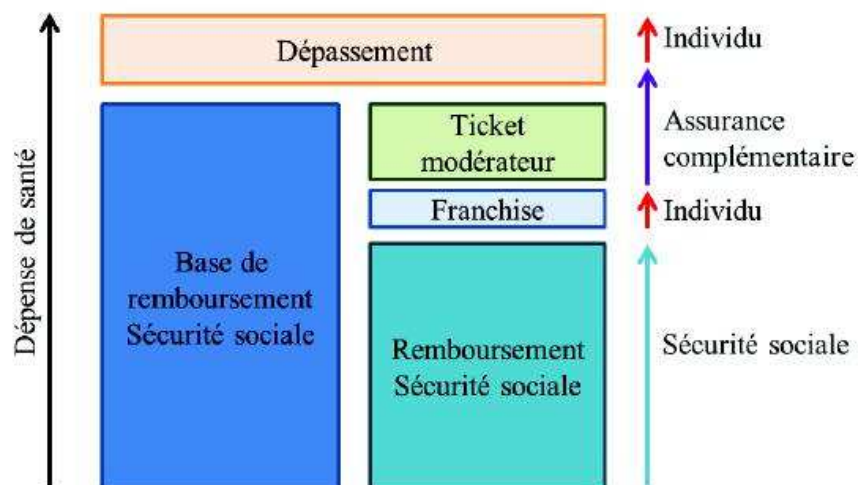
Autres produits

- **Contrats Santé**

BTP Prévoyance distribue également en complément de la prévoyance des contrats santé collectifs (adhésion obligatoire) et individuels (adhésion facultative). Ils sont également régis par le code de la Sécurité Sociale.

Les frais de soins de l'assuré et de ses ayants droit (s'il y en a), suite à une maladie, une maternité ou un accident sont en partie remboursés par l'assureur.

Remboursement des dépenses santé :



- **Dépendance**

La dépendance se définit généralement par la nécessité de recourir à une aide extérieure pour accomplir les actes essentiels de la vie. La dépendance peut être partielle ou totale.

Une rente est versée à l'adhérent qui se trouve dans un état d'invalidité entraînant une perte d'autonomie.

3.1.1.3. Provisionnement

Provisions techniques

Pour calculer les provisions techniques pour sinistres, l'institution doit évaluer le coût des sinistres inconnus et le coût résiduel des sinistres connus.

Les deux principaux types de provisions techniques sont :

- Les provisions Mathématiques (PM) pour les garanties de type rente qui représentent la valeur actuelle probable des prestations futures de l'assureur au titre des événements survenus antérieurement à la date d'inventaire, calculées à l'aide d'une méthode tête par tête, à partir de tables réglementaires TGF05, TGH05 et BCAC, sans abattement ni coefficient de sur-risque;
- Les provisions pour Sinistres A Payer (PSAP) qui représentent la valeur estimative des sinistres pas encore réglés (connus ou inconnus) à la date d'inventaire, calculées à l'aide de la méthode de Chain Ladder, basée sur la cadence des règlements.

Provision pour Participation Aux Excédents

Au lieu de reverser aux assurés la totalité de leurs bénéfices techniques et financiers, via une revalorisation des prestations, l'assureur peut choisir d'en affecter une partie à la Provision pour Participation Aux Excédents (PPAE ou PPE) pour être versée plus tard (avant 8 ans). Cette provision permet à l'assureur de lisser les revalorisations des prestations dans le temps.

Provision pour Egalisation

La Provision pour Egalisation permet à l'assureur de faire face aux fluctuations de sinistralité. Elle a pour objet de lisser cette différence de sinistralité.

Réserve de capitalisation

La Réserve de Capitalisation (RC) fait partie des fonds propres (passif du bilan). Elle est dotée/reprise lors de ventes de valeurs mobilières amortissables (obligations R.332-19 à taux fixe) avant leur arrivée à échéance. Elle permet de compenser les plus ou moins-values réalisées et donc d'avoir un impact nul sur le compte de résultat.

3.1.1.4. Revalorisation

Chaque année, comme le prévoit les conventions collectives, le conseil d'administration de BTP Prévoyance définit des coefficients de revalorisation des prestations.

Celui des garanties incapacité, invalidité, des rentes temporaires et des rentes viagères des non ouvriers se base sur :

- l'évolution des prix et des salaires ;
- le solde disponible au sein de la provision pour participation aux excédents ;
- la situation financière du régime et de la solvabilité de l'organisme.

Le coefficient de revalorisation des rentes viagères des ouvriers se base, quant à lui, sur :

- l'évolution de la dernière valeur du point de retraite fixée et utilisée par l'AGIRC-ARRCO ;
- le solde disponible au sein de la provision pour participation aux excédents ;
- la situation financière du régime et de la solvabilité de l'organisme.

3.1.1.5. Encours

Les encours au 31/12/2018 étaient les suivants :

En M€	PM	PSAP	PPAE	Provision d'égalisation	Total	%Total
Garanties en cas de décès	1 210	184	56	17	1 467	25,7%
Capital décès	-	132	-	2	133	2,3%
Rente conjoint	899	53	42	12	1 005	17,6%
Rente éducation	311	-	14	4	329	5,8%
Garanties en cas d'arrêt de travail	2 425	256	149	11	2 841	49,9%
Indemnités journalières (incapacité)	461	101	30	3	595	10,4%
Rentes invalidité	1 964	155	120	8	2 246	39,4%
Garanties santé	-	229	-	1	230	4,0%
Garanties en cas de départ à la retraite	948	-	42	12	1 001	17,6%
Dépendance	146	3	9	0	159	2,8%
Total	4 728	672	256	41	5 697	100,0%

Les provisions mathématiques (4.7Md€) représentent 83% des encours de l'institution (5.7Md€) et c'est la garantie en cas d'arrêt de travail (2.8Md€) qui est prépondérante.

Le taux technique moyen de l'institution s'élève à 0.92%.

La revalorisation des prestations concerne les PM et PSAP de toutes les garanties hors garanties santé et capital décès, soit 70% des provisions.

3.1.2. Portefeuille Actif

3.1.2.1. Description de l'actif

Au 31/12/2018, le portefeuille de BTP Prévoyance est le suivant :

M€	Valeur de Marché	Valeur Nette Comptable	PMVL	% en VM
Obligations	5 474	5 234	241	55%
Etat	3 631	3 553	79	37%
Crédit	1 843	1 681	162	19%
Actions	557	493	64	6%
Diversifié	510	476	34	5%
Immobilier	777	496	281	8%
Monétaire	1 035	1 023	12	10%
Autres actifs	1 554	1 230	324	16%
Total	9 907	8 952	955	100%

L'actif de BTP Prévoyance atteint 9,9Md€ dont 8,4Md€ d'actifs hors « Autres actifs ».

La classe « autres actifs » concerne des investissements pilotés directement par le directeur stratégique du groupe PRO BTP. Leur part dans l'actif sous gestion sera considérée comme constante dans l'étude.

Cette classe inclut :

- le plan de relance du BTP :

Dans le cadre du plan de relance du BTP de 2010, un fonds de 650 millions d'euros avait été mobilisé par les fédérations et par leurs partenaires PRO BTP, SMABTP, UCF et CNETP. PRO BTP a accordé deux prêts de 200 millions d'euros à des collectivités.

- les prêts au logement :

PRO BTP a accordé à ses salariés, sous certaines conditions, des prêts à un taux fixe privilégié.

- Les participations :

BTP Prévoyance détient une partie des fonds propres de d'autres institutions du groupe : 99,99% de la SAF BTP Vie, 63% de la SAF BTP IARD, etc.

La classe « diversifié » regroupe les investissements en infrastructure (environ 80% de l'encours) et en *Private Equity*.

3.1.2.2. Provisions

Provisions pour aléas financiers

La Provisions pour Aléas Financiers (PAF) vise à compenser une baisse du rendement des actifs par rapport aux engagements de taux garantis sur les contrats (hors Unités de Compte).

Elle est constituée lorsque le taux de rendement réel des actifs de l'institution, diminué d'un cinquième, est inférieur au quotient du montant total des intérêts techniques et du minimum contractuellement garanti de participations aux excédents des opérations de l'institution dans des conditions définies. Son calcul est encadré par le Code de la Sécurité Sociale.

Au 31/12/2018, BTP Prévoyance, protégée structurellement d'une telle provision par son taux technique moyen prudent de calcul des provisions mathématiques, n'a pas constitué de PAF.

Provisions pour risque d'exigibilité des engagements techniques

C'est une provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value latente de l'ensemble des placements non amortissables.

Une moins-value latente nette globale des placements non amortissables est constatée lorsque la valeur nette comptable de ces placements est supérieure à la valeur globale de ces mêmes placements évalués selon la réglementation en vigueur.

Provision pour dépréciation durable

Les provisions pour dépréciation sont destinées :

- soit à constater le non-respect par l'émetteur des engagements de paiement des intérêts ou de remboursement du principal d'une obligation détenue,
- soit à constater une dépréciation des titres (actions ou immobilier) détenus lorsque cette dépréciation a un caractère durable.

3.1.2.3. Conclusion Actif

L'actif de BTP Prévoyance possède une part obligataire importante (55% en valeur de marché), ce qui l'expose fortement au risque de taux. Cependant, dans un contexte de taux bas prolongés, il devient de plus en plus difficile de trouver du rendement sur cette poche d'actifs pour satisfaire les contraintes de taux technique et de revalorisation liée à l'inflation.

Au 31/12/2018, le taux actuariel du portefeuille obligataire était de 1% avec un niveau de réinvestissement en 2018 à 0.85%.

Pour faire face à cette situation de taux bas prolongés, l'institution peut prendre différentes mesures :

- récupérer du rendement sur des actifs plus risqués (action, private equity, projets infrastructures, immobiliers, etc.), au prix d'une charge en capital et d'un risque plus élevés pour l'assureur ;
- revoir la clause de revalorisation de ses contrats qui est actuellement liée à l'inflation (évolution des prix et des salaires).

Compte tenu de la richesse initiale importante du portefeuille (11% de la VNC), l'institution pourrait également piloter ses réalisations de plus-values (PVR) pour honorer ses engagements. Cependant, les obligations détenues en directes sont pour la plupart, soumises à la réserve de capitalisation. Leurs PVR ne viendront donc pas alimenter le disponible pour la revalorisation. De plus, les actifs diversifiés sont quant à eux, moins liquides que les actifs cotés. Il peut donc s'avérer difficile de les vendre pour un pilotage de PMVR en fin d'année.

3.1.3. Recherche des métriques

Une fois les principaux risques identifiés, la recherche de l'allocation cible dite « optimale » nous a amené à nous poser la question : « Optimale pour qui ? ». En effet, les intérêts et priorités de l'assureur et de l'assuré ne sont pas toujours alignés.

Dans cette partie, nous chercherons donc à définir des métriques reflétant au mieux les intérêts de l'assureur et des assurés.

Plusieurs métriques de pilotage ont été envisagées :

- **La performance des actifs :**

La performance des actifs est définie de la manière suivante :

$$Perf_actif = \frac{VM(t = 1)}{VM(t = 0)} - 1$$

- **Le taux de rendement comptable financier (ROI – Return On Investment)::**

Le taux de rendement financier est défini de la manière suivante :

$$Rdt_fin = \frac{Résultat\ comptable\ financier}{VNC(t = 1)}$$

- **La performance/rendement des fonds propres prudentiel :**

Le rendement des Fonds Propres Prudentiels (FPP) est défini de la manière suivante :

$$Rendement_FPP = \frac{FPP(t = 1)}{FPP(t = 0)} - 1$$

- **La variation du ratio de Solvabilité :**

La variation du ratio de Solvabilité est définie de la manière suivante :

$$Variation_Ratio = Ratio(t = 1) - Ratio(t = 0)$$

- **Le taux de revalorisation des provisions techniques :**

Le taux de revalorisation des passifs correspond au taux de distribution des bénéfices aux assurés. Celui-ci vient augmenter les prestations et donc les provisions techniques S1.

Sa modélisation sera abordée dans la partie « 4.3.2.1. Provisions techniques » et il est défini de la manière suivante :

$$Taux_revalo_S1 = \max(Rendement_comptable ; 0 ; Taux_technique)$$

- **La variation du Best Estimate :**

La variation du Best Estimate sur 1 an est définie de la manière suivante :

$$Variation_BE = \frac{BE(t = 1)}{BE(t = 0)} - 1$$

Le tableau ci-dessous résume les réflexions menées sur ces métriques :

Métrique	Orientation	Avantages	Inconvénients
Performance des actifs	Assureur et /ou Assuré	La performance des actifs mesure directement la variation des actifs de placement du bilan S2.	Puisque Actifs = FPP (assureur) + PT (assurés), cette métrique ne permet pas de refléter uniquement les intérêts d'un des deux individus.
ROI	Assureur et /ou Assuré	Le ROI mesure directement ce que rapportent les placements financiers.	Les revenus sont partagés entre l'assuré et l'assureur. Cette métrique ne permet pas de refléter uniquement les intérêts d'un des deux individus.
Performance/ rendement des FPP	Assureur	Les FPP appartiennent à l'assureur.	
Variation du ratio de Solvabilité	Assureur	Cette métrique est plutôt orientée « assureur » bien que l'assuré a tout intérêt à ce que l'institution dont il dépend soit solvable.	Le ratio est un rapport de deux métriques : $SCR\ Ratio = FPP/SCR$ Cette métrique paraît donc complexe à manipuler.
Revalorisation des provisions techniques	Assuré	Le taux de revalorisation des passifs en $t=1$ correspond au taux de distribution des bénéfices aux assurés. Celui-ci vient augmenter les prestations et donc les provisions techniques S1. Il s'agit donc d'une métrique orientée « assuré ».	
Variation de Best Estimate	Assuré	La variation du BE permet d'avoir un indicateur qui tient compte des revalorisations au-delà de $t=1$.	La variation du BE intègre un effet taux qui peut biaiser l'analyse de l'indicateur.

Parmi les métriques uniquement orientées « **assureur** », nous avons retenu le **rendement des FPP** puisque c'est celle qui présente le moins d'inconvénient. De même, parmi celles orientées « **assuré** » nous avons retenu le **taux de revalorisation des provisions techniques**.

Métrique Assureur retenue : Rendement des fonds propres prudentiels
Métrique Assuré retenue : Taux de revalorisation S1.

3.2. Choix de l'allocation optimale

Une fois les métriques définies, nous nous sommes interrogés sur le comportement de l'assureur et des assurés. Réagissent-ils de la même manière face au risque ? Pour répondre à cette problématique, nous nous sommes penchés sur la théorie de l'utilité espérée.

En effet, la théorie de l'utilité espérée permet de modéliser le comportement d'un investisseur dans une situation d'incertitude et donc de tenir compte de sa rationalité, de son aversion aux risques mais également de son asymétrie de comportement en cas de gains ou de pertes.

Après avoir exposé la théorie de l'utilité espérée, nous définirons les fonctions qui nous permettront de trouver l'allocation dite « optimale » pour l'institution BTP Prévoyance.

3.2.1. Fonction d'utilité

Du fait de l'imprévisibilité de la dynamique des actifs, un investisseur doit faire des choix entre différentes allocations menant à des gains ou des pertes aléatoires. Tout choix peut donc s'apparenter à un pari.

Dans cette partie, nous allons rappeler les notions académiques sur les fonctions d'utilité.

3.2.1.1. Définition d'une loterie

Pour simplifier ce problème complexe, assimilons-le à une loterie L .
Soit, X les variables aléatoires liées aux gains ou aux pertes $X = (x_1, \dots, x_n)'$
Soit, P les probabilités associées à ces gains ou pertes $P = (p_1, \dots, p_n)'$
Avec $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ et $p_i \geq 0$

Un premier raisonnement (simpliste) consiste à considérer que l'attrait pour cette loterie est uniquement déterminé par son espérance de gain :

$$E[X] = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Avec un tel critère, un individu rationnel devrait toujours choisir la loterie avec l'espérance de gain la plus élevée. L'individu devrait même être indifférent entre une somme certaine égale $E[X]$ et une loterie dont le gain serait $\tilde{X}$. Cependant, la plupart des individus préféreront une somme certaine à la loterie. Ce comportement traduit notre aversion au risque.

Pour tenir compte de ce comportement dans l'évaluation de l'attrait d'une loterie la fonction d'utilité U de l'agent est utilisée dans le calcul de l'espérance.

Un individu rationnel pourra alors utiliser l'utilité espérée comme critère pour prendre une décision optimale. Cette décision sera propre à l'individu car elle dépendra de son utilité.

3.2.1.2. Théorie de l'utilité espérée

Définition

La théorie de l'utilité espérée (EU – Expected Utility) a été formulée par Von Neumann et Morgenstern en 1944. Cette théorie se fonde sur 3 axiomes qui caractérisent le comportement rationnel de l'individu.

Dans la définition des axiomes, L représentera l'ensemble des loteries, auxquels X , Y et Z appartiennent.

Axiome 1.a : Comparabilité

- L'individu préfère soit X à Y : $X \succ Y$
- Soit Y à X : $Y \succ X$
- Soit est indifférent entre X et Y : $X \sim Y$

Axiome 1.b : Transitivité

$X \succcurlyeq Y$ et $Y \succcurlyeq Z \Rightarrow X \succcurlyeq Z$

Avec $\succcurlyeq$ signifiant la préférence ou l'indifférence

Axiome 2 : Continuité

Pour X, Y et Z appartenant à L avec $X \succcurlyeq Y \succcurlyeq Z$, alors il existe $\alpha \in [0 ; 1]$ tel que $\alpha X + (1 - \alpha) Z \sim Y$

Axiome 3 : Indépendance

Si $X \succcurlyeq Y$ alors $\forall \alpha \in [0 ; 1]$

$$\alpha X + (1 - \alpha) Z \succcurlyeq \alpha Y + (1 - \alpha) Z$$

Théorème de Von Neumann et Morgenstern :

Si les axiomes précédents sont vérifiés, il existe une fonction d'utilité u , définie à une transformation affine croissante près, telle que :

$$EU(X) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$$

et

$$\forall X, Y \text{ telles que } X \succcurlyeq Y \Leftrightarrow EU(X) \geq EU(Y)$$

Où EU représente la fonction d'utilité espérée. Elle correspond à l'espérance mathématique des utilités associées aux résultats possibles de la loterie.

Rationalité des individus

Un individu est dit rationnel lorsqu'il préfère avoir plus que moins (appétit pour la richesse) et donc que pour $x_i > x_j$ on a $u(x_i) > u(x_j)$.

Cela implique que la fonction d'utilité de l'individu est croissante et que $u'(x) > 0$.

Aversion au risque et équivalent certain

La notion d'équivalent certain peut s'interpréter comme la somme qui rendrait l'individu indifférent entre cette somme perçue avec certitude et la loterie initiale. Elle est égale au montant minimal lui permettant d'avoir une utilité équivalente à celle de la loterie. L'équivalent certain est donc déterminé à l'aide de l'équation suivante :

$$u(EC) = EU(X)$$

Avec :

X une loterie

u une fonction d'utilité

EC l'équivalent certain de la loterie L pour la fonction d'utilité u.

Dans le cas où u est inversible :

$$EC = u^{-1}(EU(X))$$

La notion d'équivalent certain introduit celle de prime de risque. En effet, la prime de risque représente le montant que l'agent est prêt à perdre pour pouvoir profiter d'un revenu sans risque. Elle représente donc la différence entre l'espérance de revenu et l'équivalent certain. La prime de risque est donc égale à :

$$\rho = E(X) - EC$$

Avec :

X une loterie

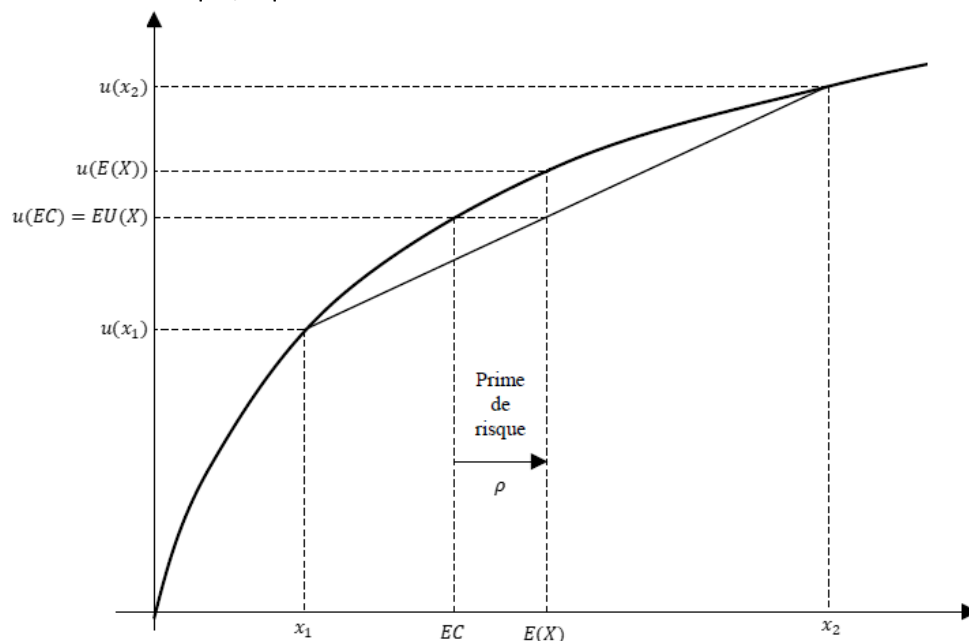
ρ la prime de risque

EC l'équivalent certain de la loterie L pour la fonction d'utilité U.

Lorsque $\rho > 0$ ($EC < E(X)$), l'agent est dit averse au risque (riscophobe) et sa fonction d'utilité est concave.

A l'inverse, lorsque $\rho < 0$, l'agent est dit riscophile (goût pour le risque) et sa fonction d'utilité est convexe.

Exemple : Aversion au risque, équivalent certain et concavité



Mesure d'aversion au risque :

- Pratt et Arrow proposent de mesurer l'aversion au risque des agents en reliant la prime de risque à la concavité de la fonction d'utilité de l'agent :

$$\lambda_{abs} = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

λ_{abs} est appelé coefficient d'aversion absolu au risque.

Un agent est plus averse au risque qu'un autre si :

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} > -\frac{v''(x)}{v'(x)}$$

- Une mesure relative de l'aversion au risque existe également :

$$\lambda_{relative} = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = x * \lambda_{abs}$$

3.2.1.3. Fonctions d'utilité standards

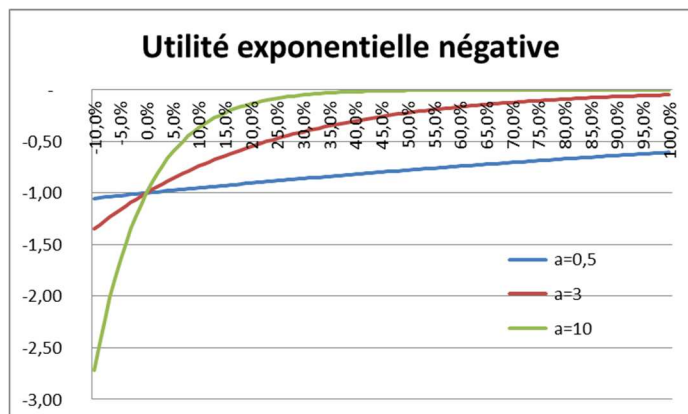
Parmi les fonctions d'utilité standard, on distingue :

- Les fonctions d'utilité CARA (Constant Absolute Risk Aversion) :**

Les fonctions de type CARA ont un coefficient d'aversion absolu au risque constant. Cela signifie que, quel que soit son niveau de richesse, l'agent a toujours la même aversion pour le risque.

Exemple :

$$u(x) = -\exp(-ax)$$
$$\lambda_{abs} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = a$$
$$\lambda_{relative} = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = ax$$



- Les fonctions d'utilité CRRA (Constant Relative Risk Aversion) :**

Les fonctions de type CRRA ont un coefficient d'aversion relatif au risque constant.

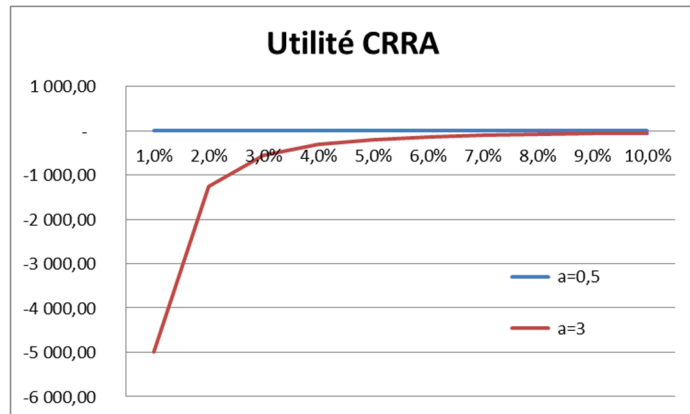
Exemple de la fonction puissance :

$$u(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a} \text{ avec } x \in]0; +\infty[$$

$$a > 0 \text{ et } a \neq 1$$

$$\lambda_{abs} = \frac{a}{x}$$

$$\lambda_{relative} = a$$



- **Les fonctions d'utilité DARA (Decreasing Absolute Risk Aversion) :**

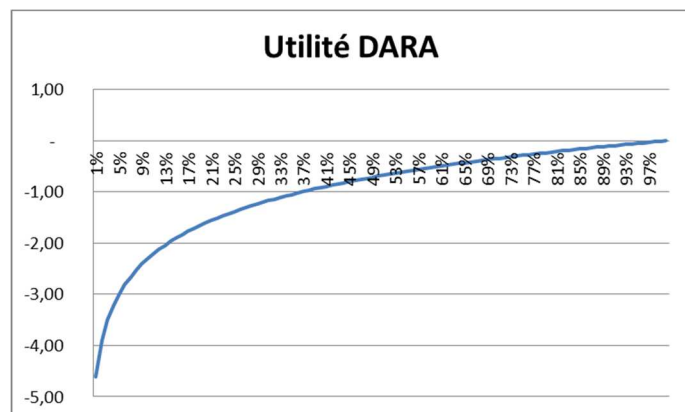
Les fonctions DARA possèdent un coefficient d'aversion absolu au risque décroissant avec la richesse.

Exemple de la fonction logarithme :

$$u(x) = \ln(x) \text{ avec } x \in]0; +\infty[$$

$$\lambda_{abs} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\lambda_{relative} = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = 1$$



Il est à noter qu'une fonction CRRA est DARA. En effet :

$$\lambda_{relative} = a = x * \lambda_{abs} \Rightarrow \lambda_{abs} = \frac{a}{x}$$

Donc

$$\text{CRRA} \Rightarrow \text{DARA}$$

Mais la réciproque est fautive puisque si l'on prend une fonction avec un coefficient d'aversion relatif au risque décroissant ($\neq$ CRRA) comme par exemple $\lambda_{relatif} = \frac{a}{x}$ alors le coefficient d'aversion absolu au risque $\lambda_{abs} = \frac{a}{x^2}$ est bien décroissant (la fonction est DARA). On a alors :

$$\text{DARA} \not\Rightarrow \text{CRRA}$$

- **Les fonctions d'utilité IARA (Increasing Absolute Risk Aversion) :**

Les fonctions IARA possèdent un coefficient d'aversion absolu au risque croissant avec la richesse. Cela implique que sa prime de risque est croissante.

Exemple d'une fonction quadratique :

$$u(x) = x - ax^2 \text{ avec } x \in]-\infty; 1/2a[$$

$$\lambda_{abs} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{2a}{1-2ax}$$

- **Cas particulier des fonctions d'utilité linéaire de Markowitz**

La fonction d'utilité de Markowitz est définie par

$$U[X] = E[X] - k * V[X]$$

Cette fonction présente une aversion au risque lorsque $k > 0$ puisqu'elle est d'autant plus faible que l'incertitude qui porte sur la richesse est élevée.

Sous les hypothèses suivantes, le critère de l'utilité espérée revient à appliquer le critère d'espérance variance de Markowitz :

Hypothèse 1 : les préférences de l'individu sont représentées par la fonction d'utilité CARA

$$u(x) = -\frac{1}{a} \exp(-ax)$$

Hypothèse 2 : la variable X suit une loi normale, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Preuve :

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\exp(X) = Y \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et son espérance est $E[Y] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

De plus, $\ln(Y^{-a}) = -a \ln(Y)$ donc $\exp(\ln(Y^{-a})) = \exp(-a \ln(Y)) = \exp(-aX)$

Et comme $X = \ln(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $-a \ln(Y)$ suit également une loi normale de moments :

$$E[-a \ln Y] = -a E[X] = -a \mu$$

$$V[-a \ln Y] = a^2 V[X] = a^2 \sigma^2$$

On en déduit que $\exp(-aX) = \exp(\ln(Y^{-a}))$ suit une loi log-normale d'espérance $\exp\left(-a\mu + a^2 \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

On a alors

$$EU[X] = -\frac{1}{a} E[\exp(-aX)] = -\frac{1}{a} \exp\left(-a * \left(\mu - a \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$$

On remarque que toute transformation croissante f de la fonction d'utilité représente les mêmes préférences. La quantité $\mu - a \frac{\sigma^2}{2}$ est transformée par la fonction

$$f(x) = -\frac{1}{a} \exp(-ax)$$

Alors

$$EU[X] = f\left(\mu - a \frac{\sigma^2}{2}\right), f' > 0$$

Et on peut prendre comme fonction d'utilité toute transformée croissante de cette fonction.

Comme f est croissante, f^{-1} l'est aussi. On a alors

$$f^{-1}(EU[X]) = \left(\mu - a \frac{\sigma^2}{2}\right) = E[X] - \frac{a}{2} V[X]$$

On retrouve donc la forme espérance-variance de Markowitz en posant $k = \frac{a}{2}$. Dans ce cas particulier, k est proportionnel à l'indice d'aversion absolue pour le risque.

3.2.1.4. Limites de la théorie de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern

La théorie de l'utilité espérée s'appuie sur une série d'axiomes concernant l'attitude d'un individu rationnel ayant à faire des choix en situation risquée. Allais¹ a montré, par l'expérimentation, qu'un de ces axiomes était fréquemment violé par les individus : l'axiome d'indépendance.

Pour rappel :

Axiome 3 : Indépendance

Si $X \succcurlyeq Y$ alors $\forall \alpha \in [0 ; 1]$

$$\alpha X + (1 - \alpha)Z \succcurlyeq \alpha Y + (1 - \alpha)Z$$

Si la loterie X est préférée à la loterie Y , alors, quelle que soit la loterie Z et quelle que soit la probabilité α , la loterie $\alpha X + (1 - \alpha)Z$ est préférée à la loterie $\alpha Y + (1 - \alpha)Z$.

Cet axiome semble parfaitement naturel : quoi que pense l'individu de la loterie Z , si on lui demande de la « mélanger » soit avec X soit avec Y , avec une probabilité identique α dans les deux cas, on doit s'attendre à ce qu'il choisisse celle qu'il préfère, soit, par hypothèse, X . Pourtant, l'expérience montre que la présence d'un gain qui devient très incertain dans l'alternative proposée conduit un grand nombre de personnes à ne pas se conformer à cet axiome. Ce phénomène peut être illustré par l'exemple suivant :

Exemple :

Il est demandé aux personnes interrogées, dans un premier temps, de choisir entre les deux loteries A et B suivantes :

A : + 10 000 € avec une probabilité = 100 %

B : + 15 000 € avec une probabilité = 90 % et 0 € avec une probabilité de 10 %

En règle générale, une majorité de personnes préfèrent la loterie A, qui procure un gain certain, même si l'espérance de la loterie B est supérieure ($E(B)=13\,500$ €).

Dans un second temps, il leur est demandé de choisir entre les loteries C et D suivantes :

C : + 10 000 € avec une probabilité = 10% et 0 € avec une probabilité = 90 %

D : + 15 000 € avec une probabilité = 9 % et 0 € avec une probabilité = 91 %

¹ Allais M., *La psychologie de l'homme rationnel devant le risque : la théorie et l'expérience*. Journal de la société statistique de Paris, 1953.

En règle générale, les mêmes personnes qui préfèrent la loterie A à B préfèrent aussi la loterie D à la loterie C, parce que D procure un gain significativement plus important que C pour une probabilité de non-gain à peine plus forte. Cependant ce résultat est incohérent avec la théorie de l'utilité espérée. En effet, dans le cas de personnes très averses au risque (resp. riscophiles), le résultat attendu est le couple (A ; C) (resp. (B ; D)).

Allais ne remet pas en cause la théorie de l'utilité comparée dans son ensemble : il démontre néanmoins expérimentalement que lorsque le risque est extrême, le joueur se focalise davantage sur la prime de risque.

3.2.2. Choix des fonctions d'utilité

Dans cette étude, l'assureur et l'assuré sont considérés comme **rationnels** et **averses au risque**. Leurs préférences en termes de rendement des fonds propres et de revalorisation des engagements seront donc modélisées par des **fonctions d'utilité concaves**.

Voici un tableau récapitulatif des principales fonctions d'utilité concaves avec leurs caractéristiques :

Fonction d'utilité	Type	Coefficient d'aversion absolu	Coefficient d'aversion relatif	Domaine de définition	Métrique d'application
CARA	$u(x) = -\exp(-ax)$	Constant	Croissant	$\mathbb{R}$	Rentabilité des fonds propres + Revalorisation S1
CRRA	$u(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a}$	Décroissant	Constant	$\mathbb{R}^{++}$	Revalorisation S1 avec translation
DARA	$u(x) = \ln(x)$	Décroissant	Constant ²	$\mathbb{R}^{++}$	Revalorisation S1 avec translation
IARA	$u(x) = x - ax^2$	Croissant	Croissant	$] -\infty; 1/2a[$	Rentabilité des fonds propres + Revalorisation S1
Markowitz	$U[X] = E[X] - k * V[X]$			$\mathbb{R}$	Rentabilité des fonds propres

L'hypothèse que **l'aversion au risque de l'assureur et de l'assuré ne croit pas en fonction de la variable choisie** est également faite. Cette hypothèse entraîne **l'exclusion des fonctions de type quadratique (IARA) dans un premier temps**.

Les fonctions de type DARA et CRRA avec un coefficient d'aversion absolu au risque décroissant sont définies sur $\mathbb{R}^{++}$ et **ne peuvent donc pas être utilisées avec la variable de rendement des fonds propres** qui peut être négative. Elles ne seront donc retenues uniquement pour la modélisation du comportement assuré.

² Pour la fonction $\ln(x)$

En revanche, les fonctions de type CARA avec un coefficient d'aversion absolu au risque constant sont définies sur $\mathbb{R}$. Elles peuvent donc être utilisées pour modéliser le comportement de l'assureur et de l'assuré.

L'utilité de Markowitz quant à elle, suppose que la variable choisie soit gaussienne.

Cette hypothèse est rejetée pour la variable taux de revalorisation S1 avec le test de Shapiro-Wilk³.

En revanche, elle peut être acceptée avec un seuil de 1% pour la rentabilité des fonds propres avec le même test. Elle sera donc également exclue de l'étude.

Fonctions retenues :

- Rentabilité des fonds propres : Fonction exponentielle négative (CARA)
- Revalorisation S1 : Fonction exponentielle négative (CARA) et fonction CRRA

3.3. Objectif final

A ce stade-là, nous avons défini **deux métriques de décision avec des fonctions d'utilité** mais nous cherchons **une seule allocation**. Nous allons donc chercher à maximiser la somme des deux utilités espérées. Il est à noter que pour que cette somme ait du sens, il faut que **les fonctions utilité soient les mêmes** sinon, l'une des utilités espérées risque d'être prépondérante sur l'autre. Parmi les fonctions retenues, seule la **fonction exponentielle négative** peut être appliquée aux deux métriques. Ce sera donc elle qui sera utilisée comme référence dans notre étude.

De plus, comme vu précédemment, BTP Prévoyance définit actuellement son allocation d'actifs cible en se basant sur le pilotage du ratio de Solvabilité 2. Cette métrique de pilotage provient de la définition de l'objectif stratégique de l'institution qui est de maintenir au-dessus de 200% le ratio de Solvabilité. Nous avons donc souhaité la conserver dans notre problématique et elle a été retranscrite sous la forme de la contrainte suivante :

« Maintenir le ratio de solvabilité S2 de BTP Prévoyance au-dessus de 200% en moyenne »

Voici son expression analytique :

$$E[Ratio] \geq 200\%$$

Nous avons également souhaité intégrer sous forme de contrainte, l'appétence aux risques de l'institution. Elle se mesure au moyen de choix de métriques de risque dont les niveaux à ne pas dépasser dans les cas extrêmes sont fixés en amont de l'exercice de définition de la politique financière.

Mesure de risque

On appelle mesure de risque toute application ρ associant un risque X à un réel $\rho(X) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Une mesure de risque est dite monétaire si elle satisfait les propriétés suivantes :

³ Shapiro S. et Wilk M.B., *An analysis of variance test for normality (complete samples)*, Biometrika, 1965.

Propriété 1 : Une mesure de risque ρ est invariante par translation si $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ pour toute constante c .

Propriété 2 : Une mesure de risque ρ est monotone si $\Pr[X < Y] = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y .

Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque monétaire est dite cohérente par Artzner et al⁴ si, en plus des deux propriétés précédentes, elle satisfait également les suivantes :

Propriété 3 : Une mesure de risque ρ est homogène si $\rho(cX) = c\rho(X)$ pour toute constante positive c .

Propriété 4 : Une mesure de risque ρ est sous-additive si $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y .

Remarque : une mesure cohérente est toujours normalisée à $\rho(0) = 0$, par homogénéité.

Traditionnellement, on distingue deux indicateurs de risque : la variance et la Value at Risk (VaR).

La variance ne faisant pas de distinction entre les variations négatives et positives, a été exclue de l'étude.

En revanche, la VaR permet de mieux capter les risques extrêmes négatifs.

En effet, celle-ci correspond à la perte maximale qui ne devrait être dépassée qu'avec une probabilité donnée sur un horizon donné. C'est également la mesure utilisée pour le calcul du capital de solvabilité. Cependant, elle ne permet pas d'apprécier l'amplitude de la perte subie au-delà de la VaR et ne respecte pas la propriété de sous-additivité (propriété 4).

La CVaR (Conditional Value at Risk) est une mesure de risque cohérente qui permet de corriger ce défaut. Il s'agit de la perte moyenne dans le cas où la perte est supérieure à la VaR.

C'est donc cette mesure de risque qui sera retenue pour refléter l'appétence au risque de l'institution.

Pour notre étude, nous retiendrons la **CVaR de la perte de Fonds Propres Prudentiels à un an avec un seuil de 5%**. L'expression analytique de la contrainte est la suivante :

$$CVaR(\text{Perte de FPP}, 5\%, 1) \leq 546 \text{ M€}$$

⁴ P. Artzner, F. Delbaen, J-M. Eber, and D. Heath, *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, 1999.

Problème à résoudre

Le choix d'allocation optimale de l'étude doit donc permettre à l'institution de maximiser le rendement de ses fonds propres mais également le taux de revalorisation S1 de ses passifs, tout en supportant un niveau de risque qu'elle juge raisonnable et en maintenant un ratio de solvabilité au-dessus d'un seuil.

Nous recherchons donc l'allocation telle que :

$$\begin{cases} \max EU(\text{Rendement_FPP}) + EU(\text{Taux_revalo_S1}) \\ \text{s.c. } CVaR(\text{Perte de FP}, 5\%, 1) \leq 546 \text{ M€} \\ \text{s.c. } E[\text{Ratio}] \geq 200\% \end{cases}$$

Avec pour fonction d'utilité assureur et assuré :

$$u(x) = -\exp(-\lambda * x)$$

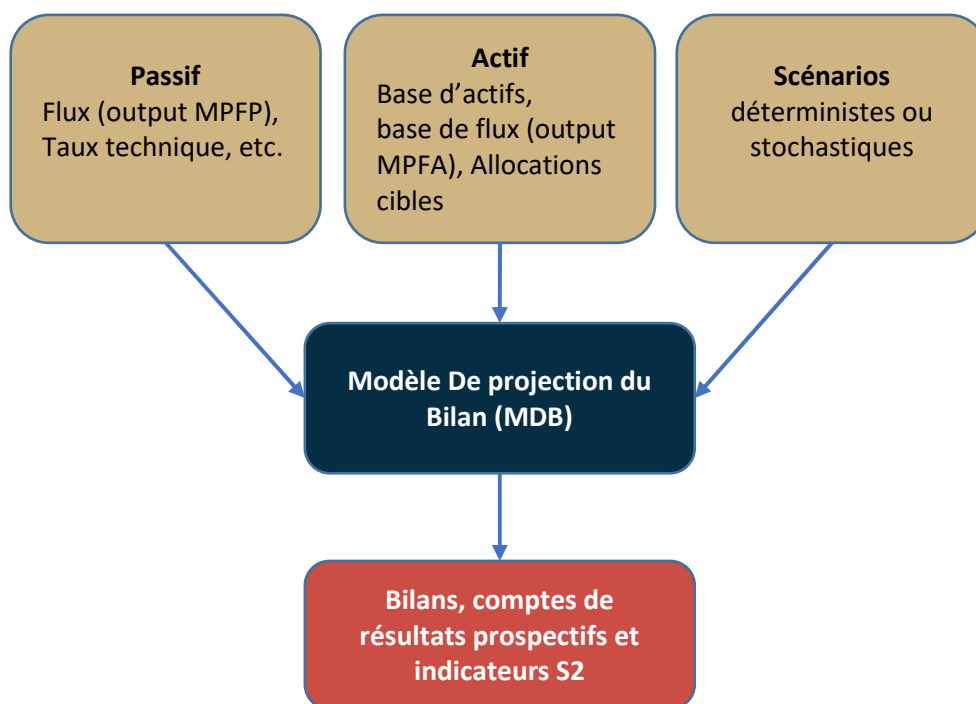
4. Modélisation

Le Groupe PRO BTP est doté d'un modèle ALM appelé Modèle De projection de Bilan (MDB), permettant de tester l'impact des stratégies d'allocation mises en place sur les bilans S1 et S2. Cette partie est consacrée à sa description.

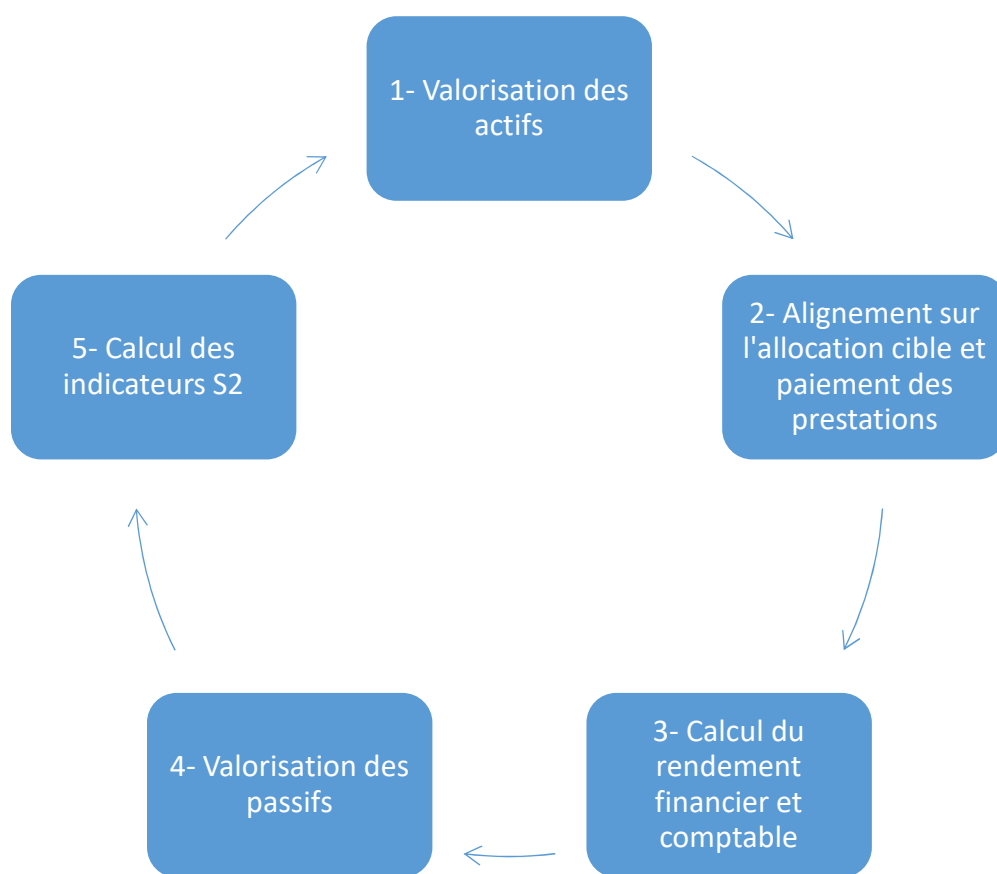
4.1. Principes organisationnels et fonctionnels

Le Modèle De projection de Bilan (MDB) constitue le moteur de calcul qui vient déformer les flux générés de manière déterministe par les Modèles de Projection des Flux du Passif (MPFP) et des Flux de l'Actif (MPFA). Il se base sur les données générées par ces outils ainsi que sur d'autres paramètres et calcule les grandeurs des bilans et comptes de résultats prospectifs. Le schéma ci-dessous reprend les grands principes (inputs, outil et outputs) du MDB.

Principe du Modèle De projection de Bilan (MDB) :



Pour chaque date d'arrêté (pas de projection), le MDB effectue le cycle de calcul suivant :



Etape 1 – Valorisation des actifs :

A cette étape, les actifs sont valorisés à la date d'arrêté et les revenus (les coupons, les dividendes et les loyers) et les remboursements sont déterminés en tenant compte du scénario économique retenu.

Etape 2 – Alignement sur l'allocation cible et paiement des prestations :

Après la valorisation des actifs, l'allocation cible n'est plus respectée. Le modèle procède donc aux achats/ventes nécessaires afin de replacer les actifs sur l'allocation choisie tout en intégrant le solde du compte de trésorerie.

L'allocation cible est déterminée en valeur de marché et se présente sous la forme d'un tableau des actifs retenus dans la modélisation (organisés par classe d'actif, règle de valorisation, notation et par « bucket » de maturité).

Etape 3 – Calcul du rendement financier et comptable :

Une fois les valorisations d'actifs et les ajustements / réinvestissements d'actifs opérés, le modèle évalue les différents postes comptables qui participent au calcul du résultat financier comptabilisé, qu'il s'agisse de stocks ou de variations (dividendes, plus ou moins-value réalisées, PRE, etc.).

Cette opération est mise en œuvre sans préjuger d'un quelconque pilotage spécifique des produits financiers.

Le résultat technique et le résultat de gestion ne sont pas pris en compte dans ce modèle.

Etape 4 – Valorisation des passifs :

Après avoir déterminé le résultat financier, les passifs S1 et S2 sont recalculés en tenant compte de la revalorisation.

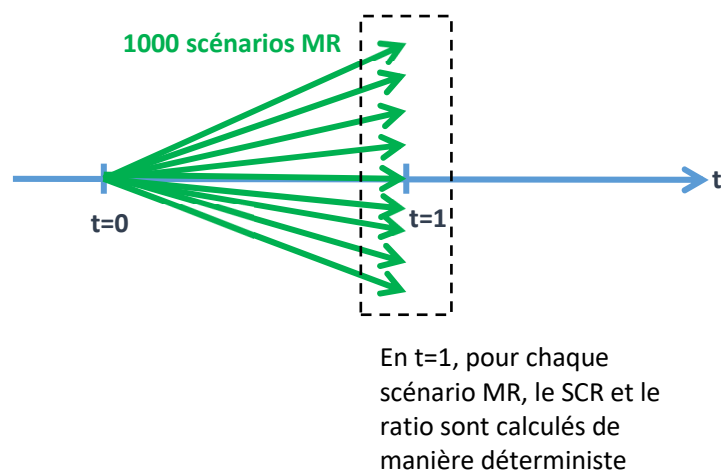
Etape 5 – Calcul des indicateurs S2 :

Cette étape vise à calculer et à agréger les différentes composantes du SCR marché brut (chocs de la formule standard de Solvabilité 2) et net et du ratio de Solvabilité.

4.2. Modélisation de l'actif

Le modèle ALM (MDB) utilisé dans le cadre de ce mémoire projette les actifs avec des scénarios stochastiques en monde réel (MR). Les calculs S2 en $t=1$ sont quant à eux, effectués en déterministes.

Principe de la projection :



4.2.1. Scénarios monde réel

En monde réel, les modèles utilisés sont calibrés sur des données historiques afin de projeter le plus fidèlement possible le comportement statistique et historique des grandeurs financières considérées. Les scénarios monde réel intègrent donc des primes de risque pour chaque classe d'actif.

Les modèles utilisés sont les suivants (cf détails en annexe) :

- **Courbe de taux nominaux** : Extension du modèle de Black-Karasinski à deux facteurs (Extended Two-Factor Black-Karasinski), subissant une translation permettant de générer des taux négatifs (E(D)2FBK)
- **Courbe de taux réel** : modèle étendu de Vasicek
- **Crédit** : modèle de Jarrow, Lando et Turnbull
- **Immobilier** : processus de mouvement brownien géométrique
- **Action** : modèle de diffusion appelé « Stochastic Volatility Jump Diffusion » (SVJD)

4.2.2. Valorisation des actifs

4.2.2.1. Principe

Le modèle de projection de bilan ne permettant pas de projeter tous les actifs ligne à ligne, ils sont donc regroupés par poches, appelées *Model Point*, définies par :

Variable	La classe d'actif	Le risque actif pour la dette (obligations et prêts)	La règle de valorisation	La classe de maturité
Valeurs prises	- Obligation - Action - Convertible - Monétaire - Plan de relance du BTP - Diversification - Immobilier - Prêts au logement - Participations	[Govt ou Corp] X [Notation]	- Standard pour la partie obligataire taux fixe - Action pour la part action des convertibles - OPC pour les OPC	9 classes au total dont une « indéfini » pour les actifs sans maturité.

Chaque poche d'actifs va suivre un indice dans les scénarios déterministes ou stochastiques et va être projetée annuellement.

Elle est également caractérisée par sa valeur nette comptable (VNC), sa valeur de boursière (VB).

Au 31/12/2018, il y avait dans l'inventaire 98 model points (MP).

4.2.2.2. Les obligations

Cette classe d'actif regroupe les obligations à taux fixes et les parts obligataires des convertibles. Elle bénéficie d'une table de flux projetés qui renseigne les tombées de coupons considérées comme annuelles et les montants de remboursement de capital.

Le modèle recalcule la valeur de marché de chaque Model Point (MP) des obligations de la manière suivante :

$$VB(MP, h) = \sum_{j=1}^m \frac{Flux(MP, j)}{(1 + \tau_m^{ZC}(j, h))^j}$$

Avec :

$Flux(MP, j)$, le flux du model point obligataire MP, l'année j ($h < j \leq m$) et

$\tau_m^{ZC}(j, h)$ qui correspond au taux nominal ZC sans risque de maturité m (déterminée avec la classe de maturité) du scénario économique retenu à la date d'arrêt h .

4.2.2.3. Les OPC obligataires

Les OPC obligataires sont valorisées de la manière suivante :

$$VB(MP, h) = VB(MP, h - 1) * \left(\frac{1 + \tau_m^{ZC}(h - 1)}{1 + \tau_{m-1}^{ZC}(h)} \right)^{m-1} * (1 + \tau_m^{ZC}(h - 1))$$

Un revenu est calculé :

$$Revenu(MP, h) = VB(MP, h - 1) * (\tau_m^{ZC}(h - 1))$$

4.2.2.4. Les actions, l'immobilier et le monétaire

La modélisation des classes d'actifs Action, Immobilier, Monétaire et de la part action des convertibles est identique. Chacune de ces classes bénéficie d'un indice avec un niveau de revenu (dividende pour l'action, loyer pour l'immobilier et taux court terme pour le monétaire).

Pour $h > 0$:

$$VB(MP, h) = VB(MP, h - 1) * (1 + \tau^{MP}(h))$$

Avec

$$\tau^{MP}(h) = \tau^{Action}(h) \text{ pour les actions et la part action des convertibles}$$

$$\tau^{MP}(h) = \tau^{Immobilier}(h) \text{ pour l'immobilier}$$

$$\tau^{MP}(h) = \tau^{Taux court terme}(h) \text{ pour le monétaire}$$

Un revenu est calculé :

$$Revenu(MP, h) = VB(MP, h - 1) * (\tau_{revenu}^{MP}(h))$$

Avec

$$\tau_{revenu}^{MP}(h) = \tau_{revenu}^{Action}(h) \text{ pour les actions et la part action des convertibles}$$

$$\tau_{revenu}^{MP}(h) = \tau_{revenu}^{Immobilier}(h) \text{ pour l'immobilier}$$

$$\tau_{revenu}^{MP}(h) = \tau_{revenu}^{Taux court terme}(h) \text{ pour l'immobilier}$$

4.2.2.5. Les convertibles

Une obligation convertible donne le droit à son acheteur de convertir une obligation en action de la société émettrice, selon une parité de conversion préfixée, et dans une période future prédéterminée.

Pour évaluer financièrement ce titre, il convient d'inclure les effets de l'évolution du marché obligataire et ceux de l'action sous-jacente. En général, le prix de l'obligation convertible évolue de manière analogue à celle d'une obligation classique lorsque le cours de l'action sous-jacente se situe sous le seuil de conversion. Au-delà du prix de conversion, l'évolution de l'obligation convertible est plus proche de celle de l'action sous-jacente puisqu'à ce niveau de prix, il est intéressant d'exercer son droit de conversion.

Les obligations convertibles ont donc été décomposées dans le modèle en :

- ✓ Une part action qui suit l'indice action ;
- ✓ Une part obligataire avec un rating et une maturité propre qui détache un coupon.

La part action est donnée par le delta (entre 0 et 100) de l'actif qui mesure la sensibilité du prix de l'obligation convertible à un changement dans la parité. Lorsqu'il n'est pas connu, il a été fixé à 20.

4.2.2.6. Les actifs de diversification

Les investissements en infrastructures et le Private Equity ont été regroupés dans une classe actif de diversification appelée « Diversifié ».

Parmi les investissements en infrastructures, on distingue :

- ✓ Les financements de projets d'infrastructures (Dette)
- ✓ Les actifs d'infrastructures (Action)

La classe de diversification suit donc un indice composite défini de la manière suivante :

$$\tau^{\text{Div}}(h) = \alpha * \tau^{\text{Div_Action}}(h) + (1 - \alpha) * \tau^{\text{Infra_Dette}}(h)$$

Avec α la part d'actifs d'infrastructures (Action) calibrée sur l'instant initial et $\tau^{\text{Div_Action}}$ l'indice diversifié action $\tau^{\text{Div_Action}}$ qui est une combinaison linéaire de l'indice action calibrée sur un historique :

$$\tau^{\text{Div_Action}}(h) = \beta * \tau^{\text{Action}}(h) + \gamma$$

Enfin, l'indice infra dette $\tau^{\text{Infra_Dette}}$ qui suit la courbe Corp BBB de maturité 7 ans.

On a alors pour $h > 0$:

$$VB(MP, h) = VB(MP, h - 1) * (1 + \tau^{\text{Div}}(h))$$

Le revenu des actifs de diversification correspond :

- ✓ Aux coupons dans le cas de l'infrastructure dette
- ✓ Aux dividendes dans le cas de l'infrastructure action
- ✓ 0 sur le Private Equity.

Il est calculé de la manière suivante :

$$\text{Revenu}(MP, h) = VB(MP, h - 1) * (\tau_{\text{revenu}}^{\text{MP}}(h))$$

Avec $\tau_{\text{revenu}}^{\text{MP}}(h)$ le taux de revenu du diversifié calibré sur un historique.

4.2.2.7. Les autres actifs

Prêts au logement

Les prêts sont modélisés comme des obligations d'entreprise AAA, à taux fixe, en tenant compte d'une probabilité de défaut calibrée sur un historique de plusieurs années et appliquée directement aux flux projetés.

$$VB(MP, h) = \sum_{j=1}^m \frac{Flux(MP, j) * (1 - taux_defaut)}{(1 + \tau_m^{ZC}(j, h))^j}$$

Avec :

$Flux(MP, j)$, les intérêts et remboursements de l'année j ($h < j \leq m$) ;

$taux_defaut$ le taux de défaut calibré sur un historique et

$\tau_m^{ZC}(j, h)$ qui correspond au taux nominal ZC sans risque de maturité m (déterminée avec la classe de maturité) du scénario économique retenu à la date d'arrêt h .

Participations

Les titres de participations ne sont pas valorisés dans le modèle actuel.

4.2.3. Réallocation des actifs sur la cible

Actuellement, le modèle de projection de bilan fonctionne en stratégie dite « fixed ». Pour chaque Model Point d'actif souhaité, une allocation cible est définie et est conservée tout au long de la projection.

4.2.4. Provisions

Parmi les trois provisions à l'actif, seule la PRE est modélisée. La PDD est quant à elle cristallisée au niveau initial puisque les actifs sont modélisés en Model Point.

4.3. Interaction Actif-Passif

4.3.1. Rendement comptable

Le résultat comptable financier de la date d'arrêté intègre :

$$\begin{aligned} \text{Résultat comptable financier} \\ = & + \text{les coupons détachés sur l'exercice} \\ & + \text{les dividendes perçus sur l'exercice} \\ & + \text{l'amortissement annuel des surcotes décotes} \\ & + \text{les Plus ou Moins Values Réalisées (PMVR)} \\ & + \text{la variation de PRE} \\ & - \text{la variation de RC} \end{aligned}$$

Le rendement comptable financier correspond au résultat comptable financier sur le prix de revient des actifs.

4.3.2. Valorisation des passifs

Le Modèle De projection de Bilan (MDB) vient déformer les flux de passif générés de manière déterministe par le Modèle de Projection des Flux du Passif (MPFP) pour tenir compte des interactions actif-passif et ainsi établir les provisions comptables et prudentiels de ses bilans.

4.3.2.1. Provisions techniques

Pour calculer les provisions techniques prospectives, le MDB se base sur les flux de passif projetés, revalorisés chaque année au maximum entre le rendement comptable net de frais et le taux technique et actualisés au taux technique.

Dans la suite de ce document, cette revalorisation sera appelée « revalorisation S1 ». Et le taux de revalorisation S1 est définie par :

$$Taux_revalo_S1 = \max(Rendement_comptable ; 0 ; Taux_technique)$$

Avec *Rendement_comptable* le rendement comptable net de frais.

Les provisions techniques sont alors calculées de la manière suivante :

$$Provisions_techniques(h) = \sum_{j=h+1}^M \frac{Flux_passif(h ; j)}{(1 + Taux_technique)^{j-h-0.5}}$$

Avec

$$Flux_passif(h ; j) = Flux_passif(h - 1 ; j) * (1 + Taux_revalo_S1(h))$$

4.3.2.2. Meilleure estimation

Sinistres

Pour déterminer la meilleure estimation (BE – Best Estimate) des engagements de sinistres, BTP Prévoyance se base sur les provisions comptables calculées (tenant compte des revalorisations comptables des années précédentes), retraitées de l'actualisation.

Revalorisation des prestations :

Chaque année, comme le prévoit les conventions collectives, le conseil d'administration de BTP Prévoyance définit des coefficients de revalorisation des prestations.

Celui des garanties incapacité, invalidité, des rentes temporaires et des rentes viagères non RNPO se base sur :

- l'évolution des prix et des salaires ;
- le solde disponible au sein de la provision pour participation aux excédents ;
- la situation financière du régime et de la solvabilité de l'organisme.

Dans le cadre de la projection des flux, la modélisation suivante a été retenue :

Taux de Revalorisation = Moyenne entre l'inflation n-1 et l'inflation n-2
+ 50% de la moyenne des gains de pouvoir d'achat des salariés / 3 années précédentes

Le coefficient de revalorisation des rentes viagères RNPO se base, quant à lui, sur :

- l'évolution de la dernière valeur du point de retraite fixée et utilisée par l'AGIRC-ARRCO ;
- le solde disponible au sein de la provision pour participation aux excédents
- la situation financière du régime et de la solvabilité de l'organisme.

Dans le cadre de la projection des flux, la modélisation suivante a été retenue :

Taux de Revalorisation = Inflation n-1

Dans la suite de l'étude, cette revalorisation sera appelée la revalorisation S2 « Break-Even ».

Primes

Le BE de primes correspond à la différence entre les primes futures relatives à des engagements entrant dans la frontière des contrats d'une part et la sinistralité et les frais associés à ces primes d'autre part. La charge des sinistres futurs est estimée à l'aide du ratio sinistres à primes (S/P) appliqué au montant des primes anticipées. Les primes sont anticipées par le plan stratégique (Business Plan).

Frais

La grande majorité des frais de BTP Prévoyance sont répartis par nature, par destination et par risque. Les frais d'administration, de gestion, de placement et les autres charges techniques sont projetés sur toute la durée des engagements par l'intermédiaire d'un taux de frais appliqué aux prestations à régler. Les frais d'acquisition sont intégrés à la meilleure estimation des engagements de primes sur la première année de projection.

4.4. Calcul des indicateurs S2

4.4.1.1. Solvency Capital Requirement (SCR)

Dans le cadre de l'étude, seul le SCR marché brut est calculé à l'aide du Modèle De projection de Bilan. Les chocs de la formule standard de Solvabilité 2 sont appliqués à chaque date d'arrêté et tiennent compte de la transitoire action.

La capacité d'absorption (au niveau SCR marché) a été considérée comme constante puisqu'elle a été jugée relativement stable sur un historique de données.

Le SCR marché net est ensuite déterminé de la manière suivante, pour $h > 0$:

$$SCR_{marché}^{net}(h) = SCR_{marché}^{brut}(h) * (1 - abs)$$

Avec abs la capacité d'absorption calibrée sur l'instant initial :

$$abs = 1 - \frac{SCR_{marché}^{net}(0)}{SCR_{marché}^{brut}(0)}$$

De même, les SCR des autres modules ont été cristallisés.

4.4.1.2. Fonds propres Prudentiels

Tout comme le SCR marché net, les Fonds Propres Prudentiels (FP ou FPP) sont déterminés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Fonds Propres Prudentiels} &= \text{Valeurs de marché des actifs projetés} \\ &+ \text{Autres actifs (cristallisé)} \\ &+ \text{Impôts Différés Actif} \\ &- \text{Best Estimate} \\ &- \text{Marge de Risque (cristallisée)} \\ &- \text{Autres passifs (cristallisé)} \\ &- \text{Impôts Différés Passif} \end{aligned}$$

4.4.1.3. Ratio de Solvabilité

Le ratio de Solvabilité correspond au rapport entre les Fonds Propres Prudentiels et le SCR déterminés précédemment.

$$\text{Ratio} = \frac{\text{Fonds Propres Prudentiels}}{SCR_{total}^{net}}$$

5. Applications

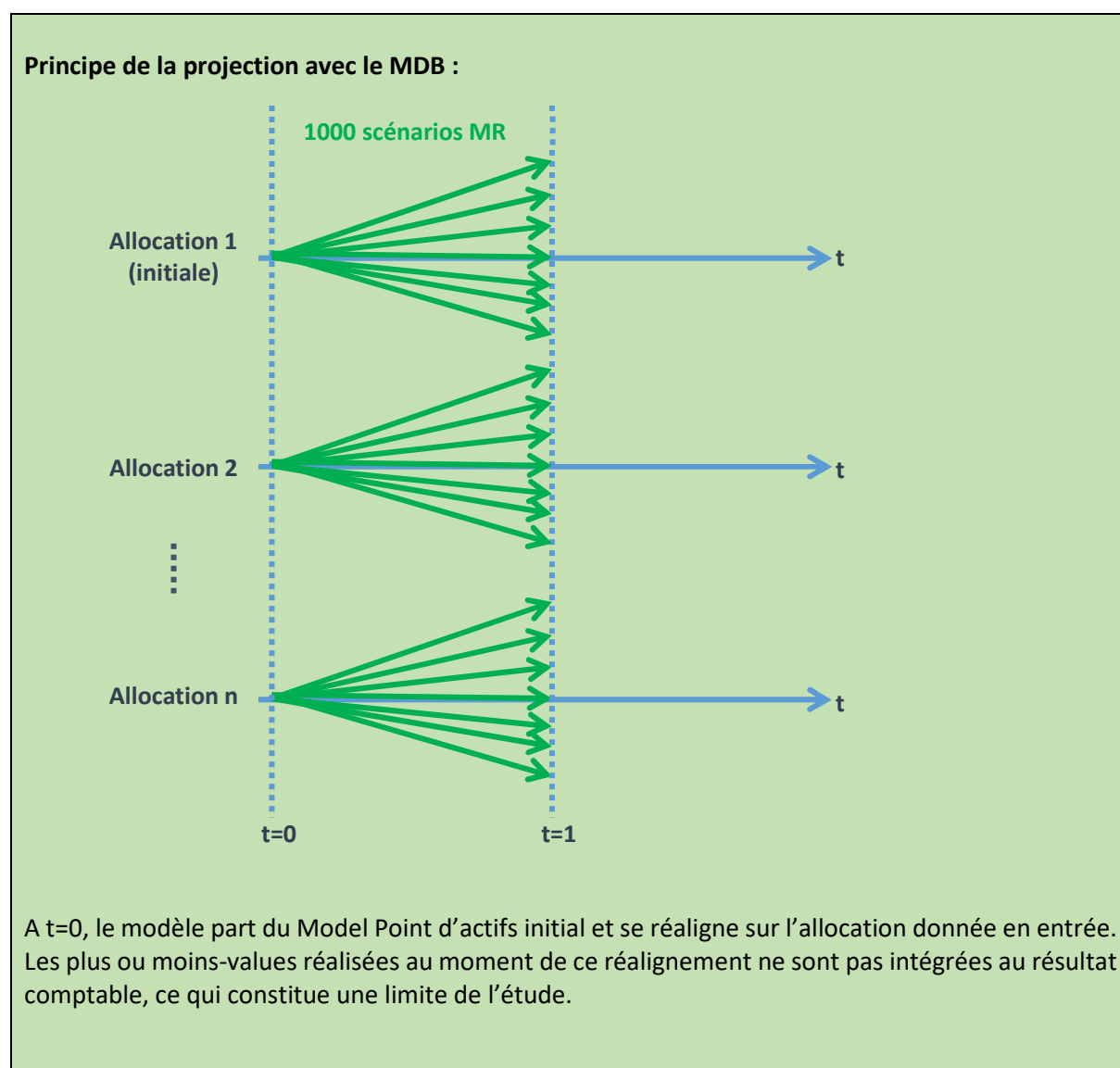
A partir du portefeuille de l'institution au 31/12/2018 et d'un set d'allocations restreint (1366 allocations), nous chercherons dans cette partie Application l'allocation « optimale » telle que :

$$\begin{cases} \max EU(\text{rendement FP}) + EU(\text{revalorisation}) \\ \text{s.c. } CVaR(\text{Perte de FP}, 5\%, 1) \leq 546M\text{€} \\ \text{s.c. } E[\text{Ratio}] \geq 200\% \end{cases}$$

Avec pour fonction d'utilité assureur et assuré :

$$u(x) = -\exp(-ax)$$

Cette résolution passe tout d'abord par le calibrage des paramètres d'aversion des fonctions d'utilité grâce à un set d'allocations réduit. Une fois ces paramètres fixés, une étude sur un set plus important sera menée. Enfin différentes sensibilités seront réalisées afin de mieux appréhender l'impact du choix des contraintes, des paramètres, des fonctions et des hypothèses telles que les scénarios et la revalorisation S2, sur l'allocation optimale.



En $t=1$, le modèle projette pour les n allocations, 1000 scénarios monde réel différents.

Donc pour chaque allocation et chaque scénario, le modèle va (cf. détails partie 4. Modélisation) :

- Valoriser les actifs ;
- Se réaligner à nouveau sur l'allocation cible et payer les prestations ;
- Calculer le rendement financier et comptable ;
- Valoriser les passifs S1 et S2 de manière déterministe (BE déterministe) ;
- Calculer des indicateurs S2 également de manière déterministe.

Nous allons ensuite calculer les utilités pour les deux métriques retenues (allocation X scénario).

Enfin, par allocation nous allons évaluer les utilités espérées de chaque métrique.

5.1. Situation initiale

5.1.1. Données

5.1.1.1. Bilan comptable

Le bilan comptable met en représentation du passif, les actifs en valeur nette comptable. Au 31/12/2018, le bilan comptable de l'institution BTP Prévoyance est le suivant :

Bilan comptable 31/12/2018			
Actif (M€)		Passif (M€)	
Actifs de placement	8 952	Fonds propres comptables	3 429
Provisions cédées	446	Provisions techniques	5 971
Actifs incorporels	18		
Créances	481	Dettes	497
Total	9 897	Total	9 897

Le portefeuille est représenté par un actif global de 9 897M€ dont 8 952M€ d'actifs de placement qui intégreront les model points du modèle de projection des bilans (90%).

Les fonds propres comptables s'élèvent à 3 429M€. Ce montant représente environ 35% de l'actif total. Les provisions techniques quant à elles, atteignent 5 971M€ en brut de réassurance et 5 525M€ en net et représente 60% du bilan.

5.1.1.2. Bilan prudentiel

Le bilan prudentiel met en représentation le passif et les actifs en valeurs de marché. Au 31/12/2018, le bilan prudentiel de l'institution BTP Prévoyance est le suivant :

Bilan prudentiel 31/12/2018			
Actif (M€)		Passif (M€)	
Actifs de placement	9 907	Fonds propres prudentiels	3 246
Provisions cédées	401	Provisions techniques	7 116
		Best Estimate	6 605
Impôts différés actifs	71	Marge de risque	511
Créances	481	Dettes	497
Total	10 859	Total	10 859

Le portefeuille est représenté par un actif global de 10 859M€ dont 9 907M€ d'actifs de placement qui intégreront les model points du modèle de projection des bilans (91%).

Les fonds propres prudentiels s'élèvent à 3 246M€. Ce montant représente environ 30% de l'actif total. La provision Best Estimate quant à elle, atteint 6 605M€ en brut de réassurance et 6 204M€ en net et représente 61% du bilan.

5.1.1.3. Capital requis et ratio de couverture

Le tableau suivant montre la décomposition du SCR total par module de risque au 31/12/2018 :

En M€	31/12/2018
Ratio de Solvabilité	240%
Fonds Propres	3 246
SCR	1 354
Ajustement RFF	-
Risque Opérationnel	85
Ajustements	- 85
BSCR	1 354
Marché	713
Contrepartie	198
Vie	217
Santé	790
Non-Vie	-

Le SCR global du portefeuille étudié s'élève à 1 354M€. Les risques principaux supportés par l'institution sont les risques marché et santé, respectivement 713M€ en brut (611M€ en net) et 790M€ en brut (784M€ en net).

Le SCR marché au 31/12/2018 est détaillé ci-dessous :

En M€	Brut	Net
SCR Marché	713	611
Taux	88	43
Baisse	88	43
Action	356	332
Type 1	166	140
Type 2	177	177
Société infra (QII)	12	12
Action infra (QICI)	25	25
Immobilier	194	168
Spread	170	144
Concentration	-	-
Devise	38	12

Parmi les risques de marché, le risque action est prépondérant (332M€ en net). Cette dominance s'explique par la part importante des actifs soumis aux chocs action dans le portefeuille (action, private equity, infrastructure, etc .) mais aussi par un choc élevé sur ces actifs risqués.

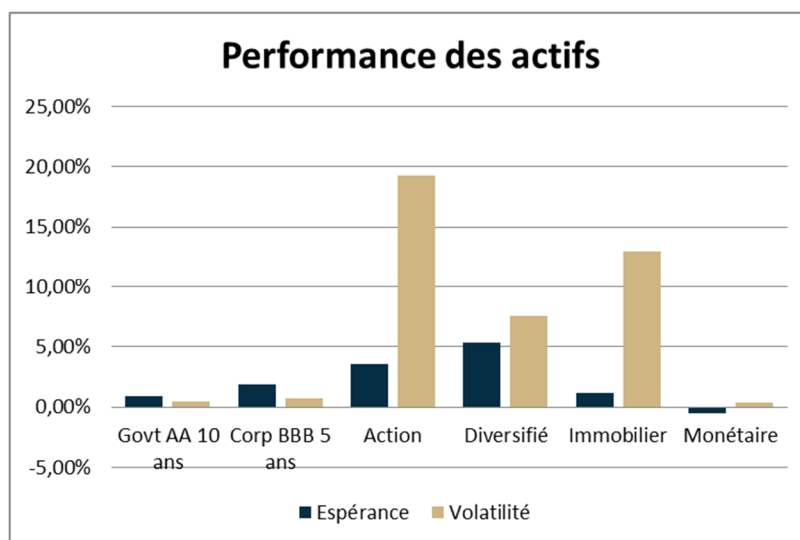
Au 31/12/2018, le ratio de solvabilité de l'institution atteint 240%.

5.1.2. Hypothèses

5.1.2.1. Scénarios

L'étude se base sur des scénarios stochastiques, monde réel au 31/12/2018.

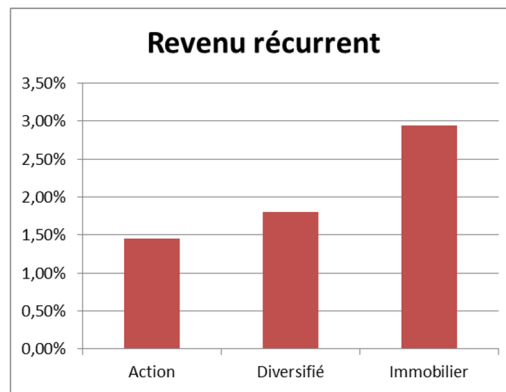
L'espérance et la volatilité de rendement des principaux indices à horizon d'un an ont été représentées ci-dessous :



Une des premières remarques qu'on puisse se faire en examinant les indicateurs de distribution précédents, c'est que parmi les actifs risqués (action, diversifié⁵ et immobilier), le diversifié apporte la meilleure espérance de rendement avec la plus faible volatilité. En effet, par sa construction (cf paragraphe 4.2.2.6), la performance du diversifié est une combinaison quasi équilibrée de celle de l'Action et de celle du Corp BBB 7ans, à laquelle s'ajoute environ 5%. La combinaison des deux indices permet de réduire la volatilité par rapport à l'action et l'ajout de 5% de performance améliore l'espérance de rendement.

Le diversifié bénéficie également d'un revenu récurrent supérieur à celui des actions. Il est néanmoins inférieur aux loyers de l'immobilier :

⁵ La classe « diversifié » regroupe les investissements en infrastructure et en *private equity*



5.1.2.2. Revalorisation S2

La revalorisation prospective qui intervient dans le calcul du Best Estimate, retenue dans cette étude est la revalorisation « Break-Even », liée à l'inflation (cf 4.3.2.2. Meilleure estimation).

Ce choix a été fait afin de tenir compte de l'engagement de l'assureur de revaloriser ses engagements en fonction de l'inflation.

5.1.3. Calibrage

Dans cette partie, nous cherchons à fixer les paramètres qui vont nous permettre de trouver l'allocation « optimale » de l'institution à l'aide d'un set réduit d'allocations.

Après la description du set de calibrage, nous allons tout d'abord étudier l'utilité espérée du rendement des fonds propres en fonction du paramètre d'aversion puis celle du taux de revalorisation S1. Cette étude nous permettra de fixer les paramètres d'aversion pour chaque métrique. Enfin, nous analyserons la résolution de notre problématique sur le set de calibrage.

5.1.3.1. Allocations de calibrage

Afin de définir les paramètres d'aversion des fonctions d'utilité, un set de 187 allocations a été testé sur 1000 scénarios sur un horizon d'un an dans le modèle ALM de PRO BTP en partant du portefeuille au 31/12/2018.

Le set d'allocations de calibrage provient d'une précédente étude.

	Initiale	Min	Max
Obligations - Govt	36,7%	36,7%	46,7%
Obligations - Corp	18,6%	18,6%	28,6%
Actions	5,6%	0,1%	15,6%
Diversifié	5,1%	5,1%	15,1%
Immobilier	7,8%	7,8%	17,8%
Monétaire	10,4%	0,4%	15,9%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%		

Compte tenu de l'espérance de ratio du profil largement supérieur à l'objectif stratégique (241%) et de l'espérance de rendement des fonds propres quasi nulle, le choix de tester des allocations plus risquées a été fait afin d'aller chercher du rendement de fonds propres et du résultat financier. Le désinvestissement de l'immobilier et du diversifié n'a donc pas été testé. En revanche, il été envisagé de diminuer la classe action qui coûte plus cher en capital que le diversifié et l'immobilier. Des allocations avec très peu de monétaire ont également été testées. Enfin, une amplitude de +10% sur les différentes classes (hors monétaire et autres actifs) a été appliquée.

5.1.3.2. Résultats

Dans la partie 3. Analyse de ce mémoire, nous avons défini 2 métriques d'étude :

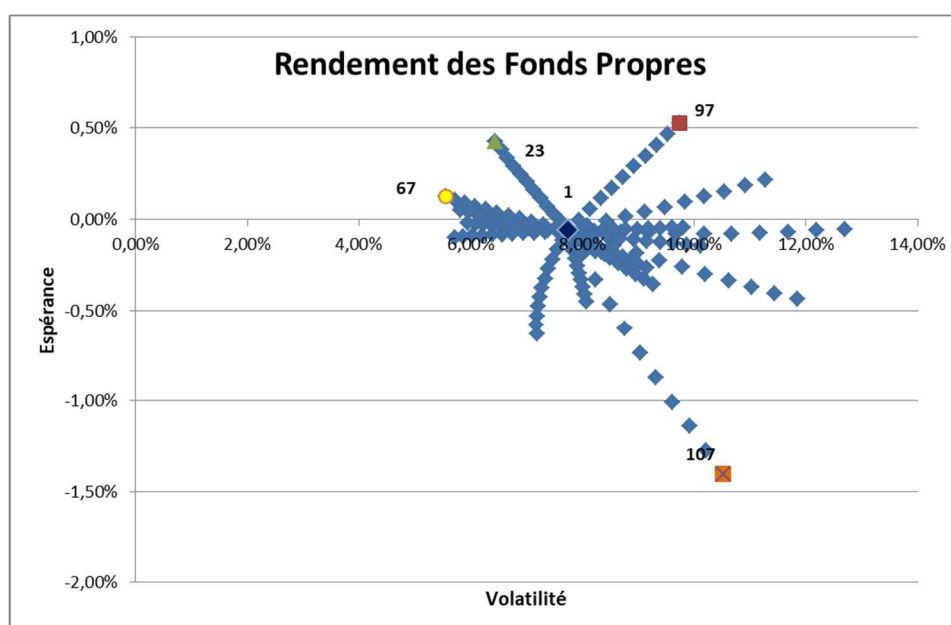
- Métrique Assureur : Rendement des Fonds Propres Prudentiels
- Métrique Assuré : Taux de revalorisation S1 en $t = 1$

Ainsi que la fonction d'utilité exponentielle négative à appliquer à ces deux métriques.

Cette partie vise à fixer le niveau des paramètres d'aversion des fonctions d'utilité de chaque métrique.

Rendement des fonds propres prudentiels

Le nuage de l'espérance de rendement des fonds propres en fonction de sa volatilité pour le set d'allocations de calibrage est le suivant :



L'espérance de rendement des fonds propres prudentiels ne dépasse pas 1% pour les allocations testées et les niveaux de volatilité observés varient entre 5% et 13%.

Parmi ces allocations, les allocations 97, 23 et 67 maximisent l'espérance de rendement des fonds propres pour un niveau de volatilité donné.

Ces allocations sont détaillées ci-dessous :

	Initiale	97	23	67	Min	Max
Obligations - Govt	36,7%	36,7%	36,7%	36,7%	36,7%	46,7%
Obligations - Corp	18,6%	18,6%	18,6%	18,6%	18,6%	28,6%
Actions	5,6%	5,6%	0,1%	0,1%	0,1%	15,6%
Diversifié	5,1%	15,1%	10,6%	5,1%	5,1%	15,1%
Immobilier	7,8%	7,8%	7,8%	7,8%	7,8%	17,8%
Monétaire	10,4%	0,4%	10,4%	15,9%	0,4%	15,9%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%		
Espérance rendement FP	-0,1%	0,5%	0,4%	0,1%		
Volatilité rendement FP	7,7%	9,7%	6,4%	5,5%		
Espérance revalorisation	1,9%	2,1%	1,7%	1,6%		
Volatilité revalorisation	0,4%	0,5%	0,3%	0,3%		
Espérance de ratio	241,2%	219,2%	243,4%	256,2%		
CVaR 95 perte FP	434	534	344	308		

Les préférences de l'assureur ont été modélisées avec une fonction d'utilité exponentielle négative. La fonction d'utilité appliquée à chaque scénario pour chaque allocation donc est la suivante :

$$u(x) = -\exp(-\lambda x)$$

Avec λ le paramètre d'aversion.

Pour chaque allocation j , l'espérance de l'utilité a ensuite été calculée.

$$EU(\text{Rendement_FPP}; j) = E[u(\text{Rendement_FPP}(j; i))]$$

$$EU(\text{Rendement_FPP}; j) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} -\exp(-\lambda * \text{Rendement_FPP}(j; i))$$

Enfin, un classement des 20 espérances d'utilité les plus élevées a ensuite été effectué.

Sensibilité au paramètre d'aversion du classement des 20 meilleures allocations en fonction de l'espérance d'utilité :

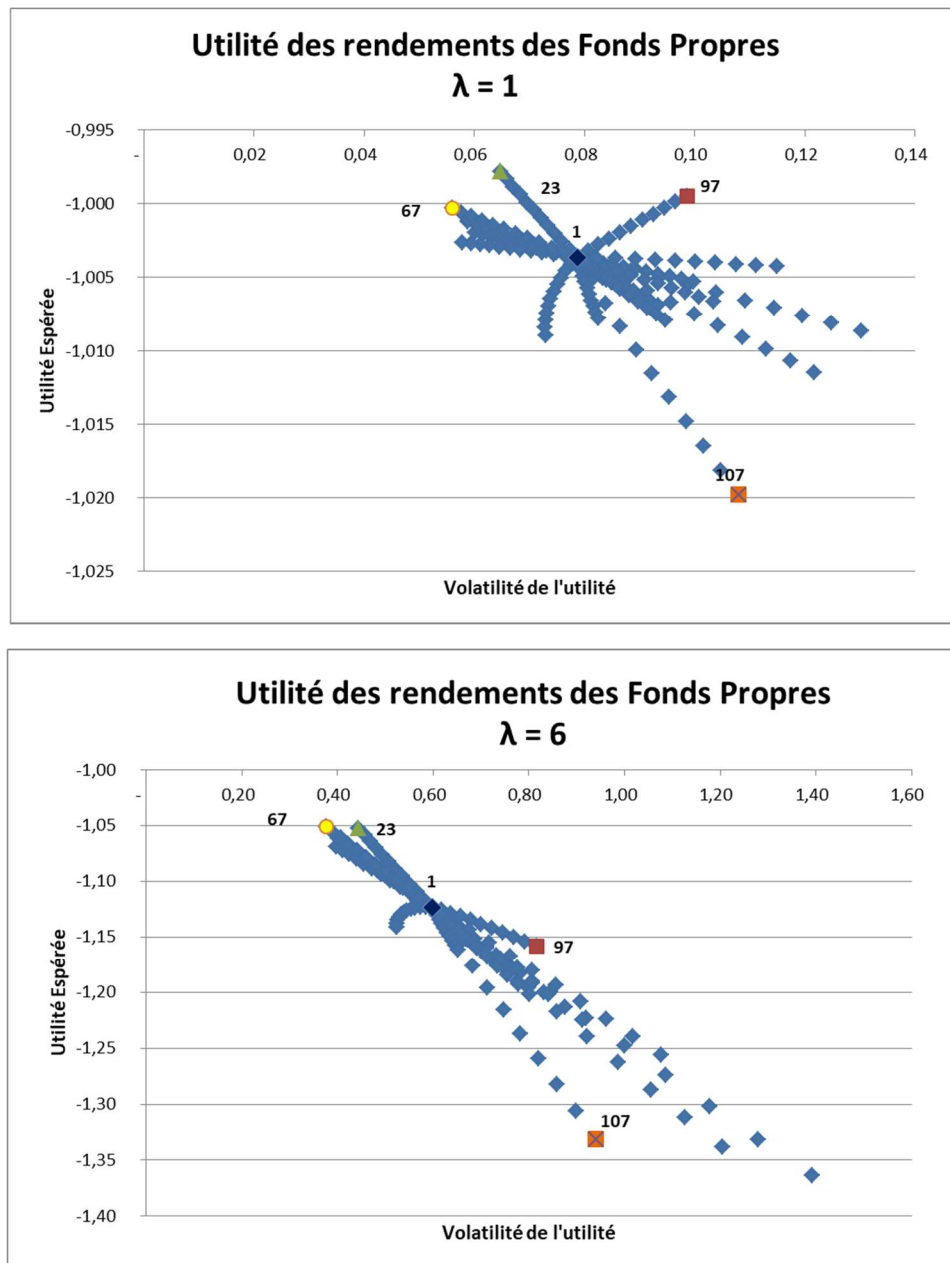
Classement	Paramètre d'aversion														
	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
1	23	23	23	23	23	23	67	67	67	67	67	67	67	67	67
2	97	22	22	22	22	67	23	23	66	66	66	66	66	66	66
3	22	21	21	21	67	22	66	66	23	23	56	56	45	45	45
4	96	20	20	67	66	66	22	65	65	56	65	45	56	56	56
5	21	97	67	66	21	21	65	22	56	65	23	65	65	65	65
6	95	96	66	20	65	65	56	56	22	45	45	55	12	12	12
7	20	19	19	65	56	56	21	55	55	55	55	12	44	44	44
8	94	95	65	56	20	55	55	64	45	22	12	44	55	55	55
9	19	67	56	19	64	64	64	21	64	64	64	64	64	11	11
10	93	18	18	64	55	20	45	45	12	12	22	11	11	64	43
11	18	66	64	55	19	12	12	12	21	44	44	54	43	43	64
12	67	94	55	54	54	54	20	54	44	54	54	43	54	54	54
13	92	65	63	18	12	45	54	44	54	21	11	23	10	10	10
14	17	17	54	63	63	63	44	11	11	11	21	10	23	42	42
15	66	93	17	12	45	19	63	63	63	63	43	63	42	23	53
16	65	64	12	53	11	11	11	20	43	43	63	53	63	63	63
17	91	56	53	11	53	44	53	43	20	53	53	42	53	53	23
18	16	55	62	45	44	53	43	53	53	10	10	22	22	9	9
19	64	63	11	62	18	10	19	10	10	20	42	9	9	22	22
20	56	16	16	17	62	43	10	19	42	42	20	21	41	41	41

Avec une utilité exponentielle négative et un paramètre faible, l'assureur va tout d'abord privilégier les allocations ayant les espérances de rendement positives. Il cherche avant tout à maximiser le rendement de ses fonds propres.

Avec un paramètre d'aversion égal à 0.5, l'investisseur va préférer l'allocation 23 à l'allocation 97 car la hausse de la volatilité n'est pas compensée par le gain d'espérance de rendement.

Plus le paramètre augmente (et donc son aversion), plus il va s'orienter vers des allocations peu risquées (avec une faible volatilité), préférant même renoncer à un rendement positif (par exemple l'allocation 45 a un rendement de -0,1% mais est classée 3^{ème} meilleure allocation pour un paramètre de 50).

Exemples de nuage de l'espérance de l'utilité du rendement des fonds propres en fonction de sa volatilité pour le set d'allocations de calibrage :



La fonction d'utilité permet de déformer le nuage des rendements des fonds propres. Plus le paramètre d'aversion augmente, plus les allocations ayant une forte volatilité ont une faible espérance d'utilité.

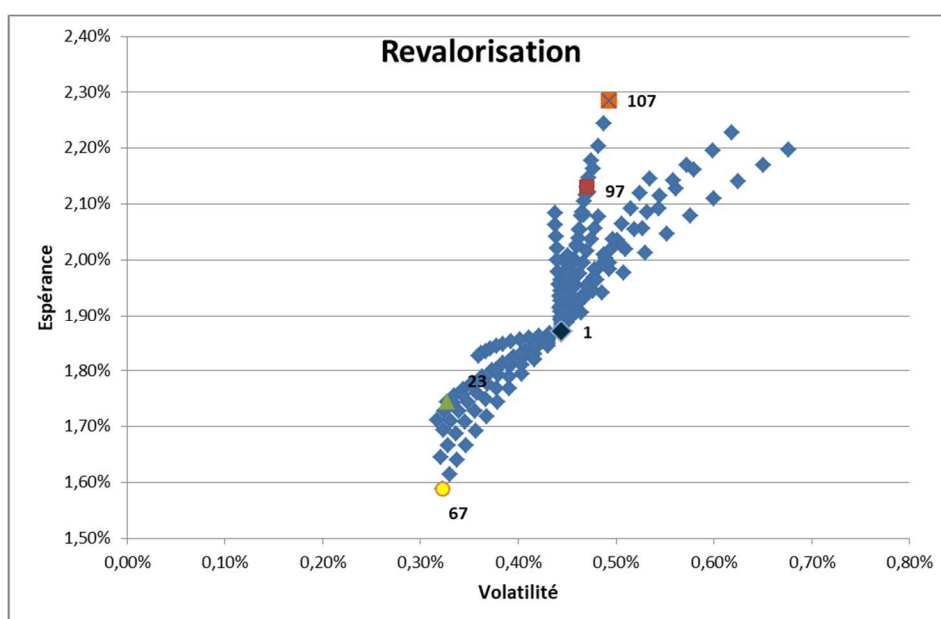
Nous faisons l'hypothèse dans notre portefeuille étudié que l'institution de prévoyance privilégie une allocation ayant une espérance de rendement positive ainsi qu'une volatilité raisonnable et fixe un coefficient d'aversion compris entre 0,5 et 5 (allocation 23). Pour le reste de l'étude, il sera fixé à 3.

Paramètre d'aversion assureur : $\lambda = 3$

De même, nous devons fixer le niveau du paramètre d'aversion de l'assuré.

Taux de revalorisation S1

Le nuage de l'espérance de revalorisation des engagements en fonction de sa volatilité pour le set d'allocations de calibrage est le suivant :



Comme vu dans la partie 0 Valorisation des passifs, le taux de revalorisation S1 correspond au maximum entre 0 et le rendement comptable affecté aux provisions. Le rendement comptable intègre les revenus récurrents des actifs (dividendes, loyers, coupons, etc.) mais également les réalisations des plus ou moins-values (PMVR).

L'espérance du taux de revalorisation S1 est comprise entre 1,6% et 2,3% pour les allocations testées. Les niveaux de volatilité sont, quant à eux très faibles (<1%).

L'allocation 107 correspond à l'allocation qui donne la meilleure espérance de revalorisation des engagements.

	Initiale	107	Min	Max
Obligations - Govt	36,7%	36,7%	36,7%	46,7%
Obligations - Corp	18,6%	18,6%	18,6%	28,6%
Actions	5,6%	5,6%	0,1%	15,6%
Diversifié	5,1%	5,1%	5,1%	15,1%
Immobilier	7,8%	17,8%	7,8%	17,8%
Monétaire	10,4%	0,4%	0,4%	15,9%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%		
Espérance rendement FP	-0,1%	-1,4%		
Volatilité rendement FP	7,7%	10,5%		
Espérance revalorisation	1,9%	2,3%		
Volatilité revalorisation	0,4%	0,5%		
Espérance de ratio	241,2%	218,4%		
CVaR 95 perte FP	434	620		

L'allocation 107 possède une volatilité légèrement plus élevée que l'allocation initiale. Cela s'explique par la hausse de la part de l'immobilier au détriment du cash (moins volatile mais aussi moins rentable).

Fonction exponentielle négative

Comme pour les préférences de l'assureur, les préférences de l'assuré ont tout d'abord été modélisées avec une fonction d'utilité exponentielle négative. La fonction d'utilité appliquée à chaque scénario pour chaque allocation donc est la suivante :

$$u(x) = -\exp(-\lambda x)$$

Avec λ le paramètre d'aversion.

Pour chaque allocation j , l'espérance de l'utilité a ensuite été calculée.

$$EU(Taux_revalo_S1; j) = E[u(Taux_revalo_S1(j; i))]$$

$$EU(Taux_revalo_S1; j) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} -\exp(-\lambda * Taux_revalo_S1(j; i; t = 1))$$

Enfin, un classement des 20 espérances d'utilité les plus élevées a ensuite été effectué.

Sensibilité au paramètre d'aversion du classement des 20 meilleures allocations en fonction de l'espérance d'utilité :

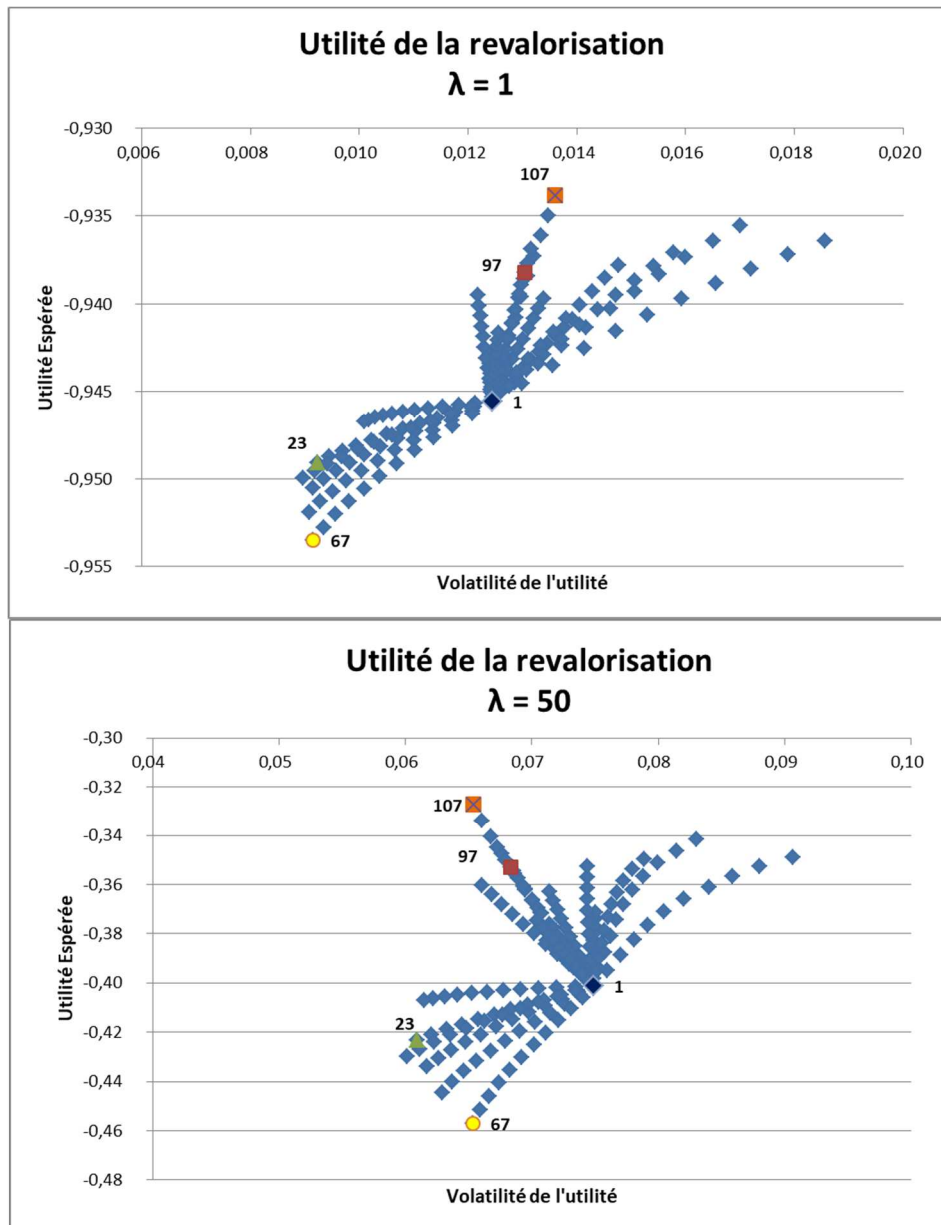
Classement	Paramètre d'aversion														
	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
1	107	107	107	107	107	107	107	107	107	107	107	107	107	107	107
2	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106
3	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	105	105
4	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	147	147
5	87	87	87	87	146	146	146	146	146	146	146	146	146	137	137
6	146	146	146	146	87	87	87	87	87	87	87	137	137	146	146
7	137	137	137	137	137	137	137	137	137	137	137	87	87	104	104
8	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	104	104	87	87
9	86	86	86	86	86	86	86	104	104	104	104	177	177	177	177
10	104	104	104	104	104	104	104	86	86	86	86	145	145	136	136
11	145	145	145	145	145	145	145	145	145	145	145	86	136	145	145
12	136	136	136	136	136	136	136	136	136	136	136	136	86	86	167
13	167	167	167	167	167	167	167	167	167	167	167	167	167	167	86
14	176	176	176	176	176	176	176	176	176	176	176	176	176	97	97
15	85	85	85	85	85	85	85	85	85	85	85	97	97	176	176
16	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	85	103	103	103
17	144	144	144	144	144	144	144	144	144	144	144	103	85	135	135
18	103	103	103	103	103	103	103	103	103	103	103	144	135	85	144
19	166	166	166	166	166	166	166	166	135	135	135	135	144	144	85
20	135	135	135	135	135	135	135	135	166	166	166	166	166	166	166

Comme pour le rendement des fonds propres, l'investisseur va d'abord chercher à maximiser l'espérance de revalorisation.

Etant donné que l'assuré bénéficie d'un montant de rente garanti, en cas de chute des marchés financiers, sa revalorisation sera à minima égale à 0%. Grâce à ce plancher, l'utilité attribuée aux scénarios très défavorables (résultat comptable négatif) ne varie pas en fonction du paramètre $(-\exp(-\lambda x))$.

a*0%) = -1). Seules les utilités des scénarios favorables augmentent avec le paramètre et par conséquent la hausse de l'utilité espérée de l'allocation est moins rapide que pour les rendements de fonds propres. Le basculement sur une allocation moins risquée est alors plus tardif : il faut attendre que le paramètre d'aversion dépasse 50.

Exemples de nuage de l'espérance de l'utilité de la revalorisation en fonction de sa volatilité pour le set d'allocations de calibrage :



Comme pour les fonds propres, la fonction d'utilité permet de déformer le nuage de la revalorisation des engagements. Mais avec le plancher à 0%, la déformation n'est visible qu'à partir d'un coefficient d'aversion très élevé.

Tout comme pour l'utilité assureur, le paramètre d'aversion a été fixé à 3.

Paramètre d'aversion assuré : $\lambda = 3$

Combinaison

En tant qu'organisme paritaire, l'intérêt des clients est au cœur des décisions de PRO BTP. C'est pourquoi, dans le cadre de l'étude, l'hypothèse que l'assureur priorise le critère de la revalorisation en lui affectant un coefficient de 2 a été faite.

Nous recherchons donc l'allocation telle que :

$$\begin{cases} \max_{j \in \text{set calibrage}} EU(\text{rendement_FPP}; j) + 2 * EU(\text{Taux_revalo_S1}; j) \\ \text{s. c. } CVaR(\text{Perte de FP}, 5\%, 1) \leq 546M\text{€} \\ \text{s. c. } E[\text{Ratio}] \geq 200\% \end{cases}$$

Avec pour fonction d'utilité assureur et assuré :

$$u(x) = -\exp(-3x)$$

Dans cette partie combinaison, les fonctions d'utilité sont appliquées aux métriques de chaque scénario pour toutes les allocations testées. Pour chaque allocation, l'espérance de l'utilité est ensuite calculée.

Nous avons donc pour le rendement des fonds propres prudentiels de chaque allocation j et de chaque scénario i :

$$\text{Rendement_FPP}(j; i) = \frac{\text{FPP}(j; i; t = 1)}{\text{FPP}(j; i; t = 0)} - 1$$

Et l'espérance d'utilité pour chaque allocation j:

$$EU(\text{Rendement_FPP}; j) = E[u(\text{Rendement_FPP}(j; i))]$$

$$EU(\text{Rendement_FPP}; j) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} -\exp(-3 * \text{Rendement_FPP}(j; i))$$

De même, pour la revalorisation, son espérance d'utilité est la suivante :

$$EU(\text{Taux_revalo_S1}; j) = E[u(\text{Taux_revalo_S1}(j; i))]$$

$$EU(\text{Taux_revalo_S1}; j) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} -\exp(-3 * \text{Taux_revalo_S1}(j; i; t = 1))$$

On définit l'espérance d'utilité totale de chaque allocation j par :

$$EU(\text{Total}; j) = E[u(\text{Rendement_FPP}(j; i)) + 2 * u(\text{Taux_revalo_S1}(j; i))]$$

$$EU(\text{Total}; j) = E[u(\text{Rendement_FPP}(j; i))] + 2 * E[u(\text{Taux_revalo_S1}(j; i))]$$

$$EU(\text{Total}; j) = EU(\text{Rendement_FPP}; j) + 2 * EU(\text{Taux_revalo_S1}; j)$$

Et la variance de l'utilité totale par :

$$V(\text{Total}; j) = V[u(\text{Rendement_FPP}(j; i)) + 2 * u(\text{Taux_revalo_S1}(j; i))]$$

$$\begin{aligned} V(\text{Total}; j) &= V[u(\text{Rendement_FPP}(j; i))] + 4 * V[u(\text{Taux_revalo_S1}(j; i))] + 2 \\ &\quad * \text{cov}(u(\text{Rendement_FPP}(j; i)); u(\text{Taux_revalo_S1}(j; i))) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & cov(u(Rendement_FPP(j; i)); u(Taux_revalo_S1(j; i))) \\ &= E[u(Rendement_FPP(j; i)) * u(Taux_revalo_S1(j; i))] \\ &- E[u(Rendement_FPP(j; i))] * E[u(Taux_revalo_S1(j; i))] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V(Total; j) &= V[u(Rendement_FPP(j; i))] + 4 * V[u(Taux_revalo_S1(j; i))] + 2 \\ &* E[u(Rendement_FPP(j; i)) * u(Taux_revalo_S1(j; i))] - 2 \\ &* EU(Rendement_FPP; j) * EU(Taux_revalo_S1; j) \end{aligned}$$

La volatilité de l'utilité est donnée par :

$$Vol(Total; j) = \sqrt{V(Total; j)}$$

Enfin, la recherche du maximum de la somme des utilités espérées et l'application des contraintes vont permettre d'établir l'allocation cible du portefeuille étudié.

Synthèse

L'étude séparée de l'utilité espérée du rendement des fonds propres et de celle de la revalorisation à partir du set de calibrage nous a permis de fixer les paramètres d'aversion de chaque métrique : $\lambda=3$.

Nous allons maintenant chercher à déterminer l'allocation cible du portefeuille étudié en utilisant un set d'allocations plus important que celui du calibrage (« set étude »).

Nous recherchons donc l'allocation telle que :

$$\begin{cases} \max_{j \in \text{set étude}} EU(\text{rendement_FPP}; j) + 2 * EU(\text{Taux_revalo_S1}; j) \\ \text{s. c. } CVaR(\text{Perte de FP}, 5\%, 1) \leq 546M\text{€} \\ \text{s. c. } E[\text{Ratio}] \geq 200\% \end{cases}$$

Avec pour fonction d'utilité assureur et assuré :

$$u(x) = -\exp(-3x)$$

5.2. Recherche de l'allocation optimale

Afin de déterminer une allocation dite « optimale », nous utilisons un jeu de 1366 allocations sur 1000 scénarios pour un horizon d'un an dans le modèle ALM de PRO BTP en partant du portefeuille au 31/12/2018.

Voici l'amplitude des valeurs testées :

	Initiale	Min	Max
Obligations - Govt	36,7%	16,6%	53,1%
Obligations - Corp	18,6%	8,4%	26,9%
Actions	5,6%	0,0%	30,0%
Diversifié	5,1%	0,0%	30,0%
Immobilier	7,8%	0,0%	30,0%
Monétaire	10,4%	4,3%	30,0%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%		

Compte tenu de la nature des « autres actifs », leur part a été cristallisée sur chaque allocation.

Une part minimale de 4% de monétaire a été conservée tout au long de l'étude pour permettre à l'institution de faire face à ses engagements rapidement sans avoir à désinvestir des actifs. Le monétaire a été limité à 30% de l'ensemble du portefeuille.

Une part minimale obligataire de 25% a également été maintenue tout au long des projections. Le maximum quant à lui, a été fixé à 80%, soit la totalité du portefeuille auquel sont retranchés les 4% de monétaire et les 16% des autres actifs.

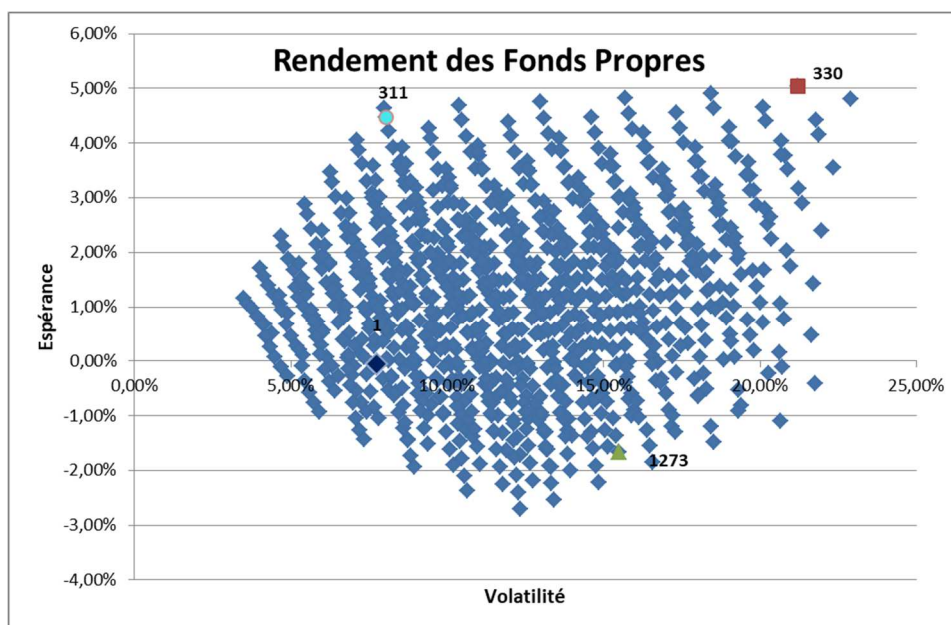
Enfin, les bornes minimale et maximale des actifs risqués ont été fixées respectivement à 0% et à 30% afin de conserver un effet de diversification des actifs et de tenir compte des contraintes opérationnelles.

L'analyse des résultats se décompose en deux parties. La première (cf. 5.2.1 Distribution) va porter sur l'analyse du nuage risque/rendement (volatilité/espérance) de chaque métrique avant application des fonctions d'utilité. La seconde partie (cf. 0 Utilité) est dédiée à l'analyse de l'allocation cible obtenue après application des fonctions d'utilité et des contraintes établies.

5.2.1. Distribution

5.2.1.1. Rendement des fonds propres

Le nuage de l'espérance de rendement des fonds propres en fonction de sa volatilité pour le set d'allocations de l'étude est le suivant :



Avec

Allocation	Définition	Description
1	Allocation initiale	Point de référence
330	$\text{Max}_{j \in \text{set étude}} (E_j[\text{Rendement_FPP}])$	Allocation qui donne l'espérance de rendement des FPP la plus élevée sur le set de l'étude
1273	$\text{Max}_{j \in \text{set étude}} (E_j[\text{Taux_revalo_S1}])$	Allocation qui donne l'espérance de revalorisation la plus élevée sur le set de l'étude
311	$\begin{cases} \max_{j \in \text{set calibrage}} EU(\text{Totale}; j) \\ \text{s. c. } CVaR(\text{Perte de FP}, 5\%, 1) \leq 546 \text{ M€} \\ \text{s. c. } E[\text{Ratio}] \geq 200\% \end{cases}$	Allocation optimale du set d'étude

L'allocation 1 correspond toujours à l'allocation initiale.

L'espérance de rendement des fonds propres prudentiels varie entre -3% et +5% pour le set d'allocations de l'étude.

Bien que seul le diversifié ait une espérance de rendement légèrement supérieure à 5%, ce ne sont pas des allocations à 100% diversifié qui atteignent 5% de rendement de fonds propres. En effet, les fonds propres étant calculés comme l'actif net (Valeur de Marché – Provisions Techniques), il existe un effet de levier de 200% lié aux passifs.

Si l'objectif de l'assureur était uniquement de maximiser l'espérance de rendement des fonds propres pour le même niveau de volatilité que l'allocation initiale (8%), il existerait de meilleures allocations.

En revanche, ces allocations peuvent dégrader l'espérance de revalorisation et/ou le ratio de solvabilité.

Les niveaux de volatilité observés varient entre 3% et 23%.

L'allocation initiale avec 8% de volatilité, fait partie des allocations à faible volatilité dans le set de l'étude. Il est à noter que certaines allocations donnent de meilleures espérances de rendement pour des volatilités encore plus faibles.

Parmi le set d'allocations testées, l'allocation 597 maximise l'espérance de rendement des fonds propres pour le même niveau de volatilité que l'allocation initiale et l'allocation 330 maximise l'espérance de rendement sur tout le set étudié.

Ces allocations sont détaillées ci-dessous :

	Initiale	597	330	Min	Max
Obligations - Govt	36,7%	19,9%	16,6%	16,6%	53,1%
Obligations - Corp	18,6%	10,1%	8,4%	8,4%	26,9%
Actions	5,6%	0,0%	25,0%	0,0%	30,0%
Diversifié	5,1%	25,0%	30,0%	0,0%	30,0%
Immobilier	7,8%	5,0%	0,0%	0,0%	30,0%
Monétaire	10,4%	24,3%	4,3%	4,3%	30,0%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%		
Espérance rendement FP	-0,1%	3,3%	5,0%		
Volatilité rendement FP	7,7%	7,7%	21,2%		
Espérance revalorisation	1,9%	1,5%	1,8%		
Volatilité revalorisation	0,4%	0,3%	0,9%		
Espérance de ratio	241,2%	219,1%	168,1%		
CVaR 95 perte FP	434	308	991		

Compte tenu de la méthode de calcul des fonds propres, la maximisation de son rendement privilégie des allocations qui ont un effet de valorisation des actifs supérieur à l'effet de revalorisation des passifs. Cela implique des allocations avec une espérance de rendement élevée et des revenus en légère baisse.

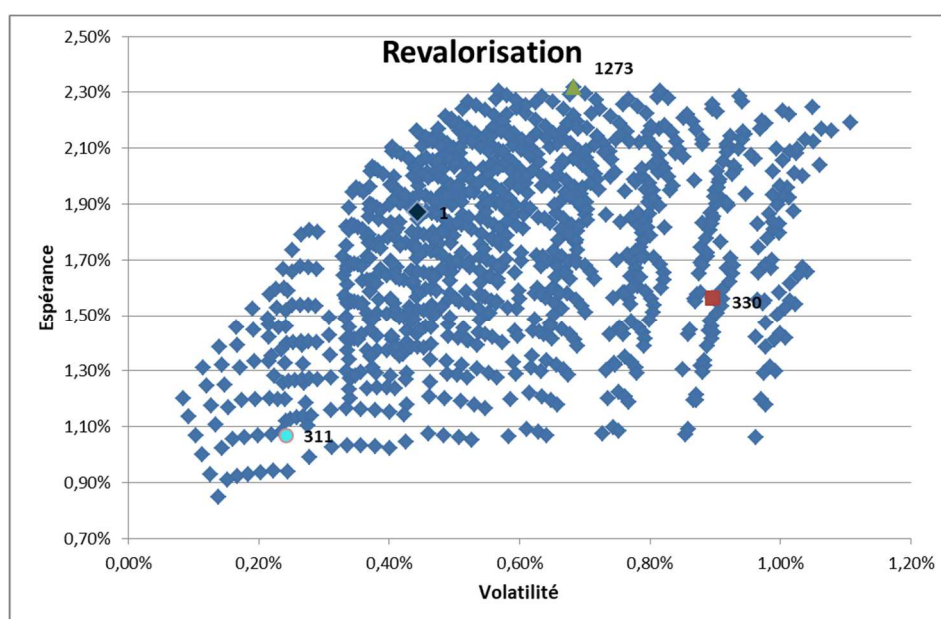
L'allocation 597 qui maximise l'espérance de rendement des fonds propres pour le même niveau de volatilité que l'allocation initiale, atteint 3.3% de rendement. Son espérance de revalorisation baisse de 0.4% mais reste toujours supérieure au taux technique moyen du portefeuille de 0.92%. En revanche, son espérance de ratio perd 22% (241% vs 219%).

Cela s'explique par une part diversifié proche du maximum. En effet, parmi les actifs risqués, c'est le diversifié qui offre la meilleure espérance de rendement. Cependant, celui-ci coûte cher en capital et entraîne une dégradation du ratio.

L'allocation 330 qui maximise l'espérance de rendement des fonds propres atteint les bornes inférieures pour les obligations et le monétaire qui sont des actifs à faibles revenus mais également à faibles espérances de rendement. Le diversifié qui offre la meilleure espérance de rendement va être saturé. Puis ce sera au tour de l'action. Enfin, compte tenu de ses revenus récurrents importants et de sa faible espérance de rendement, la poche immobilier n'est pas du tout investie.

5.2.1.2. Taux de revalorisation S1

Le nuage de point des espérances de rendement des fonds propres en fonction de leur volatilité est le suivant :



Avec :

Allocation	Définition	Description
1	Allocation initiale	Point de référence
330	$\text{Max}_{j \in \text{set étude}} (E_j[\text{Rendement_FPP}])$	Allocation qui donne l'espérance de rendement des FPP la plus élevée sur le set de l'étude
1273	$\text{Max}_{j \in \text{set étude}} (E_j[\text{Taux_revalo_S1}])$	Allocation qui donne l'espérance de revalorisation la plus élevée sur le set de l'étude
311	$\begin{cases} \max_{j \in \text{set calibrage}} EU(\text{Totale}; j) \\ \text{s. c. } CVaR(\text{Perte de FP}, 5\%, 1) \leq 546 \text{ M€} \\ \text{s. c. } E[\text{Ratio}] \geq 200\% \end{cases}$	Allocation optimale du set d'étude

L'espérance de revalorisation varie entre 0,8% et 2,30%.

L'allocation initiale atteint 1,9% d'espérance de revalorisation. Tout comme pour le rendement des fonds propres il existe des allocations avec une meilleure espérance de revalorisation pour le même niveau de risque.

Les niveaux de volatilité de la revalorisation sont bien inférieurs à ceux du rendement des fonds propres : ils varient entre 0.1% et 1.1%. L'assuré prend donc moins de risque que l'assureur.

Parmi le set d'allocations testées, l'allocation 1190 maximise l'espérance de revalorisation pour le même niveau de volatilité que l'allocation initiale et l'allocation 1273 maximise l'espérance de revalorisation sur tout le set étudié.

Ces allocations sont détaillées ci-dessous :

	Initiale	1190	1273	Min	Max
Obligations - Govt	36,7%	33,2%	23,2%	16,6%	53,1%
Obligations - Corp	18,6%	16,8%	11,8%	8,4%	26,9%
Actions	5,6%	0,0%	10,0%	0,0%	30,0%
Diversifié	5,1%	5,0%	5,0%	0,0%	30,0%
Immobilier	7,8%	25,0%	30,0%	0,0%	30,0%
Monétaire	10,4%	4,3%	4,3%	4,3%	30,0%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%		
Espérance rendement FP	-0,1%	-1,9%	-1,7%		
Volatilité rendement FP	7,7%	11,0%	15,5%		
Espérance revalorisation	1,9%	2,2%	2,5%		
Volatilité revalorisation	0,4%	0,4%	0,7%		
Espérance de ratio	241,2%	215,4%	185,5%		
CVaR 95 perte FP	434	653	873		

Comme évoqué partie 4.3.1 Rendement comptable, les produits financiers qui composent le disponible pour la revalorisation proviennent de deux sources : les revenus récurrents (dividendes, coupons, etc.) et les revenus exceptionnels (PMVR). Chercher la maximisation de l'espérance du taux de revalorisation revient à chercher le maximum de l'espérance de la somme des deux sources. Compte tenu du réalignement systématique sur l'allocation cible, des PMV sont réalisées à chaque fin d'année de projection. La recherche du maximum de l'espérance de revalorisation ne va donc pas se limiter à la recherche des actifs ayant le plus de revenus récurrents mais également à ceux qui par une espérance de rendement importante, vont apporter des plus-values. Pour rappel, les PMVR sur les obligations sont neutralisées par la Réserve de Capitalisation (RC).

L'allocation 1190 qui maximise l'espérance de revalorisation pour le même niveau de volatilité que l'allocation initiale, atteint 2.2% d'espérance de revalorisation. Son espérance de rendement de fonds propres se dégrade fortement : -1.9%. De même, son espérance de ratio perd 26% (241% vs 215%). Cela s'explique par une part immobilier proche du maximum. En effet, c'est l'immobilier qui distribue les revenus récurrents les plus élevés : 2.9%. La hausse de la revalorisation est accompagnée par une hausse des provisions techniques qui viennent diminuer les fonds propres. Enfin, cette diminution de fonds propres combinée à une hausse de SCR suite à un choc à 25% sur l'immobilier entraîne une dégradation du ratio.

De même, l'allocation 1273 qui maximise l'espérance de revalorisation atteint la borne inférieure pour le monétaire qui est un actif à faibles revenus et augmente la part immobilier jusqu'à atteindre la borne supérieure.

5.2.2. Utilité

Dans cette partie, les fonctions d'utilité ont été appliquées aux métriques de chaque scénario pour toutes les allocations testées. Pour chaque allocation, l'espérance de l'utilité a ensuite été calculée.

L'espérance d'utilité du rendement des fonds propres pour chaque allocation j est donnée par :

$$EU(Rendement_FPP; j) = E[u(Rendement_FPP(j; i))]$$

$$EU(Rendement_FPP; j) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} -\exp(-3 * Rendement_FPP(j; i))$$

De même, pour la revalorisation, son espérance d'utilité est la suivante :

$$EU(Taux_revalo_S1; j) = E[u(Taux_revalo_S1(j; i))]$$

$$EU(Taux_revalo_S1; j) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} -\exp(-3 * Taux_revalo_S1(j; i; t = 1))$$

On définit l'espérance d'utilité totale de chaque allocation j par :

$$EU(Total; j) = E[u(Rendement_FPP(j; i)) + 2 * u(Taux_revalo_S1(j; i))]$$

$$EU(Total; j) = E[u(Rendement_FPP(j; i))] + 2 * E[u(Taux_revalo_S1(j; i))]$$

$$EU(Total; j) = EU(Rendement_FPP; j) + 2 * EU(Taux_revalo_S1; j)$$

Enfin, la recherche du maximum de la somme des utilités espérées et l'application des contraintes ont permis d'établir l'allocation cible du portefeuille étudié.

$$\begin{cases} \max_{j \in \text{set calibrage}} EU(Totale; j) \\ s.c. CVaR(Perte\ de\ FP, 5\%, 1) \leq 546M\text{€} \\ s.c. E[Ratio] \geq 200\% \end{cases}$$

C'est l'allocation 311 qui permet de maximiser l'espérance d'utilité totale tout en respectant les contraintes de ratio et de perte de fonds propres. Elle est détaillée ci-dessous :

	Initiale	311	Min	Max
Obligations - Govt	36,7%	19,9%	16,6%	53,1%
Obligations - Corp	18,6%	10,1%	8,4%	26,9%
Actions	5,6%	0,0%	0,0%	30,0%
Diversifié	5,1%	30,0%	0,0%	30,0%
Immobilier	7,8%	0,0%	0,0%	30,0%
Monétaire	10,4%	24,3%	4,3%	30,0%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%		
Espérance rendement FP	-0,1%	4,5%		
Volatilité rendement FP	7,7%	8,0%		
Espérance revalorisation	1,9%	1,3%		
Volatilité revalorisation	0,4%	0,2%		
Espérance de ratio	241,2%	218,3%		
CVaR 95 perte FP	434	290		

Cette allocation atteint la borne supérieure du diversifié qui grâce à son espérance de performance élevée (5.4%) et sa faible volatilité (7.5%) permet une réelle amélioration de l'espérance de rendement des fonds propres pour un risque légèrement supérieur. Il dispose également de revenus récurrents confortables (1.8%) qui viendront alimenter la revalorisation.

Les revenus récurrents importants de l'immobilier (2.9%) ne compensent pas sa faible espérance de performance (1.2%) et sa volatilité élevée (13%). La poche n'est donc pas investie.

La part action est également à 0% puisque celle-ci est très volatile et coûte cher en capital.

La part globale des actifs risqués passe de 18.6% à 30%. Bien que l'espérance de rendement des fonds propres augmente, cela ne suffit pas à compenser la hausse de SCR générée par ce renforcement des poches d'actifs risqués. L'espérance de ratio se voit donc diminuer de 23%.

Enfin, le reste est alloué presque à parts égales entre le monétaire (24%) et l'obligataire (30%).

5.2.3. Analyse

5.2.3.1. Revenus

Les revenus financiers moyens de l'allocation initiale et de l'allocation optimale en t=1 sont détaillés ci-dessous :

Espérance	Initiale	311	Ecart
Revenus récurrents	111,2	93,5	-17,7
Coupons	76,4	52,9	- 23,5
Autres*	34,8	40,6	5,9

PMVR	54,4	27,3	-28,0
Total	165,6	119,9	-45,7

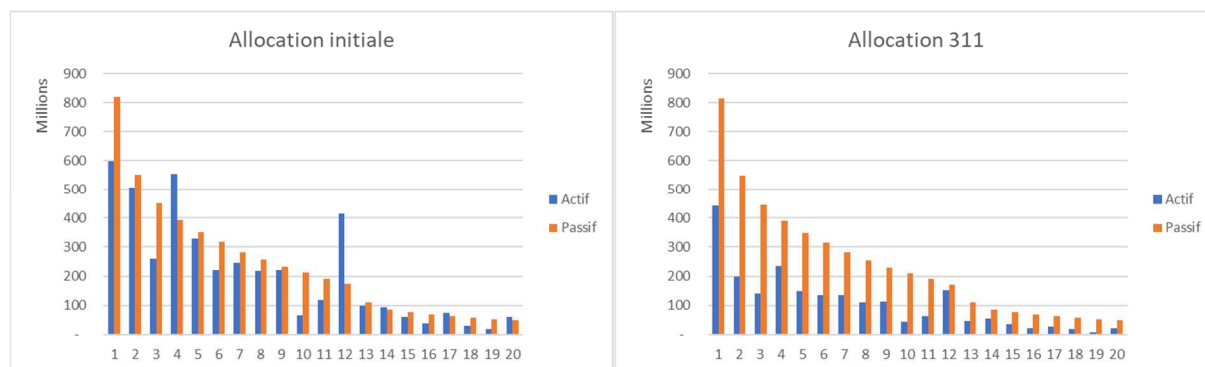
*Dividendes action, loyers et revenus des infrastructures

La hausse de la part du diversifié engendrée par le passage de l'allocation initiale à l'allocation 311, ne permet pas de compenser la perte de coupons (baisse de la part obligataire). L'allocation 311 bénéficie donc de revenus récurrents moindre par rapport à l'allocation initiale.

Les plus ou moins-values réalisées sont également moindre étant donné que le réalignement en t=0 sur l'allocation cible 311 amène à diminuer le stock de plus ou moins-values latentes en début de projection et donc de plus ou moins-values réalisées en cours de projection (t=1).

5.2.3.2. Cash-Flow Matching

Les graphiques ci-dessous représentent les flux moyens par allocations à l'actif (coupons et remboursements) et au passif (prestations) :



On constate que l'allocation optimale (n° 311) engendre des écarts plus importants entre les flux d'actif et ceux du passif. Cela implique que pour payer les prestations, il faudra vendre des actifs. La liquidité des actifs n'étant pas pris en compte dans l'étude, cela constitue une limite.

5.2.3.3. Gap de duration

Les gaps de duration de l'allocation initiale et de l'allocation optimale sont détaillés ci-dessous :

Duration	Initiale	311
Actif	6,3	4,0
Passif	8,6	8,6
GAP	- 2,3	- 4,6

L'allocation optimale dégrade le gap de duration. Il est à noter que la duration de l'actif est calculée à partir des actifs de taux et du monétaire qui ont une part moindre dans le cas de l'allocation optimale.

L'allocation optimale obtenue découle d'un certain nombre de choix. Afin de mieux mesurer les impacts de ceux-ci, il est nécessaire d'effectués des sensibilités.

5.3. Sensibilités

Afin de challenger le modèle choisi, différentes sensibilités ont été testées sur les **contraintes**, les **paramètres**, les **fonctions** et sur les **scénarios** de la problématique :

Nous recherchons l'allocation telle que :

$$\begin{cases} \max_{\text{set étude}} EU(\text{rendement FP}) + 2 * EU(\text{revalorisation}) \\ \text{s.c. } CVaR(\text{Perte de FP}, 5\%, 1) \leq 546M\text{€} \\ \text{s.c. } E[\text{Ratio}] \geq 200\% \end{cases}$$

Avec pour fonction d'utilité assureur et assuré :

$$u(x) = -\exp(-3x)$$

L'allocation 311 sera considérée comme l'allocation de référence puisque c'est celle-ci qui répondait à notre problématique.

5.3.1. Aux contraintes

Dans cette partie, nous étudierons la sensibilité du modèle aux contraintes fixées sur l'espérance de ratio et sur la CVaR 95% de pertes de fonds propres.

5.3.1.1. *Espérance de ratio*

L'allocation de référence (311) possède une espérance de ratio à 218%. En relâchant cette contrainte ($E[\text{Ratio}] \geq 0\%$), l'allocation qui permet de maximiser la somme des utilités espérées reste la 311. Nous allons donc étudier le durcissement de la contrainte.

L'allocation « optimale » va changer à partir d'une contrainte supérieure à 218%.

Nous avons choisi de tester :

- Le maintien du ratio initial en $t=0$ de 240% c'est à dire $E[\text{Ratio}] \geq 240\%$
- Une valeur entre l'espérance de ratio de l'allocation de référence (218%) et le ratio initiale (241%) c'est à dire $E[\text{Ratio}] \geq 230\%$

En faisant varier le seuil de la contrainte, les allocations suivantes permettent d'obtenir une somme d'utilités espérées maximale :

	Référence (311)	Sensi (249)	Sensi (205)
$E[Ratio] \geq z$	$z = 200\%$	$z = 230\%$	$z = 240\%$
Obligations - Govt	19,9%	26,6%	29,9%
Obligations - Corp	10,1%	13,4%	15,1%
Actions	0,0%	0,0%	0,0%
Diversifié	30,0%	20,0%	15,0%
Immobilier	0,0%	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	24,3%	24,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	3,3%	2,7%
Volatilité rendement FP	8,0%	6,3%	5,5%
Espérance revalorisation	1,3%	1,2%	1,1%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,2%	0,2%
Espérance de ratio	218,3%	240,0%	251,6%
CVaR 95 perte FP	290	236	206

On constate que les sensibilités à l'espérance de ratio impactent uniquement la part de diversifié et la part obligataire des allocations. Plus on durcit la contrainte, moins on doit investir sur le diversifié, choqué en moyenne à 27%, au profit des obligations moins choquées. Cependant, le diversifié contribue à l'espérance de rendement des fonds propres prudentiels. En baissant sa part, on perd de l'espérance de rendement.

En revanche, ces allocations affichent une légère baisse d'espérance de revalorisation. Cela s'explique par deux effets :

- les revenus obligataires sont inférieurs aux revenus sur le diversifié ;
- il y a moins de plus-value réalisées qui vont intégrer le disponible pour la revalorisation suite au réalignement systématique.

Si l'on souhaite durcir la contrainte de ratio de solvabilité, il faut être prêt à renoncer à du rendement de fonds propres prudentiels en favorisant la poche obligataire au détriment du diversifié. Dans une moindre mesure, il faut également être prêt à diminuer légèrement le niveau de revalorisation des engagements.

5.3.1.2. Perte de fonds propres

L'allocation de référence possède une CVaR 95% de pertes de fonds propres de 290M€. En relâchant la contrainte ($CVaR(Perte\ de\ FP, 5\%, 1) \leq FPP(t = 0) = 3246M\text{€}$), l'allocation qui permet de maximiser la somme des utilités espérées reste la 311. Nous allons donc étudier le durcissement de la contrainte.

L'allocation « optimale » va changer à partir d'une contrainte inférieure à 290M€.

Nous avons alors testé $CVaR(Perte\ de\ FP, 5\%, 1) \leq 250M\text{€}$ et $CVaR(Perte\ de\ FP, 5\%, 1) \leq 200M\text{€}$

En faisant varier le seuil de la contrainte, les allocations suivantes permettent d'obtenir une somme d'utilités espérées maximale :

	Référence (311)	Sensi (249)	Sensi (204)
$CVaR(Perte\ de\ FP, 5\%, 1) \leq y$	$y = 546M\text{€}$	$y = 250M\text{€}$	$y = 200M\text{€}$
Obligations - Govt	19,9%	26,6%	26,6%
Obligations - Corp	10,1%	13,4%	13,4%
Actions	0,0%	0,0%	0,0%
Diversifié	30,0%	20,0%	15,0%
Immobilier	0,0%	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	24,3%	29,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	3,3%	2,9%
Volatilité rendement FP	8,0%	6,3%	5,4%
Espérance revalorisation	1,3%	1,2%	1,1%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,2%	0,2%
Espérance de ratio	218,3%	240,0%	251,4%
CVaR 95 perte FP	290	236	197

Tout comme pour l'espérance de ratio, on constate que plus on durcit la contrainte, moins on doit investir sur le diversifié, au profit des obligations et du monétaire.

De même, si l'on souhaite durcir la contrainte de risque de perte de fonds propres, il faut être prêt à renoncer à du rendement de fonds propres prudentiels en favorisant la poche obligataire et monétaire au détriment du diversifié. Dans une moindre mesure, il faut également être prêt à diminuer légèrement le niveau de revalorisation des engagements.

5.3.2. Aux paramètres

5.3.2.1. Poids

Dans la définition de notre problématique, nous avons affecté un poids de 2 à l'utilité espérée de la revalorisation.

Cependant, compte tenu du plancher de revalorisation à 0%, la volatilité de celle-ci est moindre comparée à celle du rendement des fonds propres. L'assureur prend donc plus de risque que l'assuré et en conséquence, pourrait demander une « compensation ».

Nous avons donc étudié les cas où :

- aucun des individus n'est favorisé : les poids sont alors fixés à 1 et 1 ;
- l'intérêt de l'assureur passe au premier plan, en fixant un poids au rendement des fonds propres supérieur à celui de la revalorisation ;
- la satisfaction du client via une revalorisation élevée, est encore plus prioritaire pour l'institution grâce à un poids de 3 pour l'utilité espérée de la revalorisation.

Pour chaque cas, les allocations suivantes donnent la somme des utilités espérées maximale :

	Référence (311)	Sensi Neutre (310)	Sensi Assureur (310)	Sensi Assuré (315)
Poids rendement des FP	1	1	2 ou 3	1
Poids revalorisation	2	1	1	3
Obligations - Govt	19,9%	16,6%	16,6%	33,2%
Obligations - Corp	10,1%	8,4%	8,4%	16,8%
Actions	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Diversifié	30,0%	30,0%	30,0%	30,0%
Immobilier	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	29,3%	29,3%	4,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	4,6%	4,6%	3,3%
Volatilité rendement FP	8,0%	8,0%	8,0%	8,6%
Espérance revalorisation	1,3%	1,2%	1,2%	1,6%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%
Espérance de ratio	218,3%	218,1%	218,1%	217,8%
CVaR 95 perte FP	290	275	275	361

On constate que les sensibilités aux poids réalisées impactent principalement la part du monétaire et la part obligataire des allocations. Plus on cherche à privilégier l'assuré, plus on doit investir sur l'obligataire qui apportera plus de résultat financier et donc qui améliorera la revalorisation. Cependant, l'amélioration cette revalorisation augmente le BE qui vient réduire les fonds propres prudentiels.

La stabilité de l'espérance de ratio de solvabilité malgré une espérance de rendement de FP moins élevée dans le cas de l'allocation 315, s'explique par un SCR taux moins important. (Variation à l'actif compensée par celle au passif)

Enfin, il est à noter ces sensibilités ne modifient que très légèrement les niveaux de volatilité.

Si l'on souhaite privilégier la revalorisation, il faut être prêt à renoncer à du rendement de fonds propres prudents en favorisant la poche obligataire au détriment du monétaire. Ce choix n'impacte que très légèrement le ratio de solvabilité et les niveaux de volatilité.

5.3.2.2. Paramètres d'aversion

Dans la partie calibrage, les paramètres d'aversion ont été fixés à 3 pour les deux métriques (rendement des fonds propres et taux de revalorisation).

Dans cette partie, nous étudierons les profils assuré et assureur suivants :

- Des profils d'investissement plus « offensifs » : l'assuré et l'assureur sont prêts à accepter une prise de risque plus grande en contrepartie d'une revalorisation moyenne et d'un rendement moyen plus importants. Nous fixerons alors les paramètres d'aversion au risque à 1.
- Des profils d'investissement plus « prudents » : l'assuré et l'assureur privilégient un revenu plus certain en contrepartie d'une perte de rentabilité. Nous fixerons alors les paramètres d'aversion au risque à 9.

Pour chaque profil, les allocations suivantes donnent la somme des utilités espérées maximale :

	Référence (311)	Offensif (316)	Prudent (284)
Paramètre d'aversion rendement FP	3 (de 2 à 8)	1	9
Paramètre d'aversion revalorisation	3 (de 2 à 8)	1	9
Obligations - Govt	19,9%	16,6%	23,2%
Obligations - Corp	10,1%	8,4%	11,8%
Actions	0,0%	5,0%	0,0%
Diversifié	30,0%	30,0%	25,0%
Immobilier	0,0%	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	24,3%	24,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	4,7%	3,9%
Volatilité rendement FP	8,0%	10,4%	7,2%
Espérance revalorisation	1,3%	1,4%	1,2%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,4%	0,2%
Espérance de ratio	218,3%	206,7%	228,8%
CVaR 95 perte FP	290	398	268

Le profil offensif possède bien des volatilités sur les deux métriques supérieures à celles du profil de référence. La diminution des paramètres d'aversion implique donc une hausse du risque et donc du rendement et de la revalorisation espérés. Cela se traduit par un désinvestissement des obligations au profit des actions.

Inversement, la hausse du paramètre d'aversion implique des niveaux de risque inférieur mais également des espérances de rendement et de revalorisation moindre.

Si l'on souhaite privilégier la certitude d'un niveau de rendement de fonds propres et de revalorisation, il faut être prêt à accepter un niveau plus faible en favorisant la poche obligataire au détriment du diversifié et des actions.

5.3.3. Aux fonctions d'utilité

Nous avons choisi de modéliser le comportement de l'assureur et de l'assuré par des fonctions d'utilité exponentielles négatives. En effet, la fonction exponentielle négative possède un coefficient d'aversion absolu constant ce qui implique que l'individu a le même comportement face au risque, quel que soit le niveau de la métrique retenue.

Dans cette partie, nous allons tester une autre modélisation du comportement de l'assureur et de l'assuré. Pour cela, nous allons utiliser la fonction d'utilité quadratique qui possède un coefficient d'aversion absolu au risque décroissant en fonction de la métrique. Cela implique que plus la métrique (rendement des FP ou taux de revalorisation) sera grande, plus l'individu sera averse au risque.

La fonction d'utilité quadratique est la suivante :

$$u(x) = x - 3 * x^2 \text{ avec } x \in] - \infty; 1/6[$$

Dans cette partie sur les sensibilités aux fonctions d'utilité, nous n'avons pas testé les fonctions CRRA et DARA puisqu'elles sont définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ne peuvent donc pas être utilisées pour modéliser le comportement de l'assureur (rendement des fonds propres négatifs), à moins d'effectuer une translation importante (de plus de +10%).

Comme pour la fonction d'utilité exponentielle négative, la fonction quadratique a été appliquée aux métriques de chaque scénario pour toutes les allocations testées. Pour chaque allocation, l'espérance de l'utilité a ensuite été calculée.

L'espérance d'utilité du rendement des fonds propres pour chaque allocation j est donnée par :

$$EU(\text{Rendement_FPP}; j) = E[u(\text{Rendement_FPP}(j; i))]$$

$$EU(\text{Rendement_FPP}; j) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \text{Rendement_FPP}(j; i) - 3 * \text{Rendement_FPP}(j; i)^2$$

De même, pour la revalorisation, son espérance d'utilité est la suivante :

$$EU(\text{Taux_revalo_S1}; j) = E[u(\text{Taux_revalo_S1}(j; i))]$$

$$\begin{aligned} EU(\text{Taux_revalo_S1}; j) \\ = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \text{Taux_revalo_S1}(j; i; t = 1) - 3 * \text{Taux_revalo_S1}(j; i; t = 1) \end{aligned}$$

On définit l'espérance d'utilité totale de chaque allocation j par :

$$EU(Total; j) = E[u(Rendement_FPP(j; i)) + 2 * u(Taux_revalo_S1(j; i))]$$

$$EU(Total; j) = E[u(Rendement_FPP(j; i))] + 2 * E[u(Taux_revalo_S1(j; i))]$$

$$EU(Total; j) = EU(Rendement_FPP; j) + 2 * EU(Taux_revalo_S1; j)$$

Enfin, la recherche du maximum de la somme des utilités espérées et l'application des contraintes ont permis d'établir l'allocation cible du portefeuille étudié.

$$\begin{cases} \max_{j \in \text{set calibrage}} EU(Total; j) \\ s.c. CVaR(Perte \text{ de FP}, 5\%, 1) \leq 546M\text{€} \\ s.c. E[Ratio] \geq 200\% \end{cases}$$

C'est l'allocation 312 qui permet de maximiser l'espérance d'utilité totale tout en respectant les contraintes de ratio et de perte de fonds propres. Elle est détaillée ci-dessous :

	Référence (311)	Quadratique (312)
Fonction rendement FP	exp	quadra
Fonction revalorisation	exp	quadra
Obligations - Govt	19,9%	23,2%
Obligations - Corp	10,1%	11,8%
Actions	0,0%	0,0%
Diversifié	30,0%	30,0%
Immobilier	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	19,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	4,2%
Volatilité rendement FP	8,0%	8,1%
Espérance revalorisation	1,3%	1,3%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,2%
Espérance de ratio	218,3%	218,2%
CVaR 95 perte FP	290	303

La fonction d'utilité exponentielle négative possède un coefficient d'aversion absolu constant ($\lambda_{abs} = \lambda = 3$) alors que la fonction quadratique en possède un qui croît en fonction de la variable ($\lambda_{abs} = \frac{2\lambda}{1-2\lambda x} = \frac{6}{1-6x}$).

La fonction d'utilité quadratique va donc affecter une variation d'utilité moins importante aux métriques (rendement des fonds propres et taux de revalorisation) qui ont de fortes valeurs.

Elle va alors privilégier les allocations qui possèdent des métriques moins élevées parmi les 1000 scénarios.

C'est ainsi que l'allocation cible obtenue avec les fonctions d'utilité quadratiques présente une espérance de rendement plus faible que celle avec les fonctions d'utilité exponentielles négatives.

L'utilisation d'une fonction exponentielle quadratique avec un coefficient d'aversion absolu croissant est contre intuitif. En effet, il est couramment admis que plus un individu est riche, moins il est adverse au risque (λ_{abs} décroissant) et non le contraire comme vise à le modéliser les fonctions d'utilité quadratiques.

Cela se traduit par une allocation cible obtenue avec ces fonctions quadratiques moins intéressante puisque pour le même niveau de risque, l'espérance de rendement des fonds propres diminue.

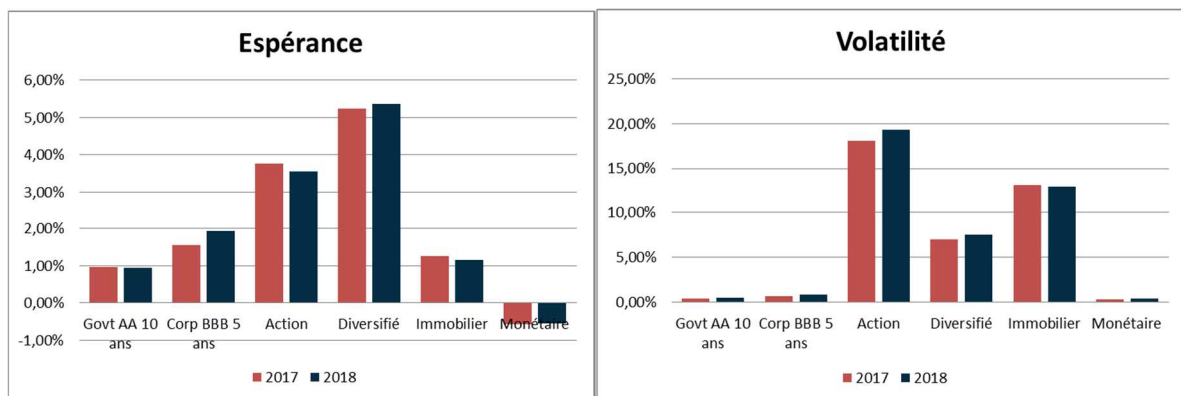
5.3.4. Aux scénarios

L'étude a été réalisée en se basant sur les données au 31/12/2018. Dans cette partie, nous chercherons à évaluer l'impact des scénarios sur le choix de l'allocation.

5.3.4.1. Scénarios 2017

Les calculs ont été relancés avec le set de 1000 scénarios monde réel du 31/12/2017.

La distribution des scénarios est très similaire entre 2017 et 2018 :



Les principales différences portent sur l'action qui voit en une année son espérance de rendement diminuer et sa volatilité augmenter et sur le crédit avec une hausse des spreads.

Comme pour les scénarios au 31/12/2018, c'est l'allocation 311 qui donne la somme des utilités espérées maximale :

	Référence (311)	Scénarios 2017 (311)
Obligations - Govt	19,9%	19,9%
Obligations - Corp	10,1%	10,1%
Actions	0,0%	0,0%
Diversifié	30,0%	30,0%
Immobilier	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	24,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	5,8%
Volatilité rendement FP	8,0%	7,4%
Espérance revalorisation	1,3%	1,3%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,2%
Espérance de ratio	218,3%	209,8%
CVaR 95 perte FP	290	256

Malgré une espérance de rendement plus élevée et une volatilité plus faible en 2017, l'action telle qu'elle est modélisée, demeure moins intéressante en termes d'utilité que le diversifié.

Compte tenu de la faible variation de l'environnement financier entre 2017 et 2018 et de la même source des scénarios (même modèles et même calibrage), l'allocation cible ne change pas.

5.3.4.2. Calibrage

Afin d'évaluer l'impact du calibrage des scénarios sur la détermination de l'allocation optimal, plusieurs sensibilités ont été effectuées :

- **Volatilité Immobilier** : la volatilité utilisée dans le modèle immobilier est établie à partir d'indices IPD. Elle ne reflète pas complètement le portefeuille de PRO BTP qui voit la sienne atteindre environ 7%. Une sensibilité à ce niveau a donc été effectuée.
- **Rendement Immobilier** : l'espérance de rendement de l'indice immobilier atteint 1,2% dans le jeu de scénarios de référence. Une sensibilité à l'espérance de rendement immobilier à 2,3% a été effectuée.
- **Volatilité Action** : actuellement, la volatilité action utilisée dans le modèle est la volatilité implicite obtenue à partir de dérivés. Elle est environ deux fois plus élevée que la volatilité historique. Les calculs ont donc été relancés avec une volatilité de 10% sur les actions.

- **Rendement Action** : l'espérance de rendement des actions atteint 3,6% dans le jeu de scénarios de référence. Une sensibilité à l'espérance de rendement action à 7,1% a été effectuée.
- **Rendement Diversifié** : un rendement deux fois plus petit a été testé.

Comme pour les scénarios au 31/12/2018, la poche des actifs diversifiés des allocations optimales des sensibilités immobilier et action est saturée alors que celle de l'immobilier reste à 0% :

	Référence (311)	Volatilité Immobilier (311)	Rendement Immobilier (311)	Volatilité Action (317)	Rendement Action (316)	Rendement Diversifié (96)
Obligations - Govt	19,9%	19,9%	19,9%	19,9%	16,6%	33,2%
Obligations - Corp	10,1%	10,1%	10,1%	10,1%	8,4%	16,8%
Actions	0,0%	0,0%	0,0%	5,0%	5,0%	5,0%
Diversifié	30,0%	30,0%	30,0%	30,0%	30,0%	5,0%
Immobilier	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	24,3%	24,3%	19,3%	24,3%	24,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	4,5%	4,5%	4,6%	5,1%	1,3%
Volatilité rendement FP	8,0%	8,0%	8,0%	9,2%	10,3%	6,0%
Espérance revalorisation	1,3%	1,3%	1,3%	1,4%	1,9%	1,2%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,2%	0,2%	0,3%	0,4%	0,3%
Espérance de ratio	218,3%	218,3%	218,3%	207,1%	207,4%	260,6%
CVaR 95 perte FP	290	290	290	340	383	286

La baisse de la volatilité immobilier ou la hausse de son rendement, ne suffisent pas à en faire un actif attractif en terme d'utilité espérée au regard des autres actifs.

Les sensibilités sur l'indice action entraînent une hausse de 5% de la part action au détriment :

- des obligations pour la sensibilité sur le rendement ;
- du monétaire pour celle sur la volatilité action.

Dans le cas de la sensibilité sur le rendement action, en investissant la poche action, le risque pris augmente et afin de limiter cette augmentation, c'est la poche obligataire qui finance cet investissement.

Au contraire, dans le cas de la sensibilité sur la volatilité action, comme le risque porté par les actions est moindre, le financement de cet investissement est réalisé grâce au monétaire.

La modélisation actuelle des actifs diversifiés en fait des investissements intéressants en termes d'utilité. En effet, toutes les allocations optimales des sensibilités immobilier et action voient leur poche d'actifs diversifiés atteindre leur maximum. En revanche, la sensibilité de baisse de rendement du diversifié montre une bascule de cette poche vers l'action et les obligations avec pour conséquence principale, une forte amélioration de l'espérance de ratio de solvabilité. Néanmoins, il est à noter que lors de l'étude, la liquidité des actifs n'a pas été prise en compte ce qui constitue une limite de l'étude.

La modélisation et le calibrage actuels des actifs diversifiés en font des investissements plus attractifs en termes d'utilité que les autres actifs. En revanche, leur illiquidité n'est pas pris en compte dans l'étude ce qui constitue une limite.

Au contraire, par sa faible espérance de rendement, l'immobilier reste un actif peu intéressant en termes d'utilité.

5.3.5. A la richesse initiale

Cette sensibilité a pour objectif de tester le point de départ de l'étude. En effet, nous souhaitons savoir si en partant de l'allocation optimale en $t=0$, est ce que celle-ci le reste en $t=1$.

Pour rappel, le réaligement de l'étude se faisait en $t=0$ en partant de l'allocation initiale, et entraînait une réalisation de plus ou moins-values qui n'étaient pas intégrées au bilan. De la même manière, pour cette sensibilité, on part de l'allocation optimale et le réaligement sur les autres allocations se fait en $t=0$. La différence entre les deux méthodes provient des richesses de départ (PMVL) :

M€	PMVL Initiale	PMVL 311
Obligations	241	131
Etat	79	43
Crédit	162	88
Actions	64	0
Diversifié	34	34
Immobilier	281	0
Monétaire	12	12
Autres actifs	324	324
Total	955	501

En partant de l'allocation 311 en $t=0$, l'allocation optimale ($t=1$) est la 310 :

	Allocation de départ : initiale (311)	Allocation de départ : 311 (310)
Obligations - Govt	19,9%	16,6%
Obligations - Corp	10,1%	8,4%
Actions	0,0%	0,0%
Diversifié	30,0%	30,0%
Immobilier	0,0%	0,0%
Monétaire	24,3%	29,3%
Autres actifs	15,7%	15,7%
Total	100,0%	100,0%
Espérance rendement FP	4,5%	4,7%
Volatilité rendement FP	8,0%	8,0%
Espérance revalorisation	1,3%	1,1%
Volatilité revalorisation	0,2%	0,2%
Espérance de ratio	218,3%	218,8%
CVaR 95 perte FP	290	279

L'allocation 310 est proche de la 311. La différence réside dans les parts obligataires et monétaires.

Le changement du niveau de richesse de départ n'impacte ni les valeurs marché en $t=0$ ni celles en $t=1$ puisque le réalignement se fait en $t=0$. Par conséquent, les SCR marché nets ne sont pas non plus impactés (hypothèse d'absorption constante). En revanche, cette modification va entraîner une baisse de réalisations de plus-value au cours de la projection et donc de l'espérance de revalorisation. Cette baisse va alors permettre une amélioration de l'espérance de rendement de fonds propres. A SCR marché identique, l'espérance de ratio augmente.

Le changement de la richesse initiale va légèrement déformer l'allocation optimale.

6. Conclusion

A travers ce mémoire, nous avons cherché à définir l'allocation dite « optimale » pour l'institution de prévoyance BTP Prévoyance. Pour cela nous avons choisi une métrique de décision orientée assuré : taux de revalorisation S1 ; et une métrique de décision orientée assureur : rendement des fonds propres S2. La théorie de l'utilité espérée appliquée à ces métriques nous a permis de modéliser le comportement des différents individus et d'établir un « scoring » des allocations testées pour in fine déterminer l'allocation cible en maximisant sous contraintes une combinaison des deux espérances d'utilité.

L'étude a été réalisée sur les données à fin décembre de 2018 et a permis d'établir une allocation cible qui sature la poche du diversifié (Infrastructures et Private Equity) et qui délaisse celles des actions et de l'immobilier.

A travers l'étude de l'allocation cible et des sensibilités, nous avons pu mettre en évidence l'intérêt des investissements en infrastructures et en Private Equity qui grâce à leur espérance de performance élevée et leur faible volatilité permettent une réelle amélioration de l'espérance de rendement des fonds propres S2 pour un risque légèrement supérieur à celui de l'allocation à fin 2018. Ces actifs disposent également de revenus récurrents confortables qui viendront alimenter la revalorisation. En revanche, ils sont relativement coûteux en capital et entraînent une dégradation de l'espérance de ratio de solvabilité qui reste néanmoins supérieure à 200% grâce à l'intégration de cette contrainte dans notre problématique.

De la même manière, l'absence d'investissement en action et en immobilier dans la plupart des allocations « optimales » met en exergue le fait qu'ils soient trop volatiles et/ou trop coûteux en SCR.

Cette étude nous a donc permis de trouver une allocation qui concilie les intérêts de l'assuré et de l'assureur qui ne vont pas toujours dans le même sens.

Cependant, il est à noter qu'elle a été réalisée sans tenir compte du cash-flow matching et de la liquidité des actifs ce qui constitue des limites.

De plus, cette étude a été réalisée avec un réaligement systématique sur l'allocation cible (stratégie « fixed ») qui ne correspond pas toujours à la réalité. En effet, un gérant ne rebasculé pas quotidiennement toutes ses positions pour respecter exactement l'allocation cible. Il bénéficie d'une marge de manœuvre qui va lui permettre d'ajuster ses positions en fonction du marché et saisir certaines opportunités (tactique). C'est pour cette raison que la politique financière définit un minimum et un maximum sur les différentes catégories d'actifs et une allocation cible vers laquelle on veut converger. La continuité de cette étude pourrait être l'intégration du corridor dans le modèle.

7. Bibliographie

Mémoires

DJAMAL ACYL MOUSTAPHA, Alaou. : *Mise en place de la couverture action dans un portefeuille d'assurance vie épargne.*

GLEISE Maxime et MASSONNET Bruno : *Calibrage des métriques d'appétence au risque à la lumière de l'utilité espérée multiattribut.*

LAHCENE, Mehdi : *Modélisation d'un fonds de prévoyance collective dans le cadre d'une étude ALM.*

LE BERRIGAUD, Nicolas : *Les contrats diversifiés : fonctionnement, allocation d'actif et valorisation de l'utilité.*

SUPARDI, Yanri : *Recherche de l'allocation optimale sous Solvabilité II en Prévoyance.*

Cours

BOUCHER, Christophe : *Choix de Portefeuille.* Université Paris I.

DE TRUCHIS Gilles et DUMITRESCU Elena : *Méthodes et instruments de la finance.* Université Paris Ouest.

TENAND, Marianne : *Choix en présence d'incertitude.* ENS.

THERON, Pierre-E : *Mesures et comparaison de risque.* ISFA.

Publication

PALMA André, PICARD Nathalie et PRIGENT Jean-Luc. *Prise en compte de l'attitude face au risque dans le cadre de la directive MiFID.*

8. Annexes

8.1. SCR marché

8.1.1. Risque taux

Le risque de taux correspond à la perte de fonds propres économiques occasionnée par un choc instantané à la hausse/baisse de la courbe des taux de référence. Le capital requis correspond au maximum entre le SCR en cas de hausse des taux et le SCR en situation de baisse des taux.

Le choc appliqué sur la courbe dépend de l'échéance. Il est au minimum de 1% à la hausse et les taux négatifs ne sont pas choqués à la baisse.

8.1.2. Risque action

Le risque action correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une baisse instantanée du cours des actions. Les actions sont classées en cinq types :

- type 1 : les actions cotées sur les marchés réglementés des pays membres de l'Espace Economique Européen (EEE) ou de l'Organisation de Coopération et de Développement Economique (OCDE) ;
- type 2 : les actions cotées hors EEE et OCDE et non cotées ;
- les titres de participation ;
- les investissements d'infrastructure éligibles (infrastructure de projet ou QII ou InfraP) ;
- les investissements en sociétés d'infrastructure éligibles (infrastructure action ou QICI ou InfraA).

Le SCR action est obtenu en agrégeant les SCR sur les actions de type 1, type 2 et infrastructures :

$$SCR_{action} = \sqrt{SCR_{type\ 1}^2 + (SCR_{type\ 2} + SCR_{Infra\ A} + SCR_{Infra\ P})^2 + 2 * 0.75 * SCR_{type\ 1} * (SCR_{type\ 2} + SCR_{Infra\ A} + SCR_{Infra\ P})}$$

Les niveaux de chocs sont les suivants :

Action	Choc
Type 1 (hors participations stratégiques)	39% + dampener
Type 2 (hors participations stratégiques)	49% + dampener
Titre de participation stratégique (Type 1 ou Type 2)	22%
Infrastructure de projet (QII)	30% + 77% dampener
Infrastructure action (QICI)	36% + 92% dampener

Dampener :

Afin d'éviter les comportements pro-cycliques (ventes forcées d'actions lorsque les marchés sont en bas de cycle), qui remettraient en cause le rôle fondamental des assureurs dans le financement de l'économie, ce choc est corrigé par un mécanisme d'ajustement symétrique via le « dampener » : il permet d'atténuer le choc actions lorsque les marchés sont bas de cycle, et de l'augmenter lorsque les marchés sont en haut de cycle et que la probabilité de baisse est importante.

Il est calculé en fonction de la distance d'un indice action à sa moyenne mobile 3 ans.

Mesure transitoire :

Les actions présentes avant le 1^{er} janvier 2016 peuvent bénéficier de la mesure transitoire : elle permet de converger en 7 ans d'un choc de 22% au choc défini ci-dessus.

8.1.3. Risque immobilier

Le risque immobilier correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une baisse instantanée de la valeur des investissements immobiliers.

Le choc immobilier est fixé - 25% de la valeur de marché.

8.1.4. Risque spread

Le risque de spread correspond au risque de variation à la baisse des marges (spread) de crédit par rapport à la courbe des taux d'intérêt sans risque. Il est déterminé de la manière suivante

$$SCR_{spread} = SCR_{bonds} + SCR_{secur} + SCR_{cd}$$

Où SCR_{bonds} est le capital requis au titre des investissements obligataires (y compris les prêts),

SCR_{secur} désigne le capital requis au titre des actifs adossés à des produits structurés de crédit et SCR_{cd} , le capital requis au titre des dérivés de crédit.

Le choc instantané appliqué dépend de la notation et de la durée modifiée du titre.

Par exemple :

Obligation	Choc
Corp AA 10 ans	8.50%
Corp BBB 7 ans	15.50%

8.1.5. Risque de change

Le risque de change correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une variation du taux de change (i) à la hausse ou à la baisse. Le SCR est déterminé comme de la manière suivante :

$$SCR_{change}(i) = \max(SCR_{change}(i; up); SCR_{change}(i; down))$$

Les chocs de change correspondent à une baisse instantanée de 25% et une hausse de 25% sur la valeur de marché des actifs financiers en monnaie étrangère au regard de la monnaie locale.

8.1.6. Risque de concentration

Le risque de concentration correspond à la perte de fonds propres qui résulterait d'une diminution soudaine de la valeur des actifs correspondant à l'exposition sur signature unique.

Il couvre les actifs considérés dans les modules de risque de spread, immobilier et action, et exclut ceux présents dans le module de risque de défaut (trésorerie, titres de participation, etc.).

Un SCR est calculé lors du dépassement du seuil CT (Concentration Threshold). Dans un premier temps, il faut calculer la grandeur XS_i (Excess Exposure) qui correspond à la part de l'exposition qui dépasse le seuil :

$$XS_i = \max(0; E_i - CT_i * Assets)$$

où E_i est l'exposition au défaut de la contrepartie i, Assets le montant total des actifs considérés dans ce module et CT_i le seuil relatif de surexposition de la contrepartie i.

Ensuite pour chaque exposition sur une contrepartie i, le capital requis lié au risque de concentration est calculé comme suit :

$$Conc_i = XS_i * g_i$$

où XS_i est l'exposition en excès sur la contrepartie i et g_i le facteur pénalisant de surexposition à la contrepartie i.

Enfin, l'agrégation se fait de la manière suivante :

$$SCR_{conc} = \sqrt{\sum Conc_i^2}$$

8.1.7. Agrégation

Lorsque les SCR associés aux six sous-modules ont été calculés, ils sont agrégés selon la formule suivante pour calculer le SCR de Marché :

$$SCR_{marché} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} * SCR_i * SCR_j}$$

Avec $Corr_{i,j}$ la corrélation entre le SCR_i et le SCR_j définie par la matrice suivante :

	Taux d'intérêt	Actions	Immobilier	Crédit	Concentration	Change
Taux d'intérêt	100%	A	A	A	0	25%
Actions	A	100%	75%	75%	0	25%
Immobilier	A	75%	100%	50%	0	25%
Crédit	A	75%	50%	100%	0	25%
Concentration	0	0	0	0	100%	0
Change	25%	25%	25%	25%	0	100%

Le paramètre A est tel que :

$$A = \begin{cases} 0 & \text{si le choc de taux à la hausse est retenu} \\ 50\% & \text{si le choc de taux à la baisse est retenu} \end{cases}$$

8.2. Scénarios

8.2.1. Courbe de taux nominaux

8.2.1.1. *Modèle*

La courbe de taux nominaux est diffusée avec l'extension du modèle de Black-Karasinski à deux facteurs (Extended Two-Factor Black-Karasinski), subissant une translation permettant de générer des taux négatifs (E(D)2FBK).

Le modèle Black-Karasinski (BK) suppose que le taux court suit une distribution log normale. C'est un modèle sans arbitrage qui appartient à la famille des modèles de taux court et prend en compte la structure par terme.

Une extension au modèle BK à deux facteurs (2FBK) a été développée par Peterson, Stapleton et Subrahmanyam pour améliorer la précision du modèle. Dans ce modèle 2FBK, le taux court suit le processus suivant (en « monde réel ») :

$$\begin{aligned}d \ln(r(t)) &= [\theta_r(t) - a * \ln(r(t)) + \ln(\pi(t))]dt + \sigma_r(dW_1 + \gamma_1(t)dt) \\d \ln(\pi(t)) &= [\theta_\pi(t) - b * \ln(\pi(t))]dt + \sigma_\pi(dW_2 + \gamma_2(t)dt)\end{aligned}$$

Où

Pour la fonction de taux court $r(t)$:

- $\theta_r(t)$ est un terme constant, dépendant du temps, qui permet au modèle d'être calibré à la structure par terme de taux court observée aujourd'hui,
- a est la vitesse à laquelle le taux court retourne vers la moyenne du processus,
- $\sigma_r(t)$ représente la volatilité instantanée.

Le facteur $\pi(t)$ est un choc appliqué à la moyenne conditionnelle du processus, aussi considéré comme une prime de taux forward sur le taux court. $\pi(t)$ suit également :

- un processus de retour à la moyenne $\theta_\pi(t)$,
- avec une vitesse b
- et une volatilité instantanée $\sigma_\pi(t)$.

dW_1 et dW_2 sont des mouvements browniens standards.

γ_1 et γ_2 sont appelés « les prix du marché des risques ». Ils contrôlent la prime de risque des taux longs. Lorsqu'ils sont nuls, on est dans une dynamique risque neutre.

8.2.1.2. *Calibrage*

La courbe des taux initiale est un paramètre d'entrée du modèle. Le calibrage du modèle Black-Karasinski à deux facteurs s'effectue par arbres binomiaux recombinaux puisqu'il n'existe pas de formule analytique permettant de valoriser le prix des zéro-coupons et les prix des swaptions. L'estimation des paramètres du modèle est donnée par une fonction minimisant l'écart entre les prix zéro-coupons déduits des valeurs diffusées par l'arbre binomial et ceux du marché.

8.2.2. Courbe de taux d'intérêt réel

8.2.1.3. Modèle

Les taux réels correspondent aux taux nominaux corrigés de l'inflation. Ils sont modélisés à l'aide du modèle étendu de Vasicek.

Le modèle de Vasicek utilise un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour modéliser l'évolution future du taux court instantané. La dynamique du taux court $r(t)$ sous l'univers « monde réel » s'écrit :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma_r(dW + \gamma dt)$$

Où :

- a : vitesse de retour à la moyenne à long terme (speed mean-reversion) ;
- b : moyenne à long terme du taux court (mean-reversion) ;
- σ_r : volatilité du taux court ;
- dW est un mouvement brownien standard ;
- γ est appelé « le prix du marché des risques ». Il contrôle la prime de risque des taux longs. Lorsqu'il est nul, on est dans une dynamique risque neutre.

8.2.1.4. Calibrage

Le calibrage du modèle se base sur les prix des obligations indexées à l'inflation et en particulier sur le prix des OATi émises par l'état français, ainsi que sur la cible d'inflation à 1 an.

8.2.2. Immobilier

8.2.2.1. Modèle

Le modèle de diffusion utilisé pour l'immobilier est le processus de mouvement brownien géométrique.

Le modèle Black-Sholes supposent que les prix des facteurs de risque considérés évoluent de manière log-normale (i.e le rendement évolue de manière normale) avec une volatilité locale constante et ce à n'importe quel niveau de marché et à n'importe quel prix.

Les deux caractéristiques principales de ce type de modèle sont les suivantes

- Le rendement est distribué selon une loi normale ;
- La volatilité introduite dans le modèle est considérée constante dans le temps.

Mathématiquement, le modèle de diffusion s'écrit de la façon suivante

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où

W_t est un processus de Wiener,
 S_t est le facteur de risque considéré,
et r est le drift (constante).

8.2.2.2. Calibrage

Bien que l'immobilier puisse être modélisé comme un actif classique de type action en utilisant le modèle Black-Sholes avec volatilité constante, il n'y a pas de marché financier pour les transactions immobilières. Cela signifie que les performances d'investissement pour cette classe d'actif ne peuvent pas être mesurées directement comme pour les obligations ou les actions. Le calibrage du modèle immobilier se base donc sur des indices immobiliers « *Investment Property Databank* » (IPD).

La volatilité retenue est calibrée comme la médiane des volatilités des indices IPD de 17 pays dont la France.

Les revenus (loyers) sont modélisés par un modèle de retour à la moyenne avec un niveau moyen de revenus calibré sur des données relatives au Royaume-Unis et à l'Europe.

8.2.3. Actions

Le modèle retenu pour modéliser les actions est un modèle de diffusion appelé « Stochastic Volatility Jump Diffusion » (SVJD) qui prend en compte des sauts représentant les sauts du marché action et à volatilité stochastique.

Le modèle SVJD mis en place par PRO BTP est une combinaison de deux processus :

- Le modèle de Heston (SV) : continu à volatilité stochastique. Il permet une bonne réplcation des conditions de marché à court terme comme à long terme.
- Le modèle de Merton (JD) : discontinu (à sauts). Il permet une meilleure réplcation du skew de volatilité à court terme

$$d\ln S_t = d\ln S_t^{SV} + d\ln S_t^{JD}$$

8.2.3.1. Modèle continu à volatilité stochastique d'Heston

Le modèle d'Heston est défini par :

$$d\ln S_t^{SV} = \left(r - \frac{v_t}{2}\right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1$$

Où r est une constante (drift) et dW^1 est un processus de Wiener.

La variance est supposée être modélisée selon le processus de Cox-Ingersoll-Ross :

$$dv_t = \alpha (\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^2$$

$$\rho_t = \langle W^1, W^2 \rangle_t$$

avec

θ le niveau de retour à la moyenne, (variance long terme)

α la vitesse de retour à la moyenne,

ξ la volatilité de la variance,

dW^2 un autre processus aléatoire de Wiener
et ρ la corrélation entre les deux processus de Wiener.

Pour contraindre cette variance à rester positive, la condition de Feller suivante est imposée aux paramètres du modèle

$$\xi^2 \leq 2\alpha\theta$$

8.2.3.2. *Modèle à sauts de Merton*

Le modèle à sauts de Merton est défini par :

$$d\ln S_t^{JD} = -\lambda \left(\exp\left(\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2\right) - 1 \right) dt + dY_t$$

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} \log(J_k)$$

Où J_k est la taille des sauts aléatoires et est une variable indépendante et identiquement distribuée, indépendante de N_t et des processus de Wiener W^1 et W^2 . Distribution log-normale de moyenne μ_J et de variance σ_J^2 .

Le nombre de sauts aléatoires N_t est modélisé par un processus de Poisson de paramètre λ , où λ représente l'intensité de survenance des sauts.

8.2.3.3. *Calibrage*

Le calibrage du modèle de volatilité stochastique se base sur la volatilité à la monnaie.
La volatilité de la variance ξ est calibrée à partir d'un historique de la volatilité implicite un mois.
La vitesse de retour à la moyenne α est estimée grâce à un processus autorégressif sur la volatilité implicite un mois.
La corrélation ρ entre la volatilité implicite et les rendements est estimée à partir d'un historique.
Enfin le niveau de retour à la moyenne est calibré pour atteindre les objectifs de volatilité à long terme.

La moyenne et la variance des sauts sont quant à eux, calibrés pour atteindre les cibles d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis). L'intensité des sauts a été fixée à 0,2 (environ tous les 5 ans).

8.2.4. **Corrélations**

Afin d'obtenir une projection cohérente entre toutes les classes d'actif, un lien de dépendance entre elles doit être mis en place.

Les cibles de corrélations sont déterminées sur un historique de données et la dépendance est modélisée à l'aide de copules.

A partir du jeu de scénarios monde réel au 31/12/2018, utilisé pour l'étude, les corrélations en sorties sont calculées et sont les suivantes :

	Actions	Immobilier	Monétaire	Govt AA 10 ans	Corp BBB 5 ans
Actions	100%	25%	-7%	-29%	-50%
Immobilier	25%	100%	-9%	-13%	-27%
Monétaire	-7%	-9%	100%	54%	39%
Govt AA 10 ans	-29%	-13%	54%	100%	61%
Corp BBB 5 ans	-50%	-27%	39%	61%	100%

8.3. Passif

8.3.1. Les institutions de prévoyance

Une institution de prévoyance est créée et gérée par les partenaires sociaux (syndicats professionnels) d'une entreprise, d'une branche ou entre plusieurs branches d'activité. Elle dispose d'un Conseil d'administration paritaire. Il est constitué à parts égales de représentants des salariés et de représentants des entreprises. Il a la charge de définir et mettre en œuvre les garanties dans l'intérêt exclusif des salariés dans l'entreprise. Comme il n'y a aucun actionnariat à rémunérer les résultats servent donc à améliorer le niveau des garanties, la qualité des services et la sécurité des engagements.

Il existe près de 39 institutions de prévoyance en France et elles couvrent plus de 13 millions de salariés à la fin de 2018⁶.

Les institutions de prévoyance peuvent être de trois types :

- Les institutions professionnelles, couvrant une branche professionnelle, une profession ou une catégorie professionnelle, comme par exemple BTP Prévoyance (branche du bâtiment) ;
- Les institutions interprofessionnelles, couvrant plusieurs branches d'activité, comme par exemple MALAKOFF-MEDERIC HUMANIS ;
- Les institutions d'entreprise, dédiées à l'assurance des salaires d'une seule entreprise ou d'un groupe, comme par exemple l'Institution de Prévoyance AUSTERLITZ.

La majorité des institutions de prévoyance appartient à un groupe paritaire de protection sociale (GPS). Le groupe comporte au moins une institution de retraite AGIRC, une institution de retraite ARRCO et une institution de prévoyance.

Clause de désignation :

Les institutions de prévoyance et union se sont développées notamment via le mécanisme des clauses de désignation. Ce dispositif, prévu à l'article L. 912-1 du Code de la sécurité sociale, permettait aux partenaires sociaux, en plus de définir les régimes de santé, prévoyance ou de retraite applicables à tous les salariés d'un secteur d'activité, d'en confier la couverture à un ou plusieurs assureurs spécifiques pour une période maximale de cinq ans.

Toutes les entreprises du secteur d'activité concerné étaient contraintes de souscrire un contrat auprès de l'assureur désigné, à moins qu'elles n'aient mis en place auparavant une couverture équivalente.

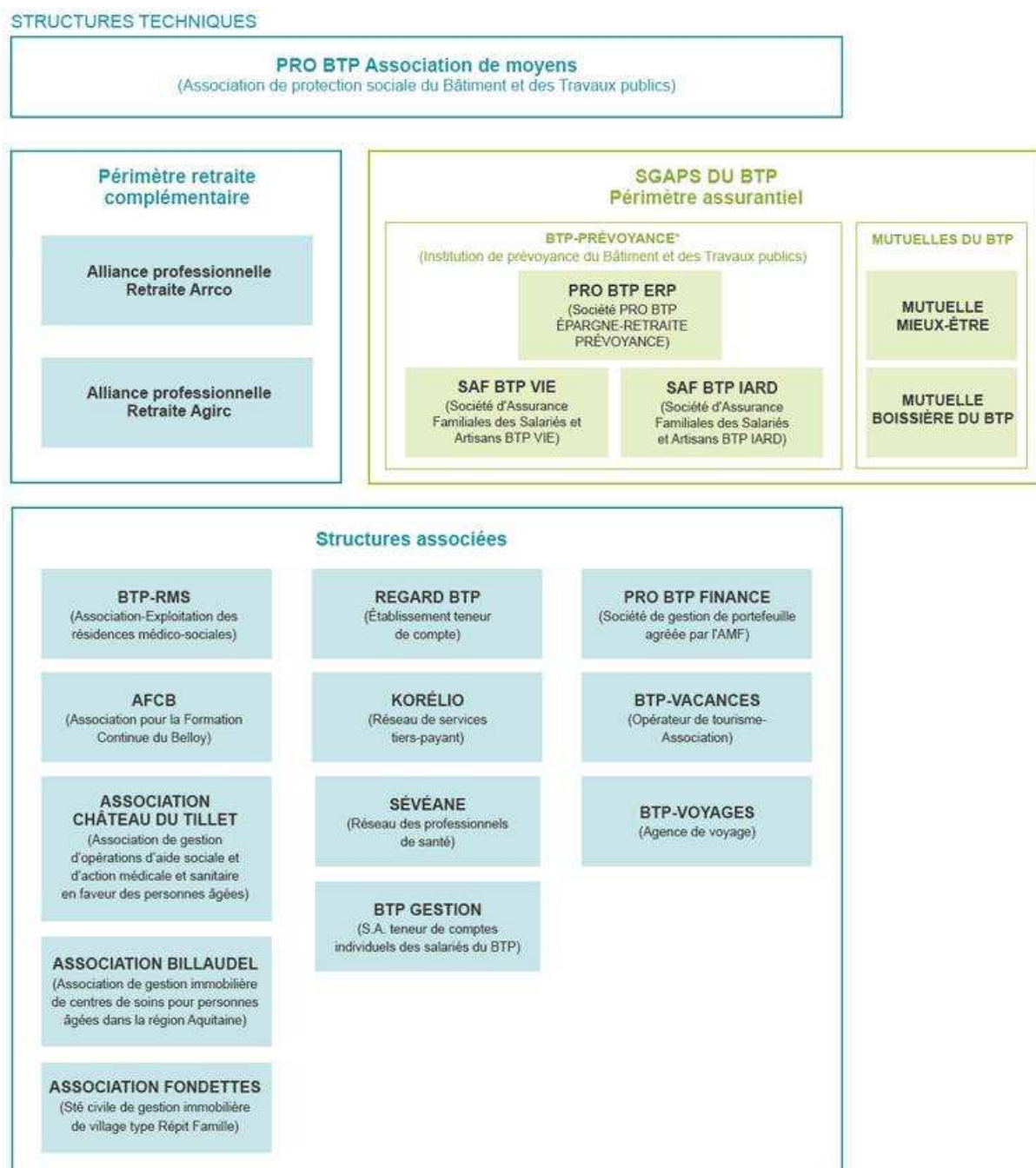
En juin 2013, ce système de désignation a été remplacé par un mécanisme de recommandation.

⁶ Source : Cahier statistique 2018 des institutions de prévoyance - édition 2019

Ce mécanisme laisse la possibilité aux partenaires sociaux de recommander un ou plusieurs assureurs aux entreprises d'un secteur d'activité. Les entreprises n'ont pas l'obligation de choisir l'assureur recommandé. En revanche, l'assureur est obligé d'accepter les adhésions de toutes les entreprises.

8.3.2. Le Groupe PRO BTP

PRO BTP est un Groupe paritaire de Protection Sociale. Il est composé de la manière suivante :



* Structures ayant regroupé leurs moyens humains et techniques au sein de PRO BTP Association de moyens.

Source : Site internet du groupe (<https://groupe.probtp.com>)

Le classement 2018 des institutions de prévoyance par cotisation (chiffres hors taxes 2017, en M€) :

Rang	NOM DE L'IP OU IP COMBINANTE	COTISATIONS EN AFFAIRES DIRECTES (1) 2017	RÉSULTAT NET 2017	FONDS PROPRES 2017	SOLVABILITÉ	COTISATIONS COLLECTIVES	COTISATIONS INDIVIDUELLES	PERSONNES PROTÉGÉES
1	Sgaps BTP	2 300,50	9,3	3 306,90	242,70%	1 762,60	537,9	3 265 000
2	AG2R Réunica Prévoyance	2 282,00	13	1 138,00	141,10%	2 240,00	42	7 773 557
3	Humanis Développement Solidaire (2) (3)	1 821,00	NC	NC	157,00%	1 806,00	15	2 900 000

(1). Cotisations brutes de réassurance et hors acceptations.

(2). Taux de couverture SCR avec mesures transitoires.

(3). Humanis indique que le montant des cotisations en individuel a été corrigé par rapport au montant publié dans notre édition de 2017. Le nombre des personnes protégées est estimé.

Sources : L'Argus de l'assurance et les sociétés cités.

Le classement 2018 des groupes de protection sociale (montants 2017 hors taxes, en M€) :

Rang	GROUPE	COTISATIONS COMBINÉES HORS IRC EN AFFAIRES DIRECTES (1)	COTISATIONS BRUTES DE RÉASSURANCE Y COMPRIS LES ACCEPTATIONS	COTISATIONS NETTES DE RÉASSURANCE ET HORS ACCEPTATIONS	RÉSULTAT NET	FONDS PROPRES	SOLVABILITÉ	PERSONNES PROTÉGÉES
1	AG2R La Mondiale (2)	7 998,0	9 781,0	7 103,0	361,0	6 066,0	224,1%	9 783 208
2	Malakoff Médéric (2)	3 477,0	4 210,0	3 002,0	61,0	4 089,0	391,0%	6 600 000
3	Pro BTP	2 804,1	2 857,6	2 377,4	59,1	3 585,5	222,7%	3 875 000

(1). Cotisations combinées hors IRC, brutes de réassurance et hors acceptations.

(2). Taux de couverture SCR avec mesures transitoires.

(3). Le nombre de personnes protégées est estimé.

(4). L'évolution du chiffre d'affaires s'explique notamment par l'intégration de la mutuelle UMC dans le périmètre de combinaison. 5. Groupe prudentiel constitué en 2017, les données mentionnées pour 2016 sont pro-forma

Sources : L'Argus de l'assurance et les sociétés cités.