

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Madame / Monsieur Nicolas LEROUX

Titre du mémoire : Etude d'un traité de réassurance sur risque de températures extrêmes

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la
filiale :

Signature :

Entreprise : Swiss Life France

Nom : CLERMONT David

Signature :

Directeur de mémoire en
entreprise

Membres présents du jury de
l'Institut des Actuares :

Signature :

Nom : FRAPARD Fabian

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable
entreprise :

Signature du candidat :





INSTITUT DE STATISTIQUE (ISUP)
SORBONNE UNIVERSITÉ
SWISSLIFE FRANCE

ÉTUDE D'UN TRAITÉ DE RÉASSURANCE SUR RISQUE
DE TEMPÉRATURES EXTRÊMES

Nicolas LEROUX

Tuteur en entreprise : Fabian FRAPARD

Tuteur académique : Olivier LOPEZ

2023

Remerciements

Je remercie particulièrement Fabian FRAPARD, mon tuteur de mémoire et manager, de m'avoir orienté et conseillé pour mener à bien ce mémoire. Je le remercie pour ses conseils avisés, et les connaissances qu'il m'a transmises.

Je tiens aussi à remercier les membres de l'équipe SII de SwissLife France composée par Thomas DEBAIS, Julien BECKEL, Briec PLURIEN et Guillaume RIVIERE qui m'ont permis d'éclaircir ma compréhension de la réglementation SII qui entoure l'objet de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier mon collègue, Mohamed AAZIB, qui m'a permis d'éclaircir ma compréhension de l'ALM à travers les nombreux échanges que j'ai eus avec lui.

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe ALM, son responsable, David CLERMONT ainsi que le directeur des risques Vladislav GRIGOROV, pour leur accueil au sein de la compagnie, leur confiance et leur soutien dans la réalisation de mon mémoire.

Je remercie Olivier LOPEZ, mon tuteur académique au sein de l'ISUP, pour son accompagnement.

Résumé

Mots Clés : Solvabilité II, ORSA, Réassurance, Température, Processus stochastique, Brownien

Les sociétés d'assurance cherchent à se protéger d'évènements climatiques extrêmes qui pourraient aggraver la sinistralité de leurs contrats d'assurance. Dans un cadre hypothétique, 2 sociétés d'assurance souscrivent chacune un traité de réassurance auprès de la société AssuRisk pour se protéger de températures extrêmes.

Seulement, la modélisation du traité est remise en question car ses prévisions semblent déconnectées de l'expérience historique.

C'est dans ce cadre que ce mémoire développera une modélisation adaptée pour répondre à cette problématique. La modélisation de température s'appuie notamment sur un processus stochastique avec retour à la moyenne et bruit brownien.

Plusieurs variables d'ajustement peuvent être utilisées pour ajuster un tel modèle. Le rejet de certaines méthodes ont mis en lumière une méthode contraignante qui répond aux attentes de modélisation.

Dans un tel cas, quelles conséquences sur le bilan de la société AssuRisk dans le cadre réglementaire Solvabilité II et sur les projections incluses dans le processus ORSA ?

Abstract

Mots Clés : Solvabilité II, ORSA, Réassurance, Température, Processus stochastique, Brownien

Insurance companies seek to protect themselves from extreme weather events that could worsen the loss experience of their insurance policies. In a hypothetical setting, two insurance companies each take out a reinsurance treaty with AssuRisk to protect themselves against extreme temperatures.

However, the modelling of the treaty is questioned because its forecasts seem disconnected from historical experience.

It is in this context that this thesis will develop a model adapted to respond to this problem. The temperature model is based on a stochastic process with mean reversion and Brownian noise.

Several adjustment variables can be used to adjust such a model. The rejection of certain methods has highlighted a constraining method that meets modelling expectations.

In such a case, what are the consequences for AssuRisk's balance sheet in the Solvency II regulatory framework and for the projections included in the ORSA process ?

Table des matières

Résumé	4
Abstract	5
Synthèse	8
Introduction	14
1 Revue du cadre Solvabilité II et introduction au traité de réassurance	15
1.1 Présentation du contexte réglementaire Solvabilité II	16
1.1.1 Passage de Solvabilité I à Solvabilité II	16
1.1.2 Les piliers de Solvabilité II	16
1.1.3 Focus sur le pilier I de solvabilité II	18
1.1.4 Définition du SCR	20
1.1.5 L'approche modulaire de la formule standard	21
1.1.6 L'absorption par les impôts différés	23
1.1.7 L'absorption par les provisions techniques	23
1.1.8 Minimum Capital requirement (MCR)	23
1.1.9 Couverture du SCR et MCR	24
1.2 L'ORSA	25
1.3 Contexte et aperçu de la société d'étude	25
1.3.1 Principes généraux du calcul de Best-Estimate des passifs	26
1.3.2 Best Estimate des passifs des affaires non proportionnelles	26
1.4 Introduction au fonctionnement du traité non-proportionnel climatique	26
1.4.1 Origine de ce type de traité	26
1.4.2 Fonctionnement du traité	26
1.4.3 Enjeu pour l'assureur et application initiale	28
2 Étude du modèle de température et premières applications	30
2.1 Modèle de températures	31

2.1.1	Moyenne Mobile	31
2.1.2	Processus de "retour à la moyenne" avec erreur brownienne	35
2.2	Browniens simulés	36
2.2.1	Corrélation des browniens	36
2.2.2	Normalité des résidus	37
2.2.3	Résultats et interprétations	39
2.3	Pont Brownien Standard	40
2.3.1	Résultats et ré-adaptation	41
2.4	Quantiles de températures extrêmes contraints	41
2.4.1	Application du traité	44
3	Modification du traité et conséquences	47
3.1	Revue des limites du traité	48
3.1.1	Méthode d'ajustement des limites	48
3.1.2	Nouvelles limites du traité	49
3.1.3	Cohérence des nouvelles limites et limites de la méthode des quantiles extrêmes contraints	50
3.2	Contrainte de volatilité journalière	50
3.2.1	Choix de modélisation et avantages	50
3.2.2	Résultats et analyse	51
3.3	Modification des limites	54
3.4	Applications au cadre Solvabilité II	57
3.4.1	Première application : Modification des limites	58
3.4.2	Deuxième application : Modification de la prime des traités	58
3.5	Applications aux projections ORSA	59
3.5.1	Première application : Modification des limites	60
3.5.2	Deuxième application : Modification de la prime des traités	60
	Bibliographie	67
	Annexes	68

Synthèse

Les conditions météorologiques et plus particulièrement les températures sont des facteurs importants de l'économie. Les compagnies qui souffrent de conditions météorologiques défavorables sont à même de se protéger contre ce risque. Un traité de réassurance est une très bonne solution pour déléguer une partie de ce risque auprès d'une autre entreprise. C'est dans ce contexte que nous introduisons le cadre du sujet de l'étude : 2 entités (resp. 1 et 2) ont chacune contracté un traité de réassurance non-proportionnel climatique auprès d'une société de réassurance hypothétique (que l'on nommera par la suite AssuRisk).

Seulement, la modélisation initiale du traité est remise en question car ses prévisions semblent être déconnectées de l'expérience historique.

Ce mémoire développera une modélisation adaptée pour répondre à cette problématique. Dans le cas où une modélisation serait considérée comme viable, quelles en seraient les conséquences sur le bilan Solvabilité II et les projections ORSA de l'entreprise ?

Introduction au traité de réassurance

Au 31.12.2021, la société de réassurance (nommée AssuRisk dans la suite de notre étude) accepte les affaires non proportionnelles climatiques (sujet de l'étude) souscrites par deux entités (respectivement entité 1 et entité 2). L'entité 1 est une société d'assurance de biens qui souhaite se protéger des risques de gel et d'incendies (plus fréquent en cas de températures extrêmes). L'entité 2 est une société d'assurance spécialisée en prévoyance-santé qui souhaite se protéger contre l'aggravation des frais médicaux en période de canicule ou de grand froid.

Le traité mis en place est une couverture non-proportionnelle en Aggregate Annuel afin de couvrir la sur-sinistralité due aux vagues de froid/canicules. Dans les faits, il repose sur un calcul d'un indice annuel relevant d'un écart journalier entre les températures maximales (resp. minimales) et les limites maximales (resp. minimales). Ce calcul est réalisé sur 10 villes réparties en France métropolitaine pour représenter au mieux l'ensemble des températures à prendre en compte.

Chaque ville est associée une pondération qui traduit la proportion d'assurés du portefeuille de chacune des entités dans la zone qui l'entoure. Chaque ville possède ses propres limites de température minimale et maximale, traduisant la situation géographique de chacune. Les différents seuils et poids de chaque ville sont explicités dans les termes du traité, respectivement pour les entités 1 et 2.

Dans le cadre de l'étude, les entités 1 et 2 auront respectivement pour priorité 35 et 50. Le réassureur s'engage à indemniser l'assureur à hauteur d'un montant notionnel (50 000 euros) pour chaque point d'indice dépassant une priorité de 35 pour l'entité 1 et une priorité de 50 pour l'entité 2. Le traité a cependant une portée indicelle à hauteur de 60. En échange de l'ensemble des engagements pris par le réassureur, l'assureur verse une prime à hauteur de 1 M d'euros pour couvrir chaque entité (soit 2 M en tout).

L'objet de l'étude vient répondre à une situation initiale hypothétique qui ne répond pas aux attentes qu'exigeait un tel traité :

- Une modélisation de température mono-ville rapportée à l'ensemble des villes par un indice correctif.
- Un Best Estimate de sinistralité très volatile qui est estimé à 1.5 M d'euros sur l'ensemble des 2

traités par prudence.

- Un scénario "extrême" (probabilité d'une fois tous les 50 ans) peu fiable qui est évalué à 5 M sur l'ensemble des 2 traités par prudence.
- Un historique de sinistralité réelle qui ne semble pas correspondre aux attentes.

Étude du modèle de température et premières applications

Modèle de température

Cette partie se concentrera sur un modèle stochastique de Monte-Carlo avec un mouvement de retour à la moyenne mobile accompagné d'une erreur en mouvement brownien.

L'enjeu de cette modélisation est multiple :

- Respecter au mieux la saisonnalité des températures annuelles et toutes les caractéristiques d'une évolution de température homogène au niveau métropolitain.
- Mettre en place un modèle qui simule des températures extrêmes cohérentes par rapport aux données d'entraînement fournies.
- Utiliser un processus stochastique dont le comportement reste abordable pour mieux appréhender les futurs résultats obtenus ainsi que leur cause.

Le premier objectif est de traduire mathématiquement la saisonnalité des températures maximales et minimales. Pour cela, nous utiliserons des composantes en sinus et cosinus à la manière des séries de Fourier. On définit :

$$\hat{\mu}_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \sum_{i=1}^{13} \gamma_{2i} \cos\left(\frac{(i+1) * \pi * t}{365}\right) + \sum_{i=1}^{13} \gamma_{2i+1} \sin\left(\frac{(i+1) * \pi * t}{365}\right)$$

Le processus stochastique utilisé s'écrit de façon discrétisée :

$$W_{t+1} = W_t + \hat{k}(\hat{\mu}_{t+1} - W_t) + \hat{\sigma}(B_{t+1} - B_t) \quad (1)$$

où $W_1 = \hat{\mu}_1$, $B_{t+1} - B_t \sim \mathbb{N}(0, 1)$, $\hat{\sigma}$ écart type standard entre les températures minimales (resp. maximales) consécutives et \hat{k} estimateur de retour à la moyenne mobile.

Les browniens simulés, étudiés par la suite, ont une importance capitale quant à la volatilité et la cohérence de la modélisation.

On introduit les résidus historiques (Rh) et des températures historiques (Th) pour obtenir :

$$Rh_{t+1} = \frac{W_{t+1} - W_t - \hat{k}(\hat{\mu}_{t+1} - Th_t)}{\hat{\sigma}} \quad (2)$$

Browniens simulés

Après construction de ces résidus pour les températures min/max historiques de chaque ville, nous pouvons établir ces deux matrices de corrélations multi-ville des résidus respectivement pour

les températures min/max. Il n'y a aucune corrélation négative entre ville, ce qui témoigne d'une homogénéité de l'évolution des températures au niveau métropolitain. Les corrélations importantes Lille/Paris et Toulouse/Bordeaux ne sont pas étonnantes du fait de leurs proximités géographiques.

Des QQPlots confortent la pseudo-normalité des résidus (Rh).

Les résultats obtenus par une telle modélisation ne se relèvent pas convaincant. Toutes les prévisions d'indemnisation se trouvent faibles voir nulles. En cause, le comportement même du processus : les estimateurs $\hat{\sigma}$ d'écart-type standard sont trop élevés et biaisent le comportement des températures.

Pont Brownien Standard

Nous rappelons que notre objectif est d'introduire des tendances de températures qui seraient plus vraisemblables par rapport à notre jeu de données historiques. Le pont brownien standard, aussi appelé "mouvement brownien attaché" pour ses qualités de continuité, permet de traduire des périodes de dépression et anticyclone. Le principe de sa construction est d'établir un chemin entre un point de départ de même ordonné que son point d'arrivée. Il remplace notre brownien standard pour la suite de l'étude.

Les résultats obtenus sur les simulations de températures sont meilleurs qu'avec l'utilisation de browniens standard. Cependant, malgré une volatilité de température supérieure à celle historique (qui pourrait se traduire par une vision prudente), les quantiles de températures extrêmes simulés n'atteignent pas ceux historiques.

Ce constat nous amène à utiliser l'approche développée par la suite.

Quantiles de températures extrêmes contraints

Il est capital que le modèle de température utilisé prenne en compte l'importance des valeurs extrêmes tout en préservant la cohérence d'une évolution de température. Ainsi nous sommes amenés à contraindre le modèle tout en préservant une partie de sa liberté. En effet, il s'agit de simuler des températures cohérentes avec l'historique tout en gardant la liberté d'obtenir de nouveaux extremums. Pour ce faire, nous adaptons la volatilité du pont brownien pour arriver aux quantiles cibles.

On pourra noter qu'imposer le quantile 99.9% permet d'aligner les autres quantiles plus faibles que ce soit pour les températures minimales et maximales. Cette observation semble confirmer un comportement des températures cohérent entre les simulations et notre jeu de données.

Revue des limites du traité

Comme notre modélisation semble cohérente, notre but sera de trouver de nouvelles limites de températures extrêmes pour chaque ville. Le tout dans un objectif d'homogénéisation des indices annuels de chaque ville. En effet, les indices simulés et historiques ne sont pas homogènes entre villes d'observation.

Les limites du traités doivent évoluer pour que les remboursements simulés s'alignent avec une prime totale de $2M$.

L'objectif n'est pas de tarifier le traité mais de proposer des éléments de réponse à une potentielle revue de celui-ci. Dans ce contexte, la formule $Cible = BE_1 + BE_2 + \sigma_{TOT}$ avec $\sigma_{TOT} = \frac{BE_1 * \sigma_1 + BE_2 * \sigma_2}{BE_1 + BE_2}$ doit s'aligner avec le montant total de primes ($Cible = 2M$).

En appliquant les nouvelles limites, un effet indésirable se révèle et peut mettre à mal ce choix de modélisation. En effet, la sur-représentation des simulations très extrêmes est dorénavant trop importante. Les quantiles, ainsi forcés pour l'ensemble des températures simulées, se sont alignés sur les quantiles historiques grâce une plus forte volatilité de brownien. Mais cet ajout de volatilité se reflète sur l'ensemble des températures simulées de façon hétérogène. Les browniens déjà extrêmes le deviennent davantage comparativement à ceux proches de la moyenne. En conséquence, les simulations avec un fort indice associé, nourries par des browniens déjà extrêmes, voient leur indice augmenter davantage que les simulations à faible indice.

Une adaptation des limites en accord avec une indemnisation cible peut alors s'avérer préjudiciable pour le réassureur.

Une autre contrainte à imposer au modèle est envisagée pour corriger ces défauts avérés.

Contrainte de volatilité journalière

Cette nouvelle contrainte a pour but de restreindre la liberté de modélisation aux caractéristiques du jeu de données. Le but n'est en aucun cas de modifier le comportement du processus stochastique mais seulement d'en imposer les caractéristiques finales.

Après avoir simulé les températures sans contraintes (en conservant les ponts browniens associés), nous imposons aux températures simulées 2 contraintes :

- La volatilité journalières des températures simulées égale à celle historique.
- Une température moyenne journalière égale à celle historique.

Ce sont de fortes contraintes qui n'altèrent pas le comportement intrinsèque du processus. L'intérêt d'une telle contrainte est triple :

- imposer aux simulations de posséder des caractéristiques proches du jeu de données.
- cibler des jours particuliers avec une volatilité trop faible sans en accentuer d'autres.
- préserver la liberté du modèle de générer des extrêmes encore jamais observés historiquement.

Modification des limites

La méthode d'ajustement des limites est d'abord appliquée sur les limites de températures initiales du traité avec un écart toléré de $0.05M$. Pour obtenir une meilleure homogénéité des indices simulés inter-villes, nous appliquons la méthode d'ajustement sur un jeu de limites vides. Certes, ce dernier choix est désavantageux pour l'assureur en terme de BE de sinistralité mais il traduit plus justement les objectifs de la mise en place du traité.

Applications au cadre Solvabilité II

Pour cette première application, les primes associées à chaque entité restent inchangées à 1M chacune. Les limites du traité sont adaptées de façon à obtenir des indices homogènes entre les différentes villes et entre températures minimales/maximales. En conséquence, le SCR non-vie, adossé à l'assiette de prime, n'est pas impacté.

Il en découle une augmentation des fonds propres et du ratio SII de 15%.

Pour cette deuxième application, les limites du traités ne sont pas ajustées mais le BE est lui ré-évalué à 0.25M. Le montant de prime associée est lui aussi ajusté à $BE_{TOT} + \sigma_{TOT} = 0.78 M$ pour s'aligner avec la méthode précédemment décrite.

Il en découle une augmentation des fonds propres, une diminution du SCR et une hausse du ratio SII de 12%.

Applications aux projections ORSA

Tout au long de la projection, le scénario Central est porté par ses fonds propres qui accumulent le même gain annuel de leeway entre les primes acquises et les sinistres (BE) prévus.

Ce gain en fonds propres est cependant légèrement compensé par un SCR en légère augmentation par rapport au Base case : les gains annuels hypothétiques décrits précédemment sont réinvestis sur des produits de taux en suivant le plan d'investissement prévu par l'ORSA. Ce qui impacte légèrement le SCR Taux et Spread.

Contrairement à la première application, les nouvelles projections de la deuxième application semblent être parallèle au Base Case. Dans le scénario central, les gains en ratio, constant dans le temps, s'expliquent par les éléments suivants :

- Un leeway entre montant de prime et BE de sinistre équivalent à celui du Base Case.
- Le SCR non-life, alimenté par le traité climatique, est adossé à un montant de primes constant.

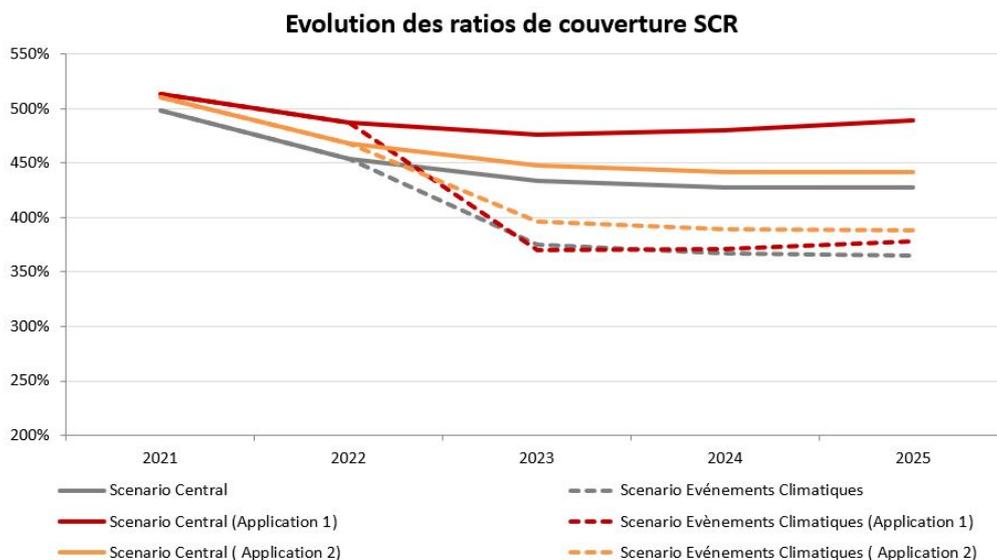


FIGURE 1 – Projection ORSA

Introduction

Dans le secteur de l'assurance, chaque contrat est soumis à un risque que l'assureur cherche à évaluer en fonction d'hypothèses de sinistralité. Seulement, tous les risques ne peuvent être pris en compte pour tarifier un produit d'assurance. Un assureur peut souhaiter réduire son exposition à un tel risque en faisant appel à un réassureur.

La progression du réchauffement climatique accentue un risque de moins en moins négligeable qui incombe le portefeuille des assureurs. Le cadre réglementaire 29LEC ("Article 29 de la Loi sur la transition énergétique") et la DPEF ("Déclaration de Performance Extra-Financière") sont des outils législatifs et réglementaires utilisés en France qui encouragent la prise en compte des risques liés au changement climatique. On peut notamment parler des risques physiques abordés dans le cadre de la gestion des risques.

Le risque physique fait référence aux impacts directs du changement climatique, tels que les événements météorologiques extrêmes (tempêtes, inondations, sécheresse, faible débit de rivière, etc), la montée du niveau de la mer et l'augmentation de la température. La gestion de ce type de risque peut se traduire par la mise en place de plans de continuité des activités pour y faire face.

Plusieurs sinistres récents en Europe ont été liés aux risques physiques du changement climatique, tels que :

- Inondations en Belgique, en Allemagne et aux Pays-Bas en Juillet 2021.
- Incendies de forêts en Grèce, en Italie et en Turquie en 2021.
- Vague de chaleur en Europe Occidentale en été 2021.
- Tempêtes hivernales au Royaume-Uni en 2020-2021.

C'est dans ce cadre que les traités de réassurance climatique ont vu leurs demandes augmentées pour répondre à une forte demande de protection sur ce risque. Les conditions météorologiques et plus particulièrement les températures sont des facteurs importants de l'économie. Les compagnies qui souffrent de conditions météorologiques défavorables sont à même de se protéger contre ce risque. Pour une compagnie d'assurance telle que SwissLife France, des températures particulièrement extrêmes peuvent entraîner des cash-flows instantanés supplémentaires, notamment en assurance non-vie et santé.

En assurance non-vie, les périodes de gel et de canicule éprouvent les biens matériels mais aussi leurs utilisateurs. En assurance santé, les périodes extrêmes éprouvent les systèmes immunitaires humains.

Un traité de réassurance est une très bonne solution pour déléguer une partie de ce risque auprès d'une autre entreprise, soulager dans un même temps les provisions liées à ce risque et lisser le résultat issu du business soumis à ce risque.

C'est dans ce cadre que 2 entités respectivement d'assurance non-vie et santé ont souscrit un contrat de réassurance auprès de l'entreprise hypothétique "AssuRisk" sous la forme d'un contrat Aggregate Annuel non-proportionnel climatique. Dans cette situation hypothétique, le traité initial, ses caractéristiques, sa modélisation et ses prévisions se semblent pas répondre aux attentes.

L'étude aura pour objectif de modéliser l'ensemble des tenants et aboutissants autour de ce traité pour apporter des éléments de réponse en cas de revue de ses caractéristiques lors d'un potentiel renouvellement.

Chapitre 1

Revue du cadre Solvabilité II et introduction au traité de réassurance

Ce premier chapitre mettra en évidence le cadre réglementaire Solvabilité II (1.1) qui entoure le sujet de l'étude. Celui-ci aura aussi des conséquences sur le processus ORSA (1.3) dans le cadre de projections futures. Nous aborderons aussi le contexte et le fonctionnement du sujet de l'étude(1.5) ainsi que sa prise en compte dans une société de réassurance(1.4).

1.1 Présentation du contexte réglementaire Solvabilité II

1.1.1 Passage de Solvabilité I à Solvabilité II

A partir de 2002, les assureurs ont été soumis à la réglementation Solvabilité I. Celle-ci fixe des exigences de solvabilité que les assureurs se doivent de respecter en permanence. De plus, ces sociétés d'assurance ont l'obligation d'instaurer un environnement de contrôle.

La réglementation Solvabilité I se décompose en 3 piliers :

- Des provisions techniques suffisantes.
- Des provisions techniques représentées par des actifs d'un montant équivalent et d'une certaine qualité.
- Une marge de solvabilité suffisante.

Cette réglementation avait l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre notamment pour le calcul de la marge de solvabilité. De plus, il était possible de comparer facilement les résultats des calculs entre les différentes compagnies d'assurance. Néanmoins, cette réglementation présentait ses limites : des actifs évalués en valeur comptable et des passifs en pourcentage de provision mathématique¹ prouvent une approche rétrospective qui ne tient pas compte de l'évolution future du portefeuille de l'assureur. De plus, la diversification ainsi que les interactions entre l'actif et le passif étaient négligées. Un des plus gros inconvénients était l'absence de prise en compte des risques liés aux investissements sur les marchés financiers ainsi que la non prise en compte du coût des options et garanties².

C'est donc dans la continuité de Solvabilité I et en vue de palier aux différentes lacunes mais aussi d'harmoniser le cadre réglementaire européen que la directive Européenne Solvabilité II a été élaborée. Celle-ci est entrée en vigueur le 1er janvier 2016. Son objectif est de déterminer et mesurer l'ampleur des risques encourus par chaque société d'assurance et évaluer si la situation financière de l'assureur lui permet de faire face à ses risques. La directive a également pour but d'inciter les entreprises d'assurance à optimiser leur gestion des risques ainsi que son pilotage. La directive Européenne permettra également aux autorités de contrôles de chaque pays Européen de disposer d'outils pour évaluer la solvabilité des sociétés d'assurance.

1.1.2 Les piliers de Solvabilité II

Solvabilité II, dans la lignée de la norme prudentielle bancaire Bâle II, est structurée en 3 piliers :

- Exigences quantitatives : le pilier I se décompose en 4 grandes parties :

1. La provision mathématique est une estimation actuelle et prudente du montant des prestations d'assurance qui devront être payées.

2. Le coût des options et garanties dans un contrat d'assurance vie correspond aux frais supplémentaires de certaines options et garanties non comprises dans le contrat de base : garantie de décès, garantie de rente, options de rachat partiel, etc.

- Le calcul des provisions techniques en vision "Best Estimate".
- Le passage du bilan prudentiel en vision "économique" contrairement à la vision comptable utilisée dans Solvabilité I.
- Des exigences de capital réglementaire : le SCR (Solvency Capital Requirement) et le MCR (Minimum Capital Requirement).
- Principes en matière d'allocation et d'exigence des actifs.

● Exigences qualitatives : le pilier II définit les règles qualitatives d'une gestion des risques efficace et prudentielle et permet de faciliter les contrôles, tant interne qu'externe. De plus, ce pilier vient renforcer le système de gouvernance qui a pour double objectif transparence et efficacité, garanti notamment par une documentation interne sur les différentes procédures de la compagnie. Cette accentuation de la gouvernance s'accompagne également par la mise en place de quatre fonctions clés :

- Fonction de gestion des risques.
- Fonction de conformité.
- Fonction actuarielle.
- Fonction d'audit interne.

Par ailleurs, l'entreprise d'assurance devra effectuer chaque année un processus appelé ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). L'objectif de l'ORSA est d'évaluer, sous certaines hypothèses choisies par l'entreprise, la solvabilité de la compagnie sur un horizon supérieur à 1 an. Il comporte 3 évaluations définies dans l'article R.354-3 [1] (article 45 de la directive Solvabilité II) :

- L'évaluation du Besoin Global de Solvabilité (BGS).
- L'évaluation du respect permanent des obligations réglementaires concernant la couverture du SCR, du MCR et des exigences concernant les provisions techniques.
- L'évaluation de l'écart entre le profil de risque de l'entreprise et les hypothèses qui sous-tendent le capital de solvabilité requis.

Ce processus est suivi d'un rapport qui est remis à l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) ainsi qu'à l'AMSB (Organe d'administration, de gestion ou de contrôle) qui permet d'apporter des informations sur le profil de risque ainsi que sur la solvabilité de la compagnie.

● Discipline de marché : le troisième pilier de Solvabilité II a pour objectif de définir le format de l'information que la compagnie devra transmettre au régulateur ainsi qu'au public. Il fixe également la transparence de l'information concernant l'activité de l'entreprise.

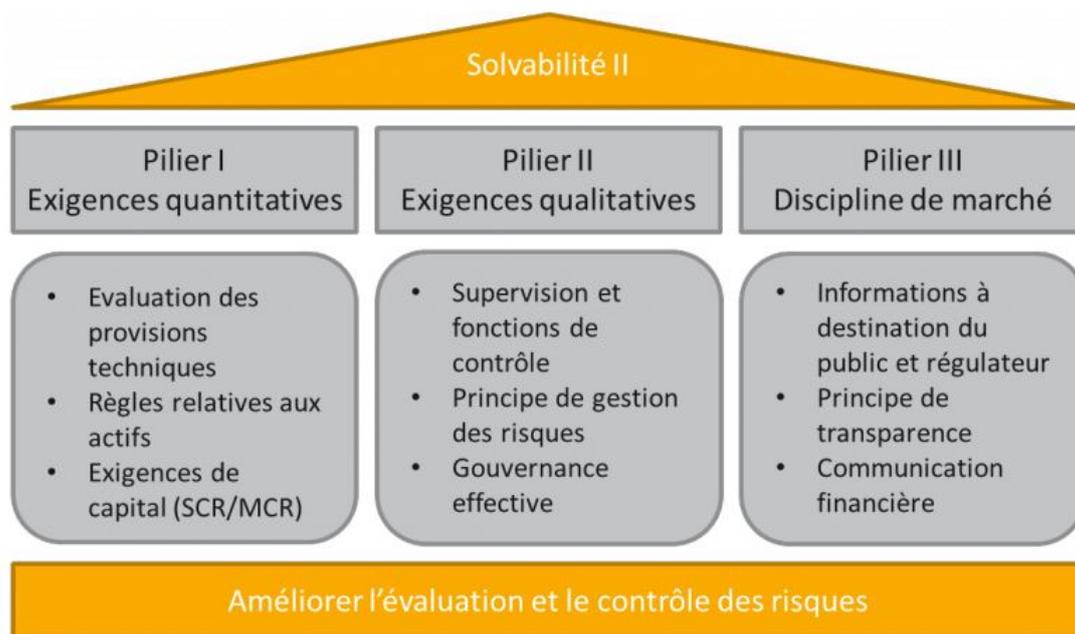


FIGURE 2 – Synthèse des 3 piliers de Solvabilité II

1.1.3 Focus sur le pilier I de solvabilité II

Le pilier I a pour but de décrire les normes de valorisation de l'actif et du passif de l'assureur, le calcul des fonds propres "économiques" ainsi que les exigences réglementaires en fonds propres.

Avec solvabilité I, le bilan de l'assureur était évalué en vision comptable. Cela signifie que les actifs étaient comptabilisés à leur valeur d'achat ("*Book Value*"). L'évaluation des passifs passait par des provisions techniques suffisantes, c'est-à-dire évaluées à l'aide d'hypothèses prudentes. On comptabilisait également au passif une exigence de marge qui était un coussin de sécurité utilisé pour absorber d'éventuelles pertes suite à une sinistralité exceptionnelle ou des variations économiques défavorables.

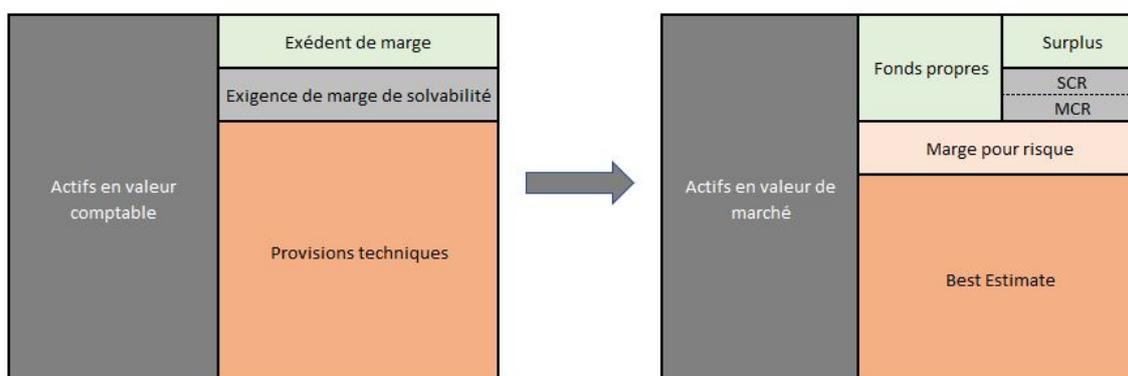


FIGURE 3 – Passage du bilan comptable au bilan économique

Contrairement au référentiel Solvabilité I, dans Solvabilité II les actifs sont comptabilisés en valeur

de marché ("*Market Value*"). Cela signifie qu'on prend en compte l'évolution de l'actif depuis son achat en comptabilisant une plus-value ou moins-value latente à l'actif, ce qui permet d'avoir une vision plus réelle et actuelle du bilan de l'assureur. Sous Solvabilité I, les plus-values latentes ne sont pas constatées. En revanche les moins-values latentes peuvent être constatées à l'aide de provision comme la provision pour dépréciation durable ou encore la provision pour risque d'exigibilité.

Pour la valorisation des passifs, Solvabilité II retient une approche dite "*Best Estimate*". On retiendra comme définition du *Best Estimate* (BE) celle énoncée dans le paragraphe "Projection of Liability Cash Flows" des spécifications techniques du QIS4³[2] : "La moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente." Le BE doit être calculé brut et net de réassurance/rétrocession et doit être réalisé en "*Run off*" c'est à dire en ne considérant pas de nouveau business. Néanmoins, Solvabilité II introduit la notion de frontière des contrats. Cela permet de prendre en compte dans le calcul du BE, les primes ayant une garantie.

Pour l'assurance non-vie, la frontière des contrats est de 1 an, c'est-à-dire qu'on projette les primes sur une seule année. La directive européenne stipule que le calcul repose sur des informations actuelles et crédibles. De plus, les hypothèses doivent être réalistes. Pour procéder au calcul du BE, la compagnie d'assurance doit identifier tous les encaissements et décaissements relatifs à ses engagements (primes contractuelles, prestations, frais...) et mesurer les probabilités de survenance de ces événements. Concernant la courbe de taux à utiliser, celle-ci est fournie chaque mois par l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) le superviseur européen de l'assurance. L'assureur peut choisir d'utiliser une mesure contra-cyclique appelé "*Volatility Adjustment*" (VA) qui permet de compenser la volatilité des spreads. En France, l'utilisation du VA n'est pas soumis à l'autorisation du régulateur national contrairement à d'autres pays. La VA s'ajoute à la courbe de taux. On peut noter la décorrélation entre la volatilité des spreads obtenue pour le calcul de la VA et la volatilité réelle observée du portefeuille.

On peut écrire mathématiquement l'expression du BE :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}*\mathbb{P}}\left[\sum_{t \geq 1} \delta_t \times L_t\right]$$

avec

- \mathbb{Q} : la probabilité risque-neutre.
- \mathbb{P} : la probabilité monde réelle.
- δ_t : la facteur d'actualisation à l'instant t .
- L_t : les flux de trésoreries à l'instant t .

Par ailleurs, Solvabilité II prévoit que les provisions techniques soient évaluées à la valeur de transfert du portefeuille d'assurance. Cette évaluation prend en compte les risques associés à la gestion de portefeuilles d'assurance. Le but est d'intégrer notamment le coût de l'incertitude des calculs du *Best Estimate*. Il faut donc ajouter au BE ce qu'on appelle la marge pour risque (*Risk Margin*). On peut voir la marge pour risque comme le montant qu'il faudrait pour dédommager le repreneur du portefeuille d'avoir immobiliser du capital pour écouler entièrement les engagement d'assurance. Les capitaux à immobiliser correspondent aux futurs SCR induit par les engagements d'assurance. On peut la traduire mathématiquement par la formule suivante :

3. QIS4 : Quantitative impact study No.4

$$RM = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^* \mathbb{P}} \left[CoC \times \sum_{t \geq 1} \delta_{t+1} \times SCR_t \right]$$

avec :

- CoC : le coût du capital fixé à 6%.
- SCR_t : le capital de solvabilité requis à l'instant t .

Les fonds propres sont obtenus comme la différence entre l'actif et le passif du bilan prudentiel de l'assureur. Ce sont dans les fonds propres que sont inclus les deux exigences réglementaires de capital : le SCR et le MCR. La part des fonds propres qui dépasse le SCR est appelé le surplus.

1.1.4 Définition du SCR

Le SCR (Solvency Capital Requirement) représente le montant de fonds propres nécessaire pour pouvoir faire face à des pertes exceptionnelles à 1 an avec une probabilité de 99.5%. Cela correspond donc à une Value at risk (VaR) à un niveau de confiance de 99.5% des fonds propres d'une compagnie d'assurance ou de réassurance. En d'autres termes, c'est le montant à détenir pour pouvoir supporter une ruine tous les 200 ans.

La VaR est définie comme un quantile d'ordre α d'une variable aléatoire X :

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha \}$$

où :

- α est le niveau de confiance de la VaR (il vaut 99.5% dans Solvabilité II).
- X est une variable aléatoire.

On peut donc définir mathématiquement le SCR à partir de la définition de la VaR comme :

$$SCR = FP_0 - P(0, 1) \times VaR_{0.5\%}(FP_1)$$

où :

- FP_0 : représente les fonds propres économiques détenus en $t=0$.
- FP_1 : représente les fonds propres économiques détenus en $t=1$ (c'est une variable aléatoire).
- $P(0, 1)$: le prix en $t=0$ d'un zéro-coupon de maturité 1 an.
- $VaR_{0.5\%}(FP_1)$: la VaR à 0.5% de fonds propres économiques en $t=1$.

Cette mesure de risque choisi par l'EIOPA présente certains avantages :

- Elle permet de quantifier la queue de distribution de la variable qui nous intéresse (cependant nous n'avons pas l'information sur la partie après notre niveau de confiance α).
- Le calcul d'un quantile est plutôt facile à mettre en oeuvre et son implémentation se fait aisément.

1.1.5 L'approche modulaire de la formule standard

Pour calculer son SCR, une compagnie d'assurance a le choix entre mettre en place un modèle interne et utiliser la formule standard proposé par l'EIOPA.

Le modèle interne consiste à évaluer les différentes VaR en fonction de ses propres risques auxquels l'assureur est réellement soumis. Il pourra ainsi avoir plus de liberté et prendre en compte des facteurs qui ne seraient pas utilisés avec la formule standard. Ce modèle interne, une fois développé, devra être approuver par l'ACPR pour être utilisé ensuite. Toutefois, un calcul en utilisant la formule standard est requis.

Si l'assureur décide ne pas mettre en place un modèle interne, il devra utiliser la formule standard prévu par l'EIOPA. Les différents calculs de la formule standard sont présentés de manière précise dans les Actes Délégués[1]. Pour chaque risque à mesurer, l'EIOPA a donc calibré des chocs à la hausse et à la baisse à appliquer au bilan de l'assureur en $t = 0$. Ils ont été calibrés pour correspondre à une VaR à 99.5% à horizon 1 an. Tous ces chocs seront ensuite agrégés à l'aide de différentes matrices de corrélation.

La formule standard proposé par l'EIOPA définit 6 grands modules :

- Marché.
- Souscription santé.
- Défaut.
- Souscription vie.
- Souscription non-vie.
- Intangible.

Les modules de marché, santé, vie et non-vie sont également découpés en sous-modules. La figure ci-dessous résume cette approche modulaire.

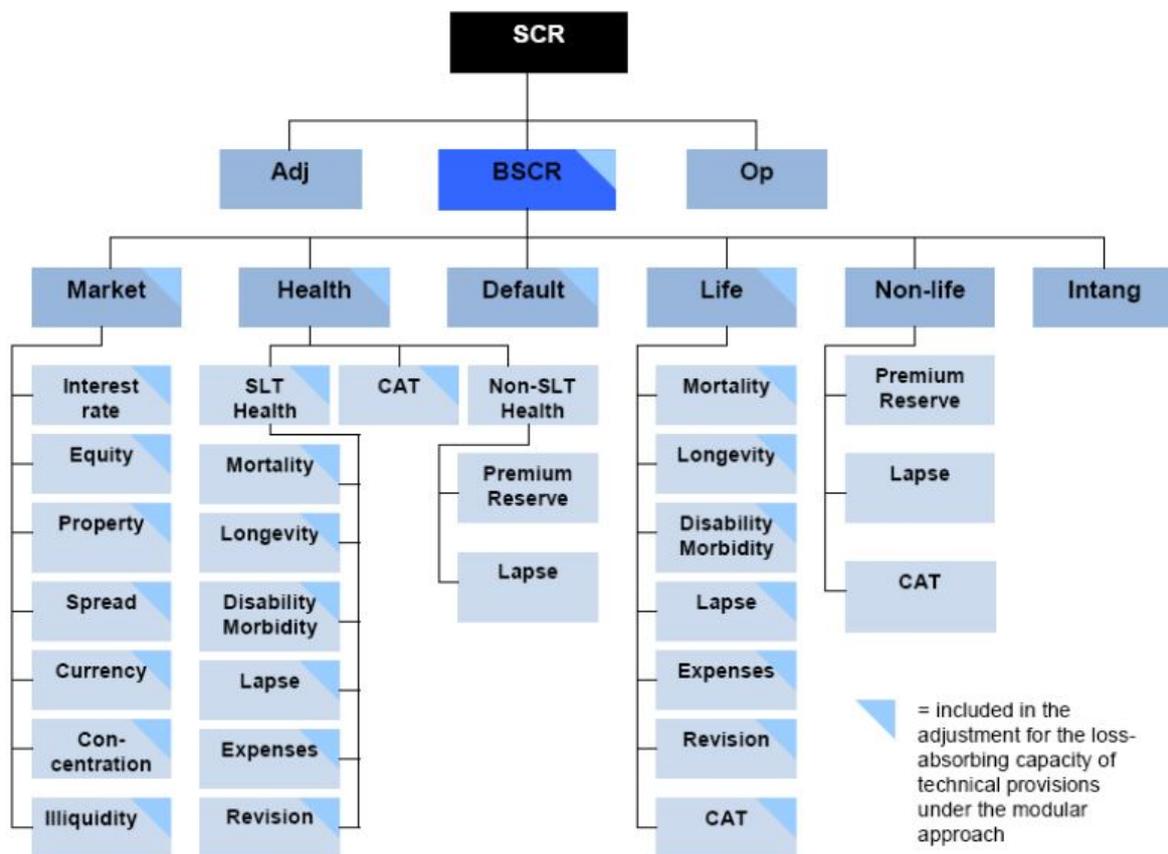


FIGURE 4 – Synthèse des modules de la formule standard

Le but est donc de calculer les SCR de chacun de ses sous-modules et ensuite les agréger grâce à une matrice de corrélation fournie pour chaque module par l’EIOPA : c’est l’agrégation intra-modulaire. Une fois que l’on a le SCR de chacun des modules, il faut encore agréger les modules entre eux via une autre matrice de corrélation fournie également par l’EIOPA. On obtient finalement le BSCR (*Basic Solvency Capital Requirement*).

La formule utilisée pour l’agrégation est la suivante :

$$SCR_{agregé} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

avec :

- $Corr_{i,j}$: le coefficient de corrélation entre les SCR i et j.
- SCR_i : le montant de SCR pour le risque i.

Une fois le BSCR obtenu, il reste encore 2 étapes pour parvenir au SCR final. En effet, il faut encore calculer les absorptions par les provisions techniques et par les impôts différés ainsi que le risque opérationnel.

La formule finale du SCR donnée par l’EIOPA est la suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

Avec $Adj = Adj_{TP} + Adj_{DT}$ qui sera détaillé ci-dessous.

La directive solvabilité II prévoit deux façons différentes d'absorber les chocs de SCR, c'est-à-dire réduire le montant de capitaux réglementaires pour un certain risque. Ces deux possibilités sont l'absorption par les impôts différés et l'absorption par les provisions techniques.

1.1.6 L'absorption par les impôts différés

La possibilité de réduire son montant de SCR grâce aux impôts différés s'explique par le fait qu'après un choc bicentenaire, l'assureur verra son bilan impacté négativement et payera donc moins d'impôt dans le futur. L'effet d'absorption correspond donc à la variation du montant d'impôts différés qui résulterait de la perte du montant du SCR. L'EIOPA distingue deux composantes dans l'ajustement par les impôts différés :

- L'impôt différé actif net d'impôt différé passif résultant de la vision économique du bilan.
- L'impôt différé actif sur déficit reportable appelé aussi impôt différé notionnel. C'est le montant d'impôt recouvrable par l'assureur à la suite d'un choc d'un montant équivalent au SCR. l'assureur devra démontrer la recouvrabilité de cet impôt dans le futur pour pouvoir être intégré dans l'ajustement par les impôts différés.

La formule à utiliser pour déterminer le montant d'absorption par les impôts différés est la suivante :

$$Adj_{DT} = \min(ID_{provenant\ du\ bilan\ S2} + IDA_{notionnel}; SCR_{post-impots})$$

où :

- $IDA_{notionnel}$ est le montant recouvrable après un choc bicentenaire.
- $SCR_{post-impots}$ est le montant de SCR auquel on a appliqué un taux d'impôt.

1.1.7 L'absorption par les provisions techniques

Le deuxième levier d'absorption provient des provisions techniques. Il n'est cependant présent que pour des activités où une participation aux bénéfices existe c'est-à-dire principalement les activités d'assurance vie à travers la participation aux bénéfices discrétionnaires. Ce deuxième levier ne concerne donc pas l'entreprise d'étude.

L'idée sous-jacente est qu'après un choc bicentenaire, l'assureur versera une participation aux bénéfices discrétionnaire moindre que dans une situation normale. L'assureur transfère donc une partie de ses pertes aux assurés via le mécanisme de participation aux bénéfices.

1.1.8 Minimum Capital requirement (MCR)

Le MCR est une autre exigence de capital réglementaire requis par Solvabilité II. La directive Européenne qualifie le MCR comme étant le niveau de fonds propres en dessous duquel les intérêts des

preneurs⁴ se verraient sérieusement menacés si l'entreprise était autorisée à poursuivre son activité. Si la compagnie d'assurance ou de réassurance descendait en dessous de ce seuil, elle se verrait retirer son agrément par l'autorité de contrôle.

Les actes délégués détaillant la méthode de calcul du MCR. Celle-ci repose sur 3 composantes : l'AMCR, le MCR_{linear} et le $MCR_{combined}$.

L'AMCR représente le seuil plancher absolu pour le MCR. Ce seuil est de EUR 2 M en assurance vie et de EUR 1 M en assurance non vie.

Le MCR_{linear} se calcule ainsi :

$$MCR_{linear} = MCR_{linearl} + MCR_{linearnl}$$

Où :

- $MCR_{linearl}$ est le MCR linéaire issue de l'activité vie
- $MCR_{linearnl}$ est le MCR linéaire issue de l'activité non vie.

Ces MCR linéaires sont le résultat d'un calcul linéaire de variables telles que les primes ou les provisions techniques multipliées par des facteurs.

Le $MCR_{combined}$ est donné par la formule qui suit :

$$MCR_{combined} = \min(\max(MCR_{linear}; 0.25 \times SCR); 0.45 \times SCR)$$

Finalement, la formule qui permet d'obtenir le MCR est :

$$MCR = \max(MCR_{combined}; AMCR)$$

1.1.9 Couverture du SCR et MCR

Le SCR et le MCR sont des niveaux de fonds propres économiques, ils font donc partie intégrante des fonds propres. Cependant, ils ne peuvent pas être couverts par n'importe quelle classe de fonds propres. On rappelle que les fonds propres sont divisés en 3 « Tiers », classés selon leur qualité.

Concernant le SCR, il est couvert par au moins 50% de fonds propres Tier 1 et moins de 15% de fonds propres Tier 3.

Pour le MCR, il doit être couvert par au moins 80% de fonds propres Tier 1 et le reste en fonds propres Tier 2 et seulement de fonds propres de base (les fonds propres auxiliaires ne sont pas autorisés en couverture du MCR).

Ces contraintes de couverture du SCR et du MCR sont aussi appelées « test de fongibilité ».

Nous ne détaillerons pas chacun des sous-modules de SCR qui ne sont pas impactés par l'objet de notre étude.

La prochaine sous-partie détaillera le processus ORSA qui servira de cadre d'application dans le Chapitre 3.

4. La compagnie pourrait ne pas être en mesure de payer les prestations supposées en cas de sinistre déclarés par les preneurs de contrats d'assurance.

1.2 L'ORSA

Le deuxième pilier demande de réaliser un processus appelé Own Risk and Solvency Assessment (ORSA), défini par l'Article 45 de la directive[1]. Il s'agit d'un processus interne permettant de mesurer les risques et la solvabilité de l'entreprise. Il doit permettre aux compagnies d'assurances d'identifier, mesurer et gérer les éléments de nature à modifier sa solvabilité ou sa situation financière. Les assureurs doivent réaliser un ORSA au moins une fois par an, il donne lieu à un rapport qui doit être remis au régulateur et à l'AMSB (Administrative, Management and Supervisory Body). Dans ce processus, l'entité doit évaluer de façon prospective ses risques et sa Solvabilité en y intégrant son profil de risque. L'évaluation se fait sur plusieurs années, entre 3 et 5 ans généralement. Bien que la mise en place de ce processus soit relativement libre, l'Article 45 impose l'évaluation des trois éléments suivants :

- Le Besoin Global de Solvabilité (BGS) qui représente le besoin en fonds propres permettant d'assurer la Solvabilité de l'assureur pendant la durée de la projection. Le BGS tient compte du profil de risque, de l'appétence aux risques et de la stratégie de la compagnie. Son évaluation se fait de manière prospective selon un éventail large de scénarios. La détermination du BGS comprend une évaluation des moyens à mettre en oeuvre pour faire face aux risques importants auxquels l'assureur est exposé. Dans le retour sur expérience sur le rapport ORSA de l'Institut des Actuaire, une des définitions proposées du BGS est un SCR ajusté aux risques de l'entreprise et complété des risques non pris en compte dans le SCR. Le BGS se veut donc plus fin et plus adapté à l'entreprise que le SCR. Il est possible que l'assureur ne dispose pas de fonds propres suffisant pour couvrir le BGS : dans ce cas, il devra expliquer quelles actions il compte mettre en oeuvre pour le couvrir, en particulier dans les situations de crises.
- Le respect permanent des exigences en capital sur un horizon supérieur au plan d'activité de l'entreprise. Cette évaluation intègre les changements importants potentiels du profil de risque et la qualité des fonds propres. Les organismes doivent étudier l'impact de scénarios extrêmes tels que la hausse de l'inflation pour les rentes, un renouvellement du pire évènement subi...
- La mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le SCR. Cette évaluation vise vérifier que le SCR reflète bien tous les risques quantifiables et importants auxquels la compagnie est exposée. Il faut aussi vérifier que la calibration du SCR tout comme la dépendance entre les sous-modules sont conformes à la réalité de l'entreprise.

Dans l'ORSA, l'entreprise doit justifier de la pertinence des méthodes utilisées.

1.3 Contexte et aperçu de la société d'étude

Au 31.12.2021, la société de réassurance (nommée AssuRisk dans la suite de notre étude) accepte les affaires suivantes :

- Affaires non proportionnelles climatiques (sujet de l'étude) souscrites par deux entités (respectivement entité 1 et entité 2). L'entité 1 est une société d'assurance de biens et l'entité 2 est une société d'assurance spécialisée en prévoyance-santé. Le risque d'assurance relatif à ces affaires est conservé par AssuRisk.
- Affaires proportionnelles Santé (frais médicaux) souscrites par une société d'assurance santé.
- Autres traités rétrocédés.

1.3.1 Principes généraux du calcul de Best-Estimate des passifs

Pour l'ensemble des évaluations, le degré de précision doit rester proportionnel à la matérialité des risques. Pour les paramètres nécessitant un jugement d'expert ou pour lesquels la sensibilité à la méthodologie choisie est significative, une approche prudente est privilégiée.

Le calcul du Best-Estimate du passif nécessite de déterminer les éléments suivants :

- Best Estimate des sinistres déjà survenus.
- Détermination de l'horizon pour la prise en compte des primes futures.
- Détermination du Best-Estimate (BE) relatif à ces primes futures.

1.3.2 Best Estimate des passifs des affaires non proportionnelles

Les traités non-proportionnels climatiques de réassurance souscrits respectivement par les entités 1 et 2 ont pour but de les protéger de températures extrêmes :

- Un traité non proportionnel indiciel sur température souscrit par l'entité 1 visant à la protéger du risque de gel et d'incendies (essentiellement liés à l'utilisation du chauffage électrique) qui aggraverait la sinistralité de leur portefeuille.
- Un traité non proportionnel indiciel sur température souscrit par l'entité 2 visant à la protéger contre l'aggravation des frais médicaux en période de canicule ou grand froid.

1.4 Introduction au fonctionnement du traité non-proportionnel climatique

1.4.1 Origine de ce type de traité

Les dérivés climatiques sont des instruments financiers qui permettent aux entreprises de se protéger contre les risques liés aux conditions météorologiques, tels que les températures, les précipitations ou les événements climatiques extrêmes.

Les travaux de Moreno et Wieland[3] ont notamment porté sur l'utilisation des dérivés climatiques[4] comme les options de vente dans le secteur de l'énergie. Ils ont montré que les dérivés climatiques peuvent être utilisés pour gérer les risques liés à la production d'énergie éolienne et solaire, en permettant aux entreprises de se protéger contre les variations de la production d'énergie liées aux conditions météorologiques.

Depuis 1995 et la première couverture d'assurance contre les risques liés au changement climatique par SwissRe, les entreprises d'assurance cherchent, de la même manière, à se protéger contre ce type de risque non-négligeable qui viendrait dégrader leurs prévisions. La naissance de ce type de contrat vient répondre à ce besoin.

1.4.2 Fonctionnement du traité

Le traité mis en place est une couverture non-proportionnelle en Aggregate Annuel⁵ afin de couvrir la sur-sinistralité due à des vagues de froid/canicules.

5. Type de contrat de réassurance qui est généralement utilisé pour couvrir les risques liés aux sinistres de fréquence élevée mais de faible ampleur.

Dans les faits, il repose sur un calcul d'un indice annuel relevant d'un écart journalier entre les températures maximales (resp. minimales) et les limites maximales (resp. minimales). Ce calcul est réalisé sur 10 villes réparties en France métropolitaine pour représenter au mieux l'ensemble des températures à prendre en compte.

Nous utilisons les données météorologiques journalières fournies par Météo France sur les 10 stations différentes utilisées dans le traité que sont Bordeaux, Lille, Lyon, Marseille, Montpellier, Nantes, Paris, Perpignan, Strasbourg, Toulouse. Dans le cadre de l'étude, nous travaillerons avec un historique de températures depuis 2003. Un tel historique est largement auto-suffisant pour notre modélisation abordée en Chapitre 2 et évite aussi les dérives climatiques à long terme.

Chaque ville est associée une pondération qui traduit la proportion d'assurés du portefeuille de chacune des entités dans la zone qui l'entoure. Chaque ville possède ses propres limites de température minimale et maximale, traduisant la situation géographique de chacune. Les différents seuils et poids de chaque ville sont explicités dans les termes du traité, respectivement pour les entités 1 et 2.

Station	Numéro de la station	Nom de la station météorologique	Température Seuil		Pondération
			Mini	Maxi	
1	33281001	BORDEAUX-MERIGNAC	-3	34	4,22 %
2	59343001	LILLE-LESQUIN	-7	32	17,04 %
3	69029001	LYON-BRON	-6	33	15,15 %
4	13054001	MARSEILLE-MARIGNANE	-2	34	12,34 %
5	34154001	MONTPELLIER	-2	35	4,95 %
6	44020001	NANTES-BOUGUENAI	-3	32	4,20 %
7	91027002	ORLY	-7	33	29,18 %
8	66136001	PERPIGNAN	-2	35	2,10 %
9	67124001	STRASBOURG-ENTZHEIM	-7	32	7,47 %
10	31069001	TOULOUSE-BLAGNAC	-3	34	3,35 %

FIGURE 5 – Limites de températures extrêmes et pondération de chaque ville pour le traité 1

Station	Numéro de la station	Nom de la station météorologique	Température Seuil		Pondération corrigée
			Mini	Maxi	
1	33281001	BORDEAUX-MERIGNAC	-3	34	7,83 %
2	59343001	LILLE-LESQUIN	-7	32	13,00 %
3	69029001	LYON-BRON	-6	33	14,13 %
4	13054001	MARSEILLE-MARIGNANE	-1	34	9,37 %
5	34154001	MONTPELLIER	-1	34	4,90 %
6	44020001	NANTES-BOUGUENAI	-4	32	11,77 %
7	91027002	ORLY	-7	33	14,57 %
8	67124001	STRASBOURG-ENTZHEIM	-8	32	14,71 %
9	31069001	TOULOUSE-BLAGNAC	-2	34	2,36 %

FIGURE 6 – Limites de températures extrêmes et pondération de chaque ville pour le traité 2

On définit ainsi un indice annuel (IA) pour les températures maximales (C : chaud) et pour les températures minimales (F : froid)[5] :

$$\begin{aligned} \circ IAC &= \sum_{t=1}^T \max(W_{max}(t) - L_{max}) \\ \circ IAF &= \sum_{t=1}^T \max(L_{min} - W_{min}(t)) \end{aligned}$$

avec $L_{min}, L_{max}, W_{min}(t), W_{max}(t)$ respectivement les limites de températures minimales, maximales et les températures minimales et maximales pour une date t pour une même ville.

Exemple : A titre d'exemple pour la station météorologique d'Orly : si les seules valeurs de températures extrêmes sont 35 et 36 respectivement le 15 Juillet et 15 Août ainsi que -12 et -10 respectivement le 15 décembre et 15 Janvier, nous obtiendrons un indice annuel résultat de : $IA = (35 - 33) + (36 - 33) + (-7 - (-12)) + (-7 - (-10)) = 2 + 3 + 5 + 3 = 13$

Dans le cadre de l'étude, les entités 1 et 2 auront respectivement pour priorité 35 et 50. Le réassureur s'engage à indemniser l'assureur à hauteur d'un montant notionnel (50 000 euros) pour chaque point d'indice dépassant une priorité de 35 pour l'entité 1 et une priorité de 50 pour l'entité 2.

Exemple : Pour un indice annuel à hauteur de 40 , l'assureur s'engage à rembourser une somme de : $Remboursement = (40 - 35) * 50\,000 = 250\,000$ euros.

Le traité a cependant une portée indicelle à hauteur de 60. Ainsi, pour chaque entité, le remboursement maximal atteignable en cas d'année particulièrement extrême est de : $60 * 50\,000 = 3\,000\,000$ euros.

De ce fait on obtient les remboursements suivants :

$$\begin{aligned} \circ Remboursement_1 &= 0.5 * \min(\max(IAC_1 + IAF_1 - Priorite_1, 0), Portee_1) \\ \circ Remboursement_2 &= 0.5 * \min(\max(IAC_2 + IAF_2 - Priorite_2, 0), Portee_2) \end{aligned}$$

En échange de l'ensemble des engagements pris par le réassureur, l'assureur verse une prime à hauteur de 1 M euros pour couvrir chaque entité (soit 2 M en tout).

1.4.3 Enjeu pour l'assureur et application initiale

Au delà de la couverture de risque , il est important pour l'assureur d'estimer annuellement le montant d'indemnisation pour l'année en cours/suivante pour nourrir ses projections de résultat. De plus, une bonne modélisation permet de contre valoriser la tarification d'un tel contrat proposé par le réassureur.

L'objet de l'étude vient répondre à une situation initiale hypothétique qui ne répond pas aux attentes qu'exigeait un tel traité :

- Une modélisation de température mono-ville rapportée à l'ensemble des villes par un indice correctif.
- Un Best Estimate de sinistralité très volatile qui est estimé à 1.5 M d'euros sur l'ensemble des 2 traités par prudence.

- Un scénario "extrême" (probabilité d'une fois tous les 50 ans) peu fiable qui est évalué à 5 M sur l'ensemble des 2 traités par prudence.
- Un historique de sinistralité réelle qui ne semble pas correspondre aux attentes.

L'objectif est d'apporter des éléments de réponse à cette situation initiale. Le Chapitre 2 se concentrera sur le modèle de température. Une juste modélisation permettra de mieux appréhender certaines projections d'indemnisation.

Chapitre 2

Étude du modèle de température et premières applications

Le chapitre 2 se concentrera sur la modélisation des températures simulés (2.1) à travers l'utilisation d'un processus stochastique avec "retour à la moyenne" et bruit brownien (2.2). Ce bruit sera adapté pour répondre à nos attentes de modélisations (2.3). Enfin, les résultats obtenus nous amèneront à contraindre le modèle (2.4).

2.1 Modèle de températures

Le but de ce chapitre est de modéliser de la façon la plus logique, la plus complète et la plus compréhensible une année de températures maximales et minimales pour chacune des villes. Pour ce faire, nous nous concentrerons sur un modèle stochastique de Monte-Carlo[6] avec un mouvement de retour à la moyenne mobile accompagné d'une erreur en mouvement brownien.

L'enjeu de cette modélisation est multiple :

- Respecter au mieux la saisonnalité des températures annuelles et toutes les caractéristiques d'une évolution de température homogène au niveau métropolitain.
- Mettre en place un modèle qui simule des températures extrêmes cohérentes par rapport aux données d'entraînement fournies.
- Utiliser un processus stochastique⁶ dont le comportement reste abordable pour mieux appréhender les futurs résultats obtenus ainsi que leurs causes.

Deux autres méthodes ont été envisagées dans le cadre de l'étude. Mais elles ont été écartées pour les raisons qui suivent :

- Méthode de la sélection systématique : consiste à sélectionner un élément aléatoire du jeu de donnée puis à sélectionner les éléments suivants selon un intervalle prédéfini. Cette méthode a pour principaux défauts de ne pas répliquer un comportement plausible de température et d'annihiler toute existence de nouveaux extremums jamais atteints historiquement.
- Réseau de neurones : modèle mathématique composé de plusieurs neurones artificiels inter connectés qui permettent de traiter des entrées, de prendre des décisions et de produire des sorties. Le principal défaut de cette méthode est l'effet "boîte noire" qui compliquerait l'analyse de résultat.
- Théorie des valeurs extrêmes : se concentre sur l'analyse des queues de distribution. Elle aurait pu être adaptée si nous voulions seulement modéliser des indemnités.

La suite du chapitre se concentrera donc sur l'étude du processus stochastique.

2.1.1 Moyenne Mobile

Le premier objectif est de traduire mathématiquement la saisonnalité des températures maximales et minimales. Pour cela , nous utiliserons des composantes en sinus et cosinus à la manière des séries de Fourier.

Notre modélisation s'applique à l'ensemble des villes qui quadrillent la France Métropolitaine. Les comportements de températures n'étant pas tous similaires entre villes , nous n'appliquerons pas de troncature de séries de Fourier qui n'utilise que des composantes paires pour les sinus et/ou cosinus.

6. Modèle mathématique qui décrit l'évolution d'une variable aléatoire au fil du temps

On retrouve ici un exemple des températures maximales/minimales journalières pour l'année 2021 pour la ville de Bordeaux.

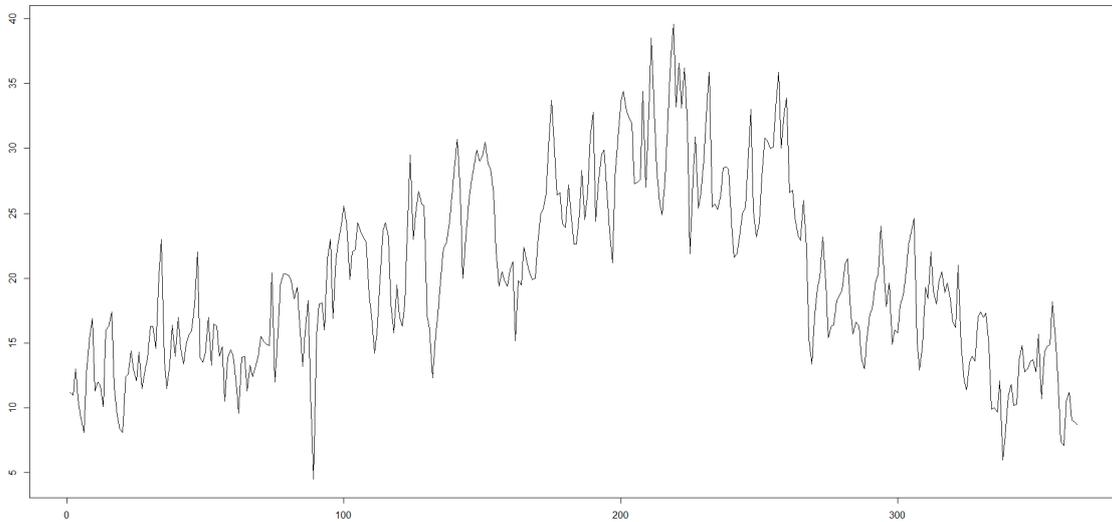


FIGURE 7 – Températures maximales journalières sur l'année 2021 à Bordeaux

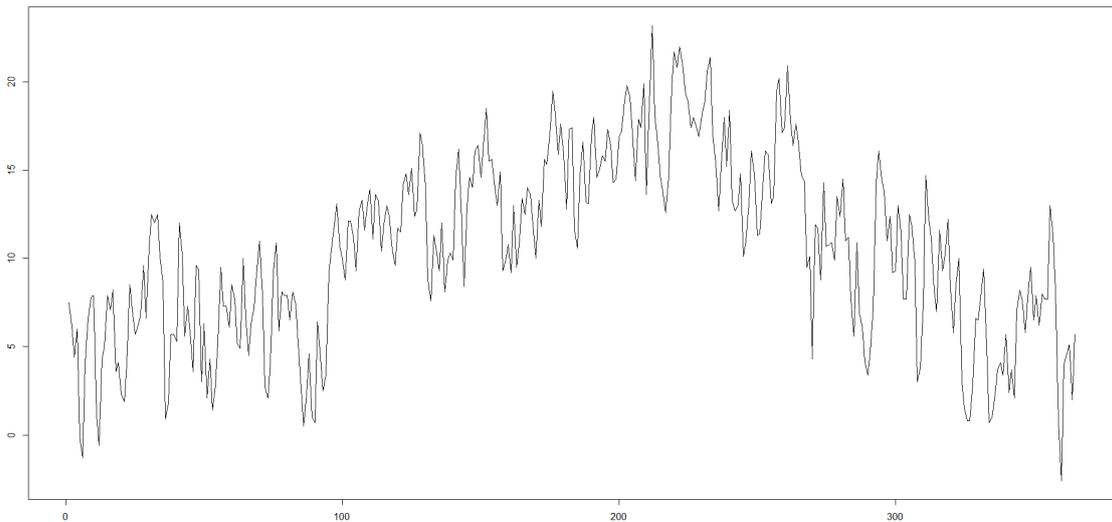


FIGURE 8 – Températures minimales journalières sur l'année 2021 à Bordeaux

Dans un objectif de gain de temps au niveau du processus , nous nous restreindrons à un seuil de 14 (largement suffisant) pour les composantes en sinus/cosinus. On obtient ainsi :

$$\hat{\mu}_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \sum_{i=1}^{13} \gamma_{2i} \cos\left(\frac{(i+1) * \pi * t}{365}\right) + \sum_{i=1}^{13} \gamma_{2i+1} \sin\left(\frac{(i+1) * \pi * t}{365}\right)$$

Ici γ_0 est une constante, γ_1 est un paramètre de progression linéaire des températures dans le temps. Cette dernière composante est négligeable pour l'ensemble des villes. On ne constate pas d'évolution moyenne à la hausse ou à la baisse des températures en France métropolitaine. Notre objectif étant de simuler l'année qui suit notre série d'entraînement, le facteur γ_1 sera nul pour l'ensemble des villes.

Cette observation est évidemment propre au jeu de données utilisé et est à questionner en cas de modification de ce même jeu de données.

$\hat{\mu}_t$ remplit ses objectifs de saisonnalité nécessaire à la modélisation. Cette saisonnalité est régulière pour l'ensemble des villes (comme illustré ci-dessous par la ville de Bordeaux).

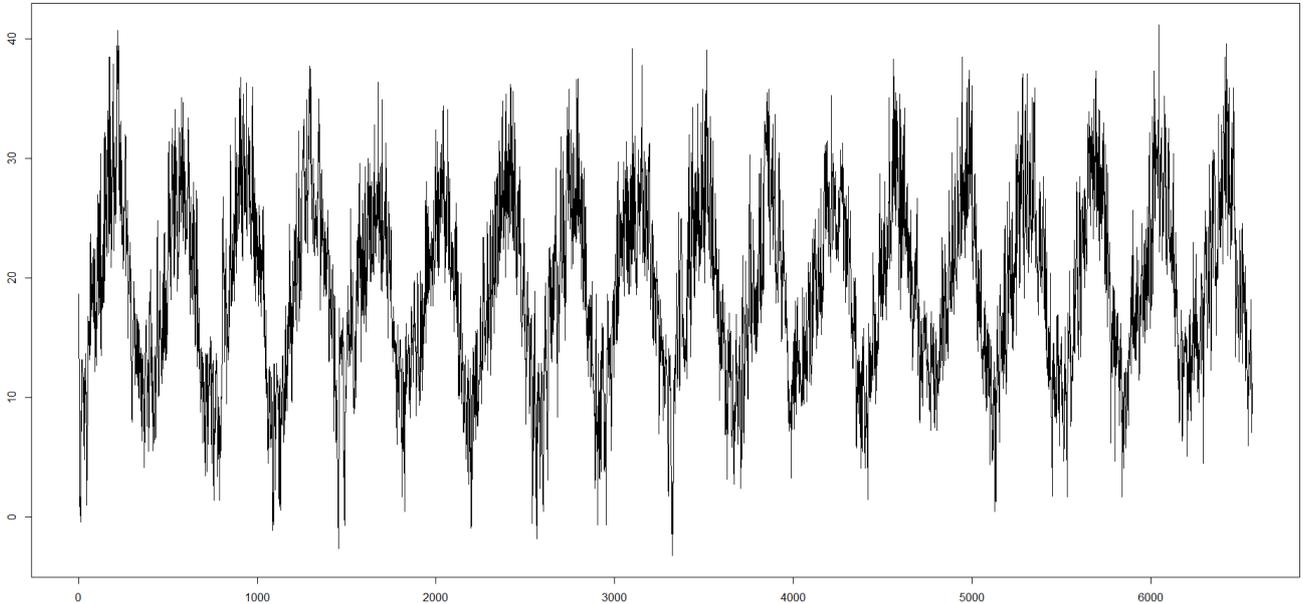


FIGURE 9 – Températures maximales journalières à Bordeaux

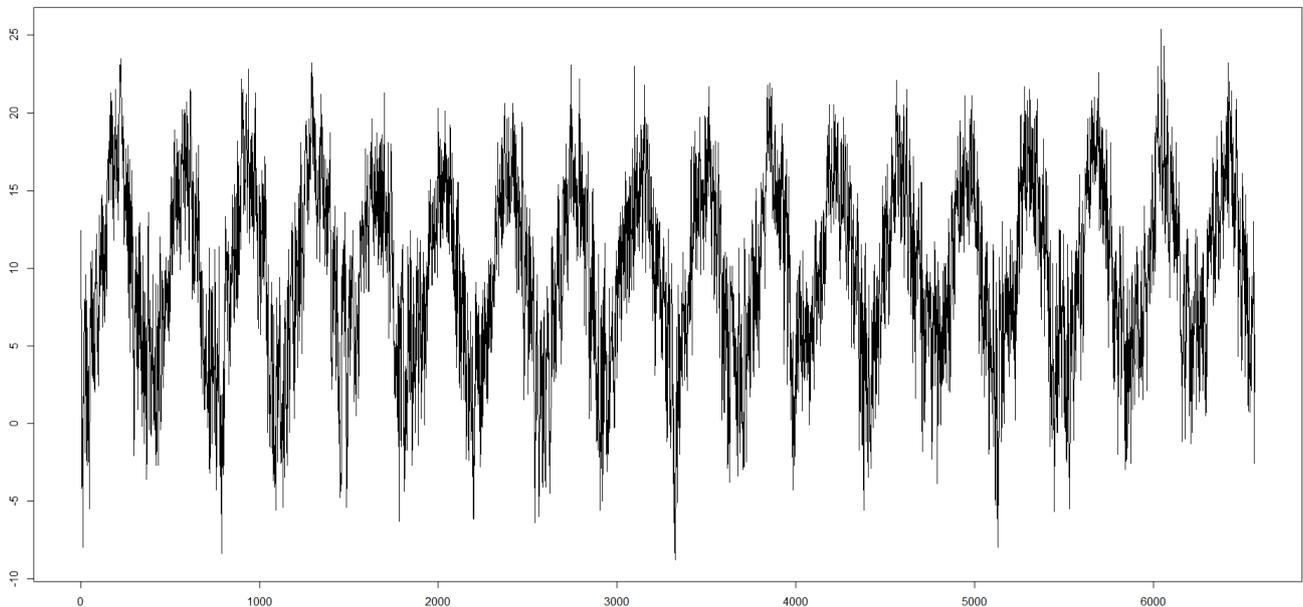


FIGURE 10 – Températures minimales journalières à Bordeaux

Après application d'une régression linéaire multiple en utilisant la méthode des moindres carrés, on estime les différents γ_i de notre moyenne mobile. Les résultats obtenus en calibrant notre moyenne mobile sur l'ensemble des températures en notre possession n'est pas concluant. Le jeu d'entraînement

représentait un nuage de point non optimal pour calibrer une telle moyenne mobile selon nos objectifs. On retiendra une calibration sur la moyenne journalière maximales/minimales qui donne une statistique R^2 satisfaisante respectivement 0.71 et 0.65(Voir Figure 46,47,48 et 49 en Annexes).

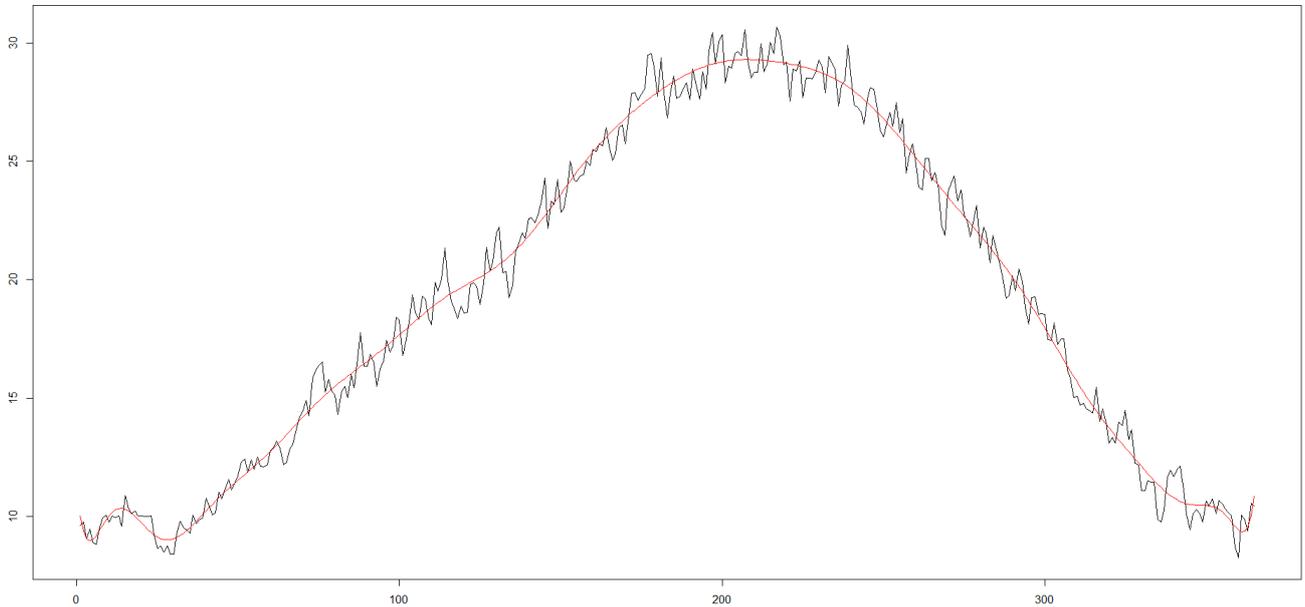


FIGURE 11 – Moyenne Mobile C (Rouge) et Moyenne des températures maximales journalières pour Bordeaux

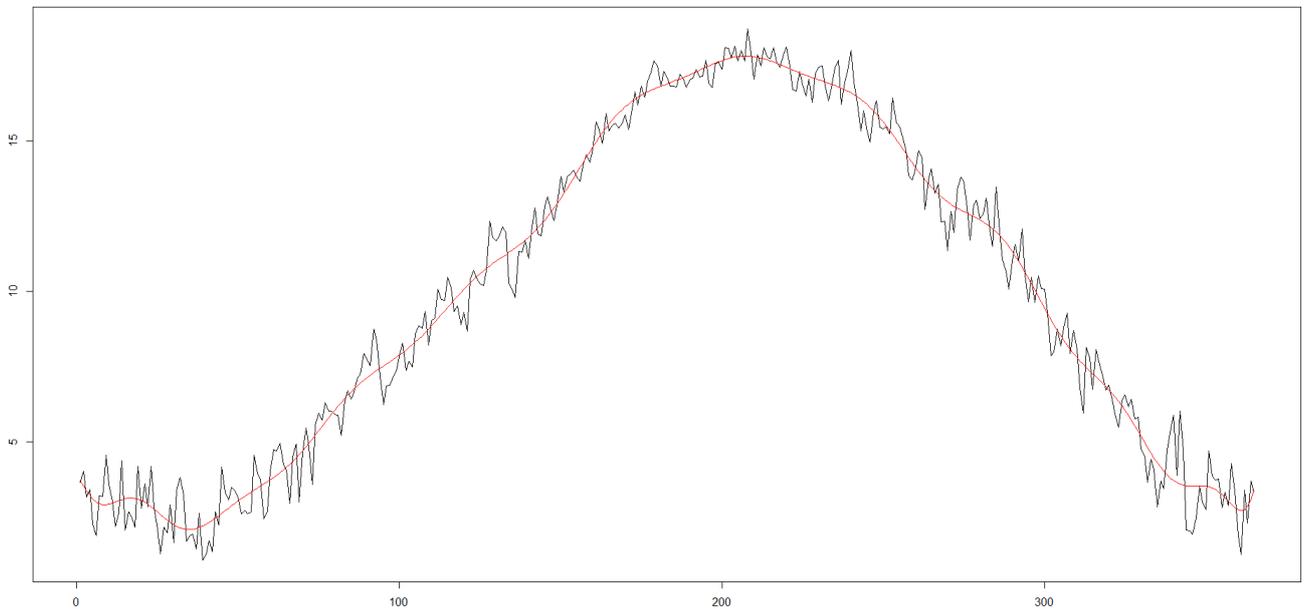


FIGURE 12 – Moyenne Mobile F (Rouge) et Moyenne des températures minimales journalières pour Bordeaux

L'illustration présentée (Figure 11 et 12) permet de vérifier visuellement la cohérence des moyennes mobiles modélisées. Pour l'ensemble des villes, les moyennes mobiles respectives pour les températures

minimales/maximales traduisent correctement les tendances de température.

À partir de cette moyenne mobile et si nous utilisons un modèle plus simple qui utilise des erreurs Browniennes, nous pourrions écrire l'équation stochastique différentielle suivante :

$$dW_t = \hat{\mu}_t dt + \sigma dB_t \quad (3)$$

où σ est l'écart-type standard entre les températures historiques, et (B_t) est un simple mouvement Brownien. (B_t) est un processus stochastique tel que $B_0 = 0$ et $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, s - t)$ et indépendant $\forall 0 \leq s \leq t$.

Ce processus ne permet malheureusement pas d'inclure la dépendance entre deux jours consécutifs. Nous verrons la construction de ce modèle dans la partie qui suit.

2.1.2 Processus de "retour à la moyenne" avec erreur brownienne

Tout l'intérêt de ce processus stochastique est d'introduire une dépendance de température entre deux jours consécutifs (plus réaliste) mais aussi d'autoriser aux températures d'être influencées par des Browniens extrêmes.

Ce processus est caractérisé cette équation différentielle stochastique :

$$dW_t = k(\mu_t - W_t)dt + \sigma dB_t \quad (4)$$

avec, comme auparavant, μ_t la moyenne journalière des températures min/max et σ l'écart-type standard entre les températures consécutives minimales (resp. maximales) historiques. La nouvelle composante $k \geq 0$ détermine la vitesse de retour à la moyenne. Pour estimer cette vitesse, on se réfère aux travaux de Bibby et Soerensen[7] qui ont approfondi leurs recherches sur les martingales appliquées aux processus discrets de diffusion. En suivant leur méthode, un estimateur efficace \hat{k} pour k est obtenu en résolvant cette équation :

$$\frac{\frac{d}{dk} k(\mu_{t-1} - W_{t-1})}{\sigma^2} (W_t - \mathbb{E}[W_t|W_{t-1}]) = 0 \quad (5)$$

En utilisant la théorie des martingales sur l'équation stochastique différentielle (4), on obtient :

$$\mathbb{E}[W_t|W_{t-1}] = (W_{t-1} - \mu_{t-1})e^{-k} + \mu_t \quad (6)$$

Ainsi l'équation (5) peut évoluer :

$$\frac{\mu_{t-1} - W_{t-1}}{\sigma^2} (W_t - (W_{t-1} - \mu_{t-1})e^{-k} - \mu_t) = 0 \quad (7)$$

qui a une unique solution :

$$\hat{k} = \log\left(\frac{\sum_{t=1}^T \frac{\mu_{t-1} - W_{t-1}}{\sigma^2} (\mu_t - W_T)}{\sum_{t=1}^T -\frac{(\mu_{t-1} - W_{t-1})^2}{\sigma^2}}\right) \quad (8)$$

En utilisant ce résultat , on obtient ces différentes vitesses de retour à la moyenne :

Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
0.3395276	0.3280557	0.294845	0.3447662	0.5042513	0.2849841	0.3011079	0.5384151	0.37013	0.3589838

FIGURE 13 – Vitesse de retour à la moyenne pour les températures maximales et pour chacune des villes

Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
0.4016074	0.5045056	0.6548546	0.6300035	0.6090839	0.4733695	0.4088715	0.6400059	0.5791355	0.5218346

FIGURE 14 – Vitesse de retour à la moyenne pour les températures minimales et pour chacune des villes

Les vitesses de retour à la moyenne pour les températures maximales sont en moyenne plus faible que celles pour les températures minimales. Les températures maximales auront tendance à plus facilement s'écartier de leurs moyennes mobiles modélisées, ce qui traduit une plus forte volatilité.

Suite au calcul de notre estimateur de vitesse, nous retournons à notre équation (4) mais cette fois de façon discrétisée comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (rappelant les modèles de taux) :

$$W_{t+1} = W_t + \hat{k}(\hat{\mu}_{t+1} - W_t) + \hat{\sigma}(B_{t+1} - B_t) \quad (9)$$

où $W_1 = \hat{\mu}_1$, $B_{t+1} - B_t \sim \mathbb{N}(0, 1)$ et $\hat{\sigma}$ écart type standard entre les températures minimales (resp. maximales) consécutives .

Les browniens simulés, étudiés par la suite, ont une importance capitale quant à la volatilité et la cohérence de la modélisation.

2.2 Browniens simulés

Tel qu'énoncé dans le corps principal du processus : $B_{t+1} - B_t \sim \mathbb{N}(0, 1)$. Cependant, appliquer des simulations de lois normales indépendantes inhièrerait toute dépendance entre villes. En effet , du fait de leur situation géographique, les températures des différentes villes à l'étude sont amenées à se comporter de façon similaire.

2.2.1 Corrélation des browniens

On introduit les résidus historiques (Rh) à partir de l'équation (9) et des températures historiques (Th) pour obtenir :

$$Rh_{t+1} = \frac{W_{t+1} - W_t - \hat{k}(\hat{\mu}_{t+1} - Th_t)}{\hat{\sigma}} \quad (10)$$

Après construction de ces résidus pour les températures min/max historiques de chaque ville, nous pouvons établir ces deux matrices de corrélations multi-ville des résidus respectivement pour les températures min/max :

	Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
Bordeaux	1.0000000	0.37797087	0.4574260	0.3026709	0.19514009	0.6086270	0.4883448	0.2964711	0.3220468	0.7028388
Lille	0.3779709	1.0000000	0.3869237	0.2123424	0.07779225	0.4127789	0.7383196	0.1807283	0.4651621	0.3249038
Lyon	0.4574260	0.38692373	1.0000000	0.5069990	0.22442583	0.3208875	0.4587751	0.3687105	0.6024669	0.5479986
Marseille	0.3026709	0.21234237	0.5069990	1.0000000	0.58212864	0.2121029	0.2612689	0.5146631	0.3517867	0.4055235
Montpellier	0.1951401	0.07779225	0.2244258	0.5821286	1.0000000	0.1562250	0.1165352	0.6002860	0.1382101	0.2713856
Nantes	0.6086270	0.41277886	0.3208875	0.2121029	0.15622498	1.0000000	0.5409518	0.1692774	0.2682483	0.4114402
Paris	0.4883448	0.73831960	0.4587751	0.2612689	0.11653516	0.5409518	1.0000000	0.2077217	0.4800930	0.4018761
Perpignan	0.2964711	0.18072831	0.3687105	0.5146631	0.60028601	0.1692774	0.2077217	1.0000000	0.2711300	0.4669010
Strasbourg	0.3220468	0.46516210	0.6024669	0.3517867	0.13821009	0.2682483	0.4800930	0.2711300	1.0000000	0.3434204
Toulouse	0.7028388	0.32490381	0.5479986	0.4055235	0.27138564	0.4114402	0.4018761	0.4669010	0.3434204	1.0000000

FIGURE 15 – Matrice de corrélation entre résidus pour les températures maximales

	Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
Bordeaux	1.0000000	0.3344017	0.4420394	0.3253160	0.3885339	0.5909114	0.4628707	0.3347245	0.2761166	0.6721570
Lille	0.3344017	1.0000000	0.3447303	0.1799645	0.2082558	0.4936806	0.7367356	0.1694803	0.4213269	0.2647742
Lyon	0.4420394	0.3447303	1.0000000	0.6102818	0.6642721	0.3217056	0.4036493	0.5175748	0.5790379	0.5799348
Marseille	0.3253160	0.1799645	0.6102818	1.0000000	0.7653433	0.1831124	0.2075755	0.5141220	0.3597086	0.5201745
Montpellier	0.3885339	0.2082558	0.6642721	0.7653433	1.0000000	0.2202582	0.2560258	0.6118860	0.3784039	0.6008161
Nantes	0.5909114	0.4936806	0.3217056	0.1831124	0.2202582	1.0000000	0.6316658	0.2017566	0.2665567	0.3885284
Paris	0.4628707	0.7367356	0.4036493	0.2075755	0.2560258	0.6316658	1.0000000	0.2200439	0.4317638	0.3462200
Perpignan	0.3347245	0.1694803	0.5175748	0.5141220	0.6118860	0.2017566	0.2200439	1.0000000	0.3013181	0.6065917
Strasbourg	0.2761166	0.4213269	0.5790379	0.3597086	0.3784039	0.2665567	0.4317638	0.3013181	1.0000000	0.3099457
Toulouse	0.6721570	0.2647742	0.5799348	0.5201745	0.6008161	0.3885284	0.3462200	0.6065917	0.3099457	1.0000000

FIGURE 16 – Matrice de corrélation entre résidus pour les températures minimales

On remarque qu'il n'y a aucune corrélation négative entre ville, ce qui témoigne d'une homogénéité de l'évolution des températures au niveau métropolitain. Les corrélations importantes Lille/Paris et Toulouse/Bordeaux ne sont pas étonnantes du fait de leurs proximités géographiques.

2.2.2 Normalité des résidus

D'après la théorie, les résidus $(B_{t+1} - B_t)$ obtenus suivent une loi normale $\mathbb{N}(0, 1)$. Il est essentiel de le vérifier et d'en adapter les caractéristiques si tel n'est pas le cas.

Le test de normalité Shapiro-Wilk appliqué aux résidus (Rh) ne s'est pas révélé concluant. Cependant, les QQPlots⁷ illustrés ci-après nous confortent sur la pseudo-normalité des résidus (Rh) .

7. Un Quantile-Quantile plot est un type de graphique qui permet de visualiser la similitude entre deux distributions en comparant leurs quantiles.

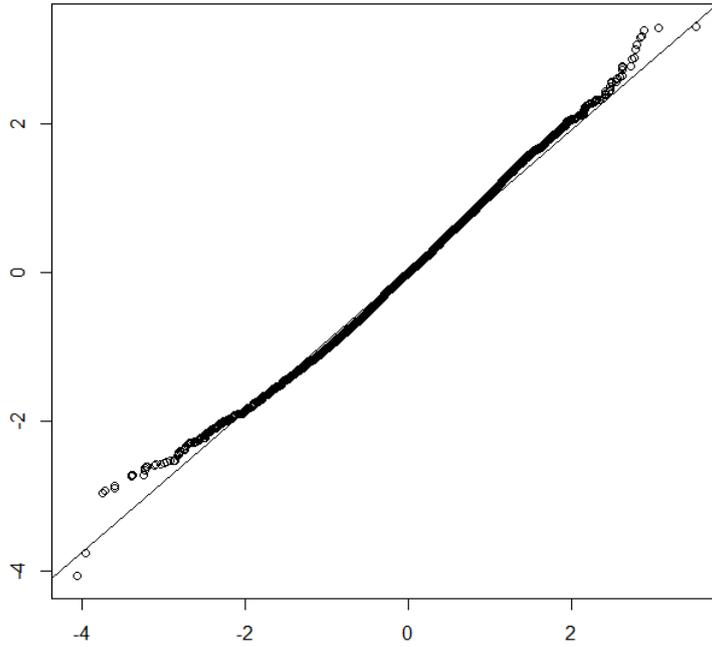


FIGURE 17 – Q-QPlot des résidus historiques (max) de Bordeaux par rapport à une loi normale de mêmes caractéristiques

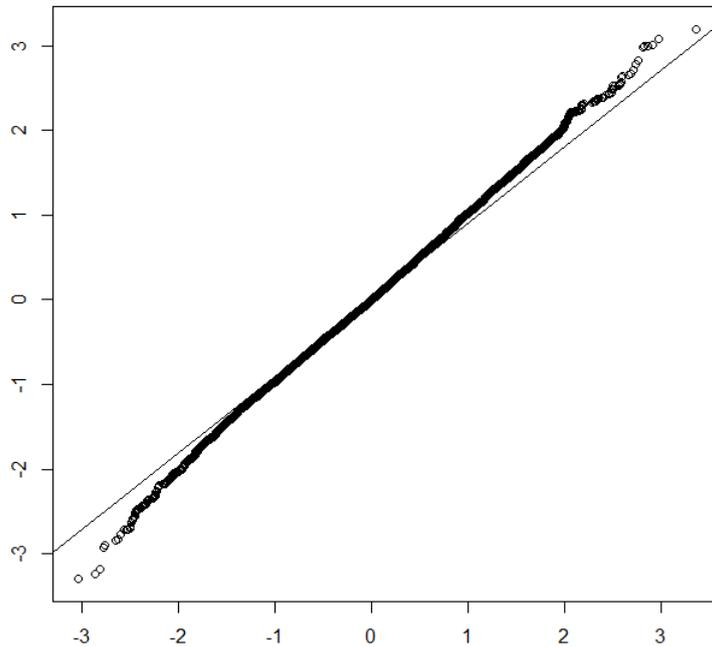


FIGURE 18 – Q-QPlot des résidus historiques (min) de Bordeaux par rapport à une loi normale de mêmes caractéristiques

Ce constat nous amène à affirmer que les résidus (Rh) suivent une loi normale.

Dans les faits, les résidus obtenus suivent des normales centrées mais pas réduites. Leurs variances naviguent entre 0.88 et 0.96 (comme illustrés ci-dessous).

Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
0.9156182	0.9300415	0.9295524	0.9253778	0.9124494	0.9276445	0.9302822	0.9106347	0.9412299	0.9104789

FIGURE 19 – Variance des résidus pour les températures maximales

Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
0.9082902	0.9230937	0.9528372	0.930971	0.9173012	0.9023572	0.9056725	0.8850496	0.9283737	0.9144608

FIGURE 20 – Variance des résidus pour les températures minimales

Après avoir générer nos moyennes mobiles et vérifier la normalité des résidus, nous pouvons désormais appliquer notre processus sur 5 000 simulations de l'année suivante et en interpréter les résultats.

2.2.3 Résultats et interprétations

Les résultats obtenus par une telle modélisation ne se relèvent pas convaincant. Toutes les prévisions d'indemnisation se trouvent faibles voir nulles. En cause, le comportement même du processus.

En effet, les estimateurs $\hat{\sigma}$ d'écart-type standard pour chacune des villes sont évalués entre 2.5 et 3.5 comme illustrés ci-dessous.

Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
3.271105	2.862162	3.307199	2.360272	2.63354	2.65806	2.919086	2.935735	3.307484	3.360231

FIGURE 21 – Variance des résidus pour les températures maximales

Bordeaux	Lille	Lyon	Marseille	Montpellier	Nantes	Paris	Perpignan	Strasbourg	Toulouse
2.941727	2.802011	3.067741	2.929986	2.955235	3.1176	3.002494	2.999683	3.086104	3.02093

FIGURE 22 – Variance des résidus pour les températures minimales

Cet estimateur induit une volatilité assez forte pour chaque résidu généré. Nous rappelons que dans le cas d'une loi normale centrée réduite, au moins 0.2% des browniens générés ont une valeur absolue supérieur à 3.

Ainsi, dans l'un des cas les plus extrêmes (exemple de Bordeaux pour les températures maximales), le résidu généré se calcule comme le produit $3.27 * 3 \approx 10$. C'est pourquoi la température simulée W_{t+1} peut s'écarter de 10 degrés par rapport à la température W_t en supposant que celle-ci se trouve au niveau de la moyenne mobile.

Dans ce cas, la vitesse de retour à la moyenne (0.34 pour Bordeaux), induit une correction de $0.34 * 10 \approx 3.5$ degrés pour la température W_{t+2} qui tend la température à s'approcher de sa moyenne mobile. Dans un tel processus, des périodes anormales par rapport aux températures de saison sont annihilées. Il en devient impossible de traduire des possibles passages de dépression ou anticyclone.

De plus, l'indice construit ne peut être nourri que part des températures extrêmes assez isolés qui ne permettent pas de représenter de manière vraisemblable le comportement historique des températures et de ses extrêmes.

Nous allons ainsi introduire une solution pour faire apparaître ces tendances : les ponts browniens.

2.3 Pont Brownien Standard

Nous rappelons que notre objectif est d'introduire des tendances de températures qui seraient plus vraisemblables par rapport à notre jeu de données historiques.

Le pont brownien standard est aussi appelé "mouvement brownien attaché" pour ses qualités de continuité. Le principe de sa construction est d'établir un chemin entre un point de départ de même ordonné que son point d'arrivée.

Notons notre brownien issu du k ème jour de simulation $B_k = \sum_{i=1}^k (B_i - B_{i-1})$

avec $B_i - B_{i-1}$ résidu i simulé et $B_0 = 0$.

A partir de cette définition, nous pouvons construire notre pont standard B'_t :

$B'_t = B_t - \frac{t}{365} B_{365}$ que nous adaptons aux caractéristiques de moyenne et de variance de notre brownien source. Nos résidus simulés finaux seront ainsi notés B''_t .

Nous pouvons ainsi utiliser notre nouveau processus :

$$W_{t+1} = W_t + \hat{k}(\hat{\mu}_{t+1} - W_t) + \hat{\sigma} B''_{t+1} \quad (11)$$

Voici deux exemples de ponts browniens avec et sans retraitement :

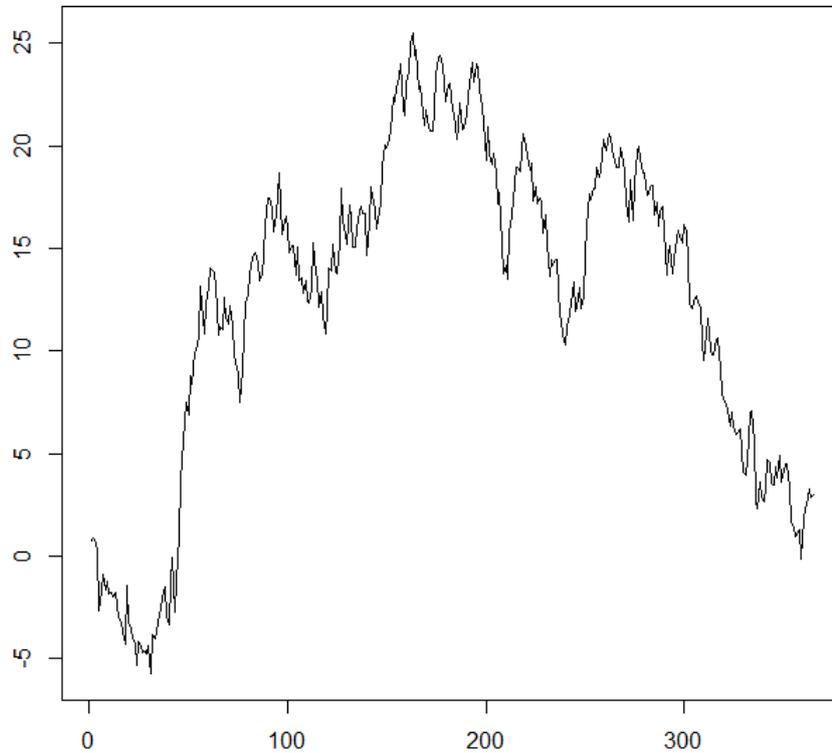


FIGURE 23 – Exemple de pont brownien non-retraité

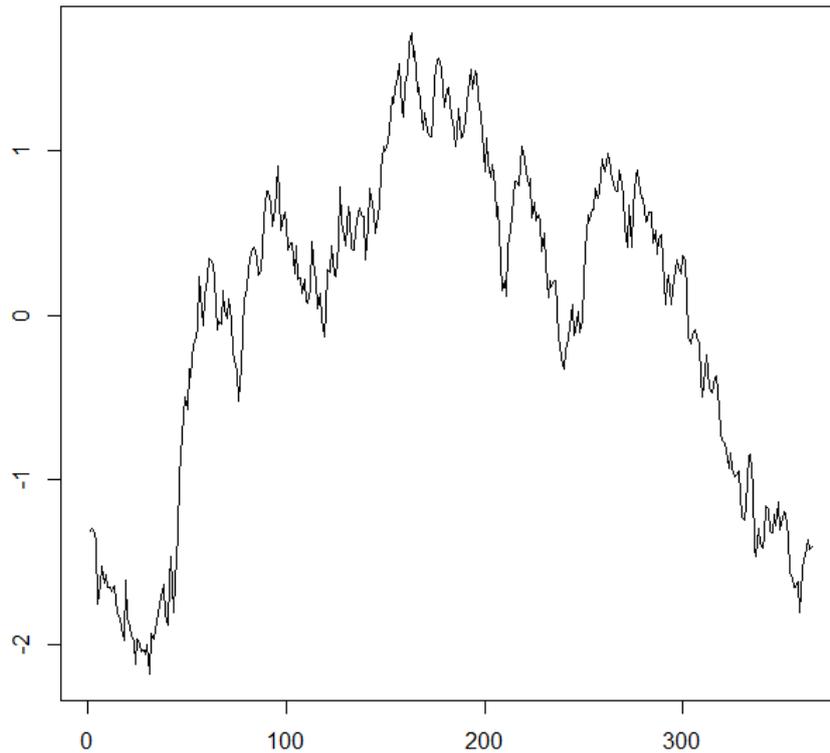


FIGURE 24 – Exemple de pont brownien retraité

Comme on peut le constater sur cet exemple, du fait de sa construction, pour une même volatilité imposée entre browniens standard initiaux et pont brownien retraité, le pont brownien aura des valeurs ponctuelles moins extrêmes mais il saura créer des tendances de périodes "froides" (jours 1-70 / jours 300-365) et de périodes "chaudes" (jours 130-250).

2.3.1 Résultats et ré-adaptation

Les résultats obtenus sur les simulations de températures sont meilleures qu'avec l'utilisation des browniens standard. Cependant, malgré une volatilité de température supérieure à celle historique (qui pourrait se traduire par une vision prudente), les quantiles de températures extrêmes simulés n'atteignent pas ceux historiques.

Ce constat nous amène à utiliser l'approche développée par la suite.

2.4 Quantiles de températures extrêmes contraints

Comme déjà mentionné, il est capital que le modèle de température utilisé prenne en compte l'importance des valeurs extrêmes tout en préservant la cohérence d'une évolution de température.

Ainsi nous sommes amenés à contraindre le modèle tout en préservant une partie de sa liberté. En effet, il s'agit de simuler des températures cohérentes avec l'historique tout en gardant la liberté d'obtenir de nouveaux extremums. Pour ce faire, nous adaptons la volatilité du pont brownien pour arriver aux quantiles cibles.

Après étude, le quantile 99,9% est l'un des plus contraignants mais demeure très convaincant en terme de résultats. Sur nos 18 années d'historique de températures, il représente 7 températures particulièrement extrêmes pour chacune des villes, soit une moyenne d'une valeur extrême sur 3 années. Sur l'ensemble de nos simulations (5 000 * 365), il représente 1825 valeurs.

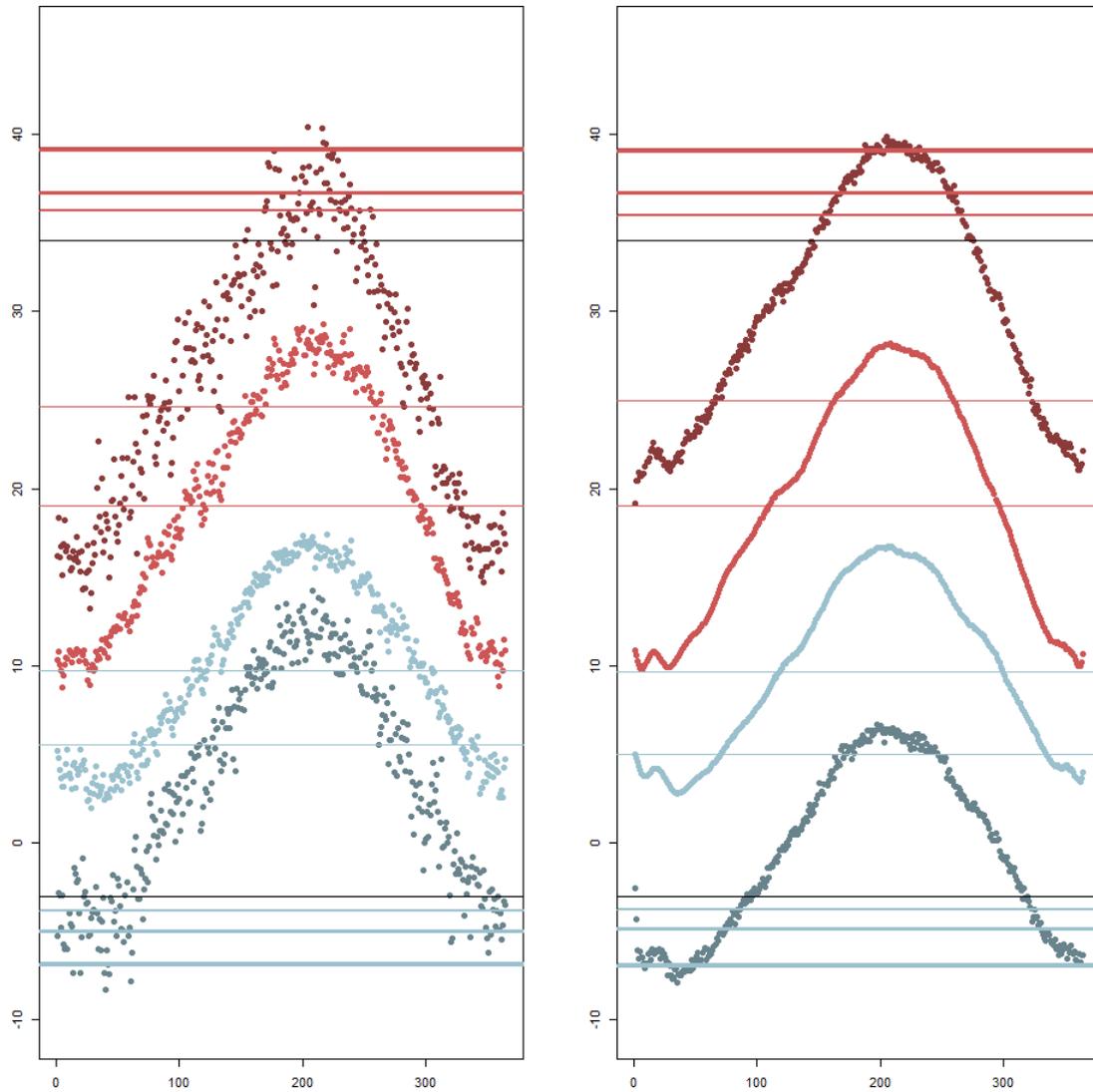


FIGURE 25 – Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantile 99.9% pour la ville de Bordeaux

Précisions concernant la figure 25 :

- Points rouges clairs et foncés : Respectivement moyenne des températures maximales journalières et quantile 99.5% journalier.
- Points bleus clairs et foncés : moyenne des températures minimales journalières et quantile 99.5% journalier.
- Traits horizontaux noirs : Bornes du traité.
- Traits horizontaux rouges (du plus clair au plus foncé) : Respectivement moyenne, quantile 75%, quantile 99%, quantile 99.5%, quantile 99.9% pour les températures maximales.
- Traits horizontaux bleus (du plus clair au plus foncé) : Respectivement moyenne, quantile 75%, quantile 99%, quantile 99.5%, quantile 99.9% pour les températures minimales.

La principale observation à noter est la différence de comportement entre les extrêmes journaliers des températures minimales et maximales. Le modèle demande plus de volatilité pour les températures minimales (points bleus foncés), ce qui induit des quantiles 99.5% journaliers simulés plus faibles que ceux historiques. On peut aussi observer ce phénomène par la biais de l'illustration suivante.

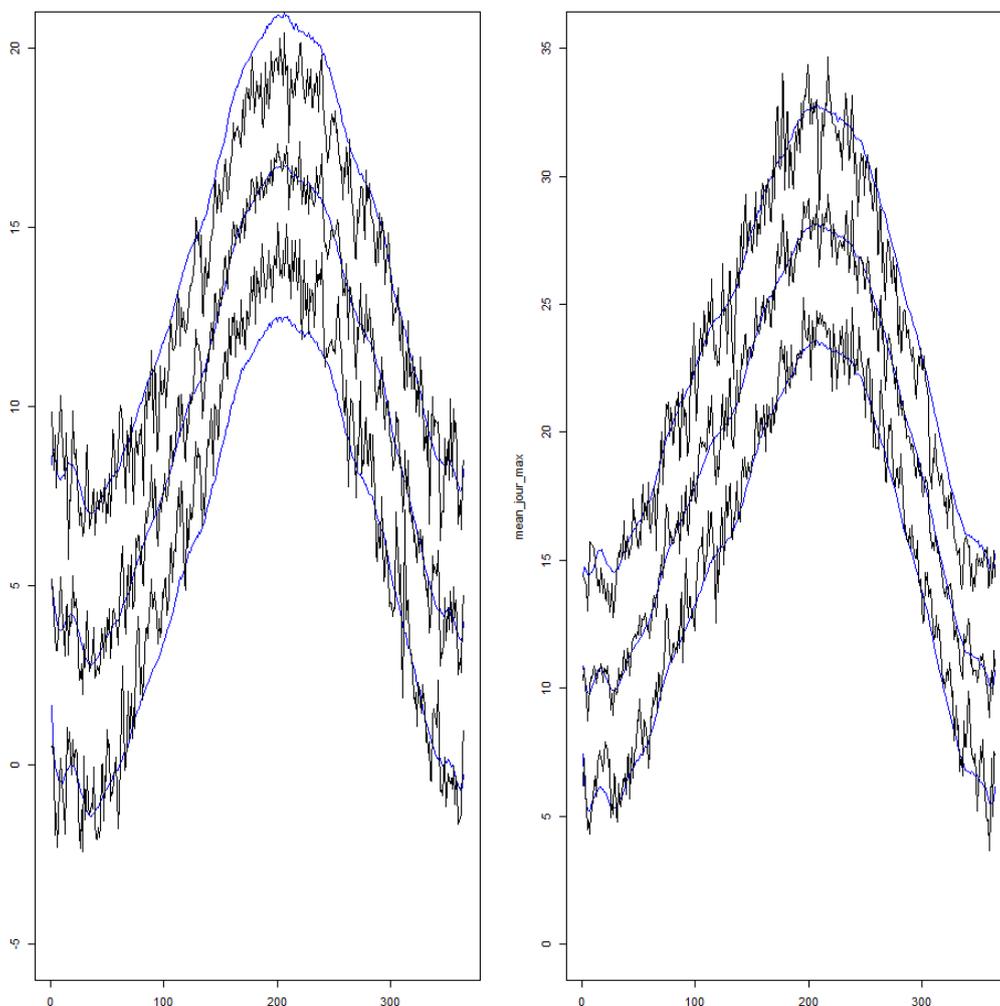


FIGURE 26 – Températures minimales historiques/simulées (Gauche) et maximales historiques/simulées (Droite) avec écart-type journalier pour la ville de Bordeaux

Précisions concernant la figure 26 :

- Noir : Moyenne des températures journalières historiques encadrée par cette même moyenne +/- écart-type journalier historique
- Bleu : Moyenne des températures journalières simulées encadrée par cette même moyenne +/- écart-type journalier simulées

Ici, la volatilité journalière des températures minimales simulées est en moyenne plus élevée que celle historique. Ce n'est pas le cas pour les températures maximales. Ces éléments corroborent avec les vitesses de retour à la moyenne illustrées dans la partie 2.1.2.

Les vitesses de retour à la moyenne des températures minimales sont plus élevées et imposent aux températures de se rapprocher de leur moyenne mobile respective. Ainsi, imposer des quantiles entraînent une plus grande volatilité des browniens. Les températures simulées sont alors en permanence écartées de leur moyenne mobile.

Malgré cette différence, on pourra noter qu'imposer le quantile 99.9% permet d'aligner les autres quantiles plus faibles que ce soit pour les températures minimales et maximales. Cette observation semble confirmer un comportement des températures cohérent entre les simulations et notre jeu de données.

2.4.1 Application du traité

Les températures simulées correspondent à priori à nos attentes. Il s'agit maintenant de vérifier que la distribution des indices annuels français reste cohérente. Après application du traité, nous obtenons un Best Estimate du montant d'indemnisation à espérer pour l'année suivante (ie $BE = \mathbb{E}[I_i]$ avec I_i l'indemnisation résultant de la simulation i). Les résultats obtenus sont respectivement $BE_1 = 0.037$ et $BE_2 = 0.013$.

En appliquant les mêmes pondérations et mêmes limites de température sur notre jeu de donnée, nous obtenons en moyenne des résultats proches de ceux estimés. Rien n'indique pour l'instant que ces Best Estimates ne soient pas justifiés.

Pour appuyer ce propos, nous pouvons poser notre regard sur la distribution des paiements simulés mais aussi sur les principaux quantiles des indices annuels des entités 1 et 2. sont cohérent au regard de ceux historiques.

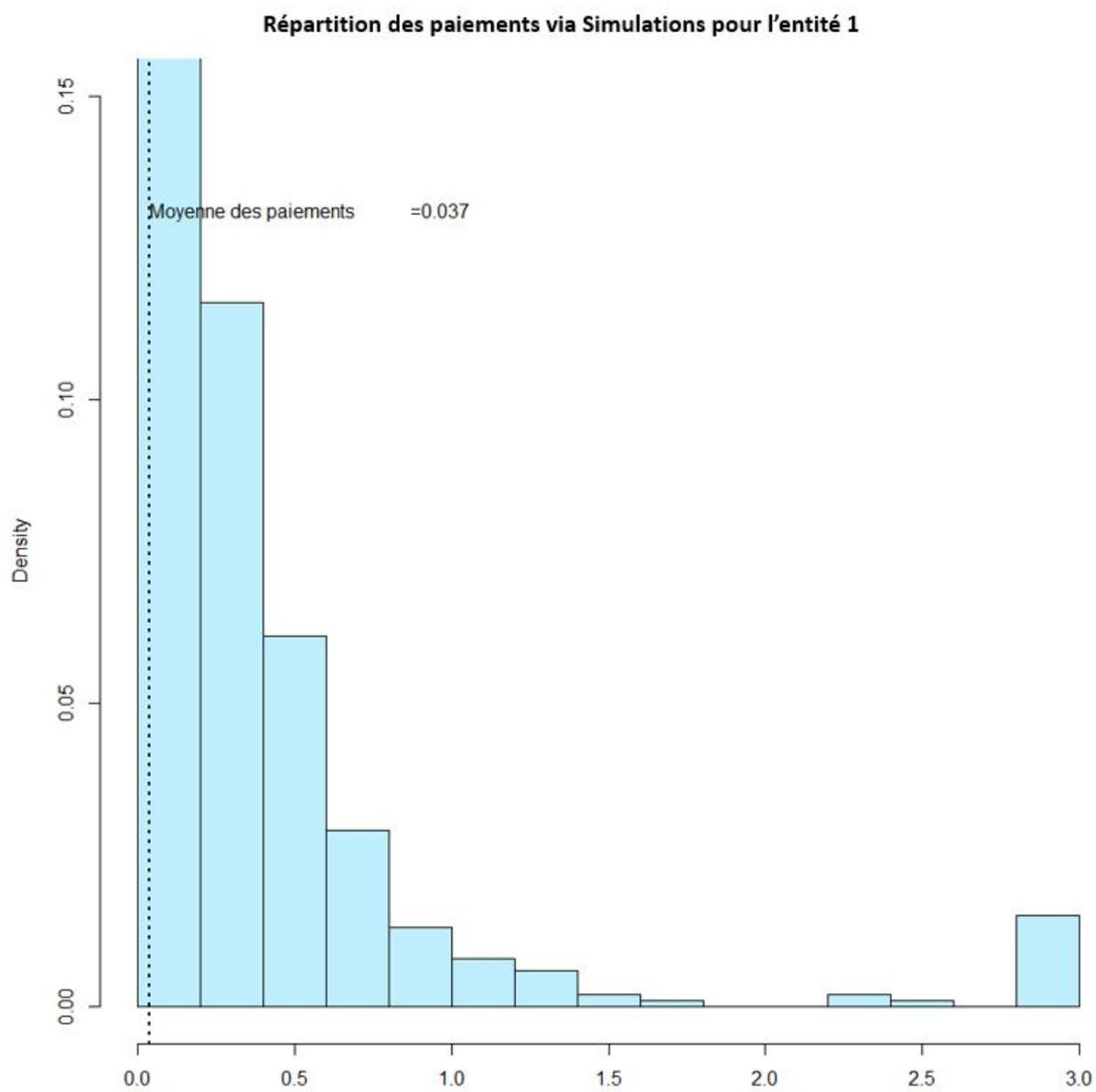


FIGURE 27 – Distribution des paiements simulés pour l'entité 1

Répartition des paiements via Simulations pour l'entité 2

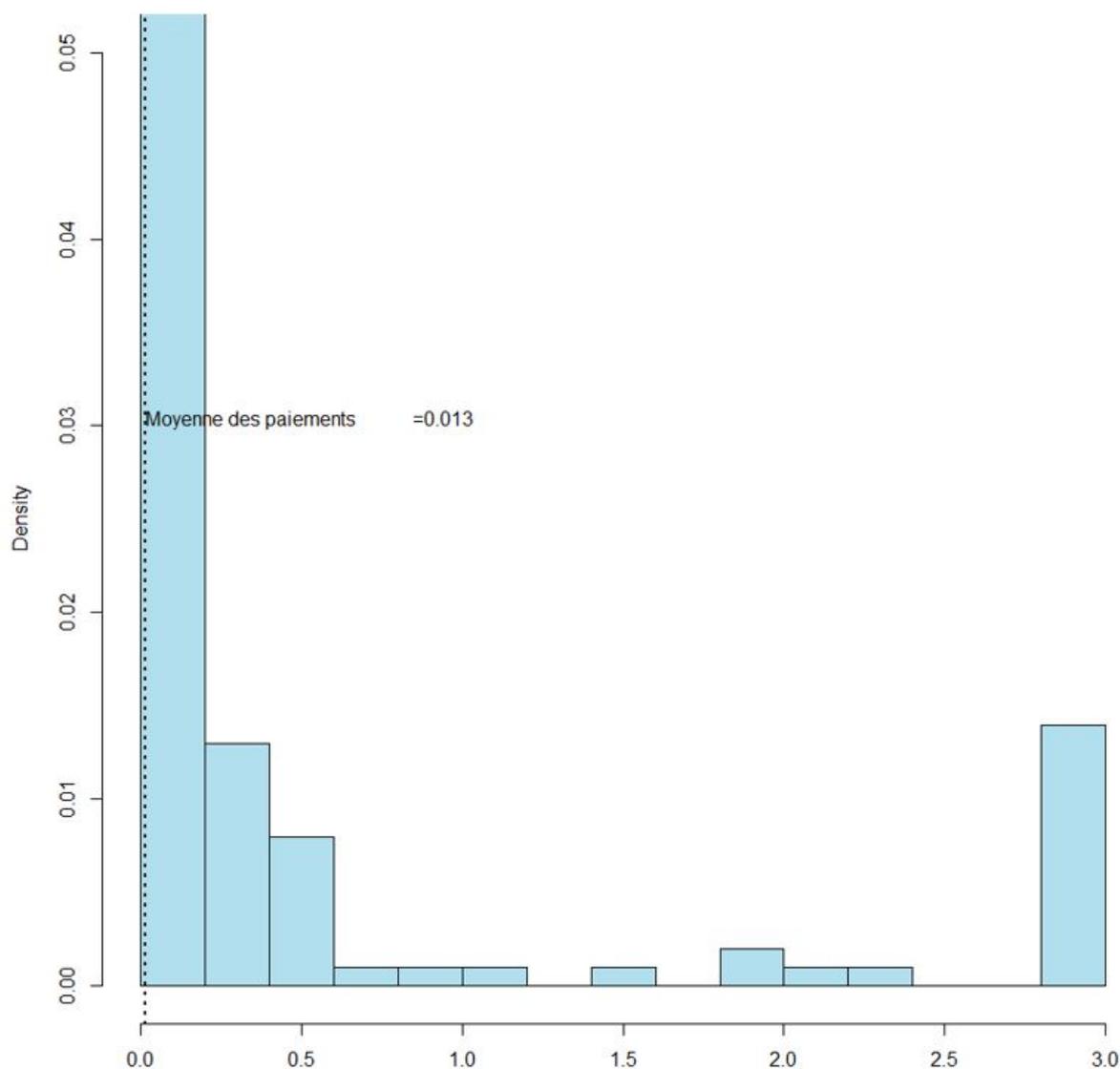


FIGURE 28 – Distribution des paiements simulés pour l'entité 2

Les figures 27 et 28 montrent les distributions des paiements simulés ainsi que la moyenne des paiements pour chaque entité. Nous rappelons que les traités ont tous deux une portée maximale associée à une indemnité maximale de 3M d'euros.

La distribution des paiements respectivement pour les entités 1 et 2 semblent être cohérentes. Ce constat est aussi établi pour les indices sous-jacents malgré une légère sur-représentation de simulations très extrêmes (indemnisations entre 2.8M et 3M d'euros).

La modélisation issue du Chapitre 2 a permis de reproduire un jeu de 5000 chroniques de températures annuelles et ce pour les 10 villes. Les hypothèses sur la normalité des résidus a été vérifiée et les données simulées semblent cohérentes avec le jeu d'apprentissage. Elle entraîne une potentielle revue des limites de température du traité ou des primes associées. Ces points seront développés dans le Chapitre 3.

Chapitre 3

Modification du traité et conséquences

Le Chapitre 3 se concentre sur la revue des limites du traité (3.1) à partir de la modélisation développée au Chapitre 2. Cette revue mettra en exergue les limites de la modélisation du Chapitre 2 en introduisant une nouvelle contrainte (3.2). Cette dernière contrainte, dont les résultats semblent probants, servira de base à 2 applications dans le cadre Solvabilité II (3.3) et ORSA (3.4).

3.1 Revue des limites du traité

D'après les calculs réalisés en fin de Chapitre 2, les Best Estimates de sinistres futurs obtenus montrent une certaine incohérence entre les primes payées chaque année et les indemnités historiques reçues.

Comme notre modélisation semble cohérente, notre but sera de trouver de nouvelles limites de températures extrêmes pour chaque ville. Le tout dans un objectif d'homogénéisation des indices annuels de chaque ville. En effet, les indices simulés et historiques ne sont pas homogènes entre villes d'observation.

3.1.1 Méthode d'ajustement des limites

Les limites du traité doivent évoluer pour que les remboursements simulés s'alignent avec une prime totale de $2M$.

L'objectif n'est pas de tarifier le traité mais de proposer des éléments de réponse à une potentielle revue de celui-ci. Dans ce contexte, la formule $Cible = BE_1 + BE_2 + \sigma_{TOT}$ avec $\sigma_{TOT} = \frac{BE_1 * \sigma_1 + BE_2 * \sigma_2}{BE_1 + BE_2}$ doit s'aligner avec le montant total de primes ($2M$).

La composante de volatilité permet de se rapprocher d'un calcul actuariel de tarification et d'inclure une marge de prudence pour le réassureur. L'optimisation de cette marge de prudence en abaissant la volatilité des paiements aurait 2 objectifs :

- assurer une meilleure protection moyenne à l'assureur.
- se protéger d'éventuelles années anormales de températures.

Il est important de noter que dans un tel cas d'optimisation, les nouvelles limites dépendraient fortement des températures simulées en accentuant les indices annuels simulés sur les villes avec peu de volatilité indicielle. Or, accentuer les indices de certaines villes par rapport à d'autres n'irait pas dans le sens du traité qui possède déjà la pondération de chaque ville comme variable d'ajustement. On rappelle que cette pondération traduit la proportion d'assurés des entités 1 et 2, dont le contrat est sujet au risque de température, dans chaque zone autour des villes observées. Cela va donc dans le sens du traité de laisser la pondération apporter le poids nécessaire à chaque ville pour traduire un spectre de protection cohérent avec les portefeuilles d'assurés des entités 1 et 2. Pour se faire, une homogénéisation des indices simulés pour chacune des villes est privilégiée. Les limites des traités évoluent en suivant le procédé suivant dans le cas où $Cible < 2M$:

Si \sum Indices des températures maximales $>$ \sum Indices des températures minimales :

- Augmenter la limite des températures minimales de la ville avec l'indice le plus faible

Si \sum Indices des températures maximales $<$ \sum Indices des températures minimales :

- Baisser la limite des températures maximales de la ville avec l'indice le plus faible

Dans le cas où $Cible > 2M$, le procédé suivant sera appliqué :

- Si \sum Indices des températures maximales $>$ \sum Indices des températures minimales :
- o Augmenter la limite des températures maximales de la ville avec l'indice le plus fort
- Si \sum Indices des températures maximales $<$ \sum Indices des températures minimales :
- o Baisser la limite des températures minimales de la ville avec l'indice le plus fort

3.1.2 Nouvelles limites du traité

Les nouvelles limites du traité dépendent évidemment des attentes de calibration de la part de l'assureur et/ou réassureur. Nous nous plaçons ici dans le cas d'une calibration consolidée avec 2 M d'indemnisation cible moyenne (correspondant aux primes versées conjointement par les 2 entités).

	Limites min	Limites max
Bordeaux	-3	34
Lille	-7	32
Lyon	-6	33
Marseille	-2	34
Montpellier	-2	35
Nantes	-3	32
Paris	-7	33
Perpignan	-2	35
Strasbourg	-7	32
Toulouse	-3	34

FIGURE 29 – Limites initiales du traité pour l'entité 1

	Limites min	Limites max
Bordeaux	-1	33
Lille	-4	30
Lyon	-4	33
Marseille	-2	33
Montpellier	-2	32
Nantes	-2	31
Paris	-3	32
Perpignan	2	31
Strasbourg	-7	32
Toulouse	-3	34

FIGURE 30 – Nouvelles limites du traité pour l'entité 1

	Limites min	Limites max
Bordeaux	2	-1
Lille	3	-2
Lyon	2	0
Marseille	0	-1
Montpellier	0	-3
Nantes	1	-1
Paris	4	-1
Perpignan	4	-4
Strasbourg	0	0
Toulouse	0	0

FIGURE 31 – Écart anciennes/nouvelles limites du traité pour pour l'entité 1

Ce nouveau jeu de limites représente un gain moyen de 3.26 degrés pour les limites de température de l'entité 1 suivant la pondération adaptée. Il est désormais important de s'assurer de la cohérence de ces nouvelles limites, en les appliquant sur notre jeu de données historique.

3.1.3 Cohérence des nouvelles limites et limites de la méthode des quantiles extrêmes contraints

En appliquant les nouvelles limites, un effet indésirable se révèle et peut mettre à mal ce choix de modélisation. En effet, la sur-représentation des simulations très extrêmes (voir partie 2.4.1) est dorénavant trop importante.

Les quantiles, ainsi forcés pour l'ensemble des températures simulées, se sont alignés sur les quantiles historiques grâce une plus forte volatilité de brownien. Mais cet ajout de volatilité se reflète sur l'ensemble des températures simulées de façon hétérogène. Les browniens déjà extrêmes le deviennent davantage comparativement à ceux proches de la moyenne. En conséquence, les simulations avec un fort indice associé, nourries par des browniens déjà extrêmes, voient leur indice augmenter davantage que les simulations à faible indice.

C'est en comparant les quantiles d'indices simulés et historiques que ce phénomène se révèle. Les quantiles précédemment forcés ne sont qu'un reflet d'une aggravation de certaines simulations et non pas une répartition plus uniforme des extrêmes sur un plus large spectre de simulations.

En effet, c'est un faible nombre de simulations extrêmes qui nourrissent les quantiles. Ils génèrent des indemnités maximales (notamment sur l'entité 1 qui a une priorité plus faible). Si l'on suit les remarques faites ci-dessus, notre modélisation par quantiles forcés amène un très large ensemble de simulations à faible indice compensé par un ensemble assez restreint à fort indice. Le Best Estimate de l'indemnité issue des 5 000 simulations se voit alors sous-estimé.

Une adaptation des limites en accord avec une indemnité cible peut alors s'avérer préjudiciable pour le réassureur.

Or notre objectif premier est de modéliser de la façon la plus vraisemblable possible l'évolution des températures et non pas de générer des simulations extrêmes aberrantes.

Une autre contrainte à imposer au modèle est envisagée pour corriger ces défauts avérés.

3.2 Contrainte de volatilité journalière

Cette nouvelle contrainte a pour but de restreindre la liberté de modélisation aux caractéristiques du jeu de données. Le but n'est en aucun cas de modifier le comportement du processus stochastique mais seulement d'en imposer les caractéristiques finales.

3.2.1 Choix de modélisation et avantages

Après avoir simulé les températures sans contraintes (en conservant les ponts browniens associés), nous imposons aux températures simulées 2 contraintes :

- La volatilité journalières des températures simulées égale à celle historique (exemple : volatilité des températures du 4 août simulées = volatilité des températures historiques du 4 août.)
- Une température moyenne journalière égale à celle historique.

Ce sont de fortes contraintes qui n'altèrent pas le comportement intrinsèque du processus. L'intérêt d'une telle contrainte est triple :

- imposer aux simulations de posséder des caractéristiques proches du jeu de données.
- cibler des jours particuliers avec une volatilité trop faible sans en accentuer d'autres.
- préserver la liberté du modèle de générer des extrêmes encore jamais observés historiquement.

3.2.2 Résultats et analyse

L'application des nouvelles contraintes est illustrée ci-dessous (Voir Figures 50 et 51 pour les villes de Lille et Lyon). Les 2 graphiques possèdent les mêmes caractéristiques que celles décrites dans la partie 2.4.

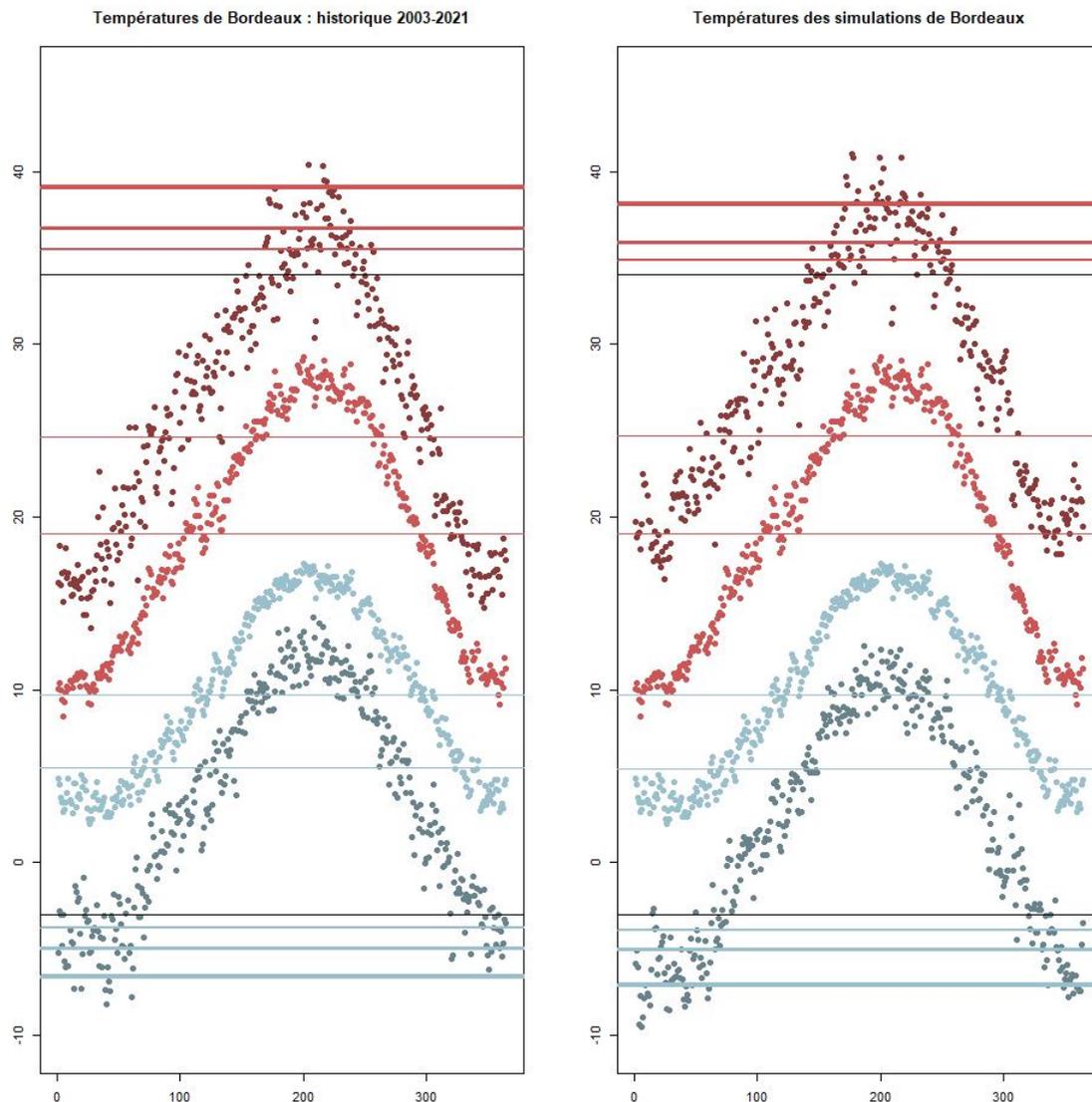


FIGURE 32 – Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantiles pour la ville de Bordeaux

La différence avec l'ancienne méthode est naturellement frappante. En égalant les moyennes et volatilités journalières simulés à celles historiques, le graphe des simulations perd notamment la "continuité"

de ses quantiles journaliers. Il est intéressant de remarquer le comportement des quantiles journaliers 99.5 % des températures maximales simulées qui sont cohérents pour les jours [100,300] mais plus élevés que ceux historiques pour les jours [0,100] et [300,365]. On ne retrouve pas ce comportement pour les températures minimales.

Les quantiles extrêmes 99%, 99.5% et 99.9% (pour l'ensemble des températures) s'écartent de ceux historiques. Ce cas n'est pas généralisé à l'ensemble des villes mais s'explique par la méthode utilisée. L'utilisation du pont brownien oblige les températures simulés à s'écarter de leur moyenne mobile sur de longues périodes malgré un retour à la moyenne (κ) plus ou moins important. C'est donc en imposant une volatilité journalière égale à celle historique que certains extrêmes simulés se voient fortement réduit.

Par cette méthode, le BE est évalué à $0.25M$ avec $BE_1 = 0.16M$ et $BE_2 = 0.09M$. La volatilité des paiements est elle évaluée à $\sigma = 0.53M$

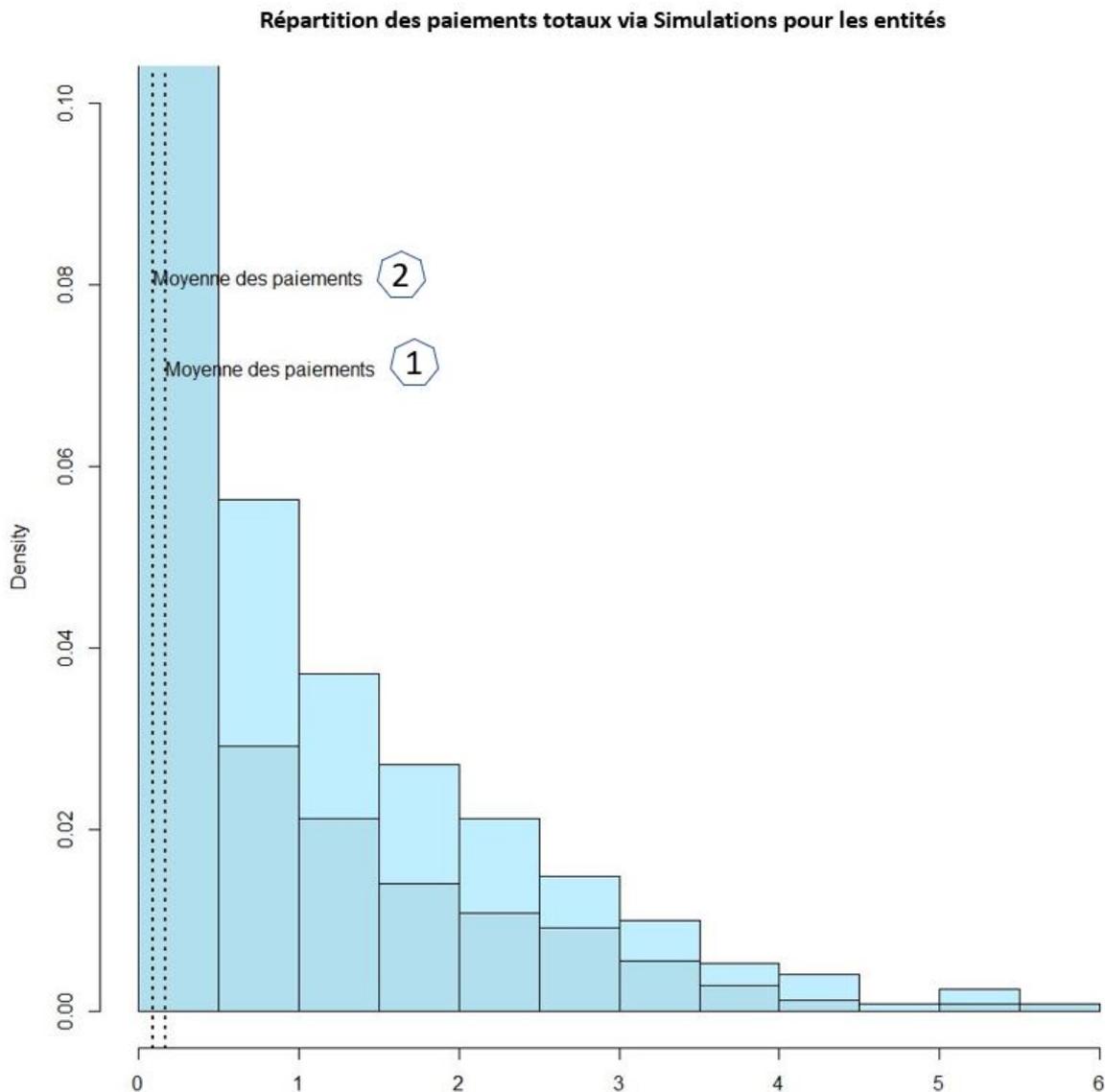


FIGURE 33 – Histogramme des paiements totaux simulés pour les 2 entités

La répartition des paiements observés sur la figure ci-dessus semble plus convaincante que les figures 26 et 27 avec un aspect bien plus lissé suivant la gravité du sinistre. On ne retrouve plus de sur-représentation de cas très extrêmes.

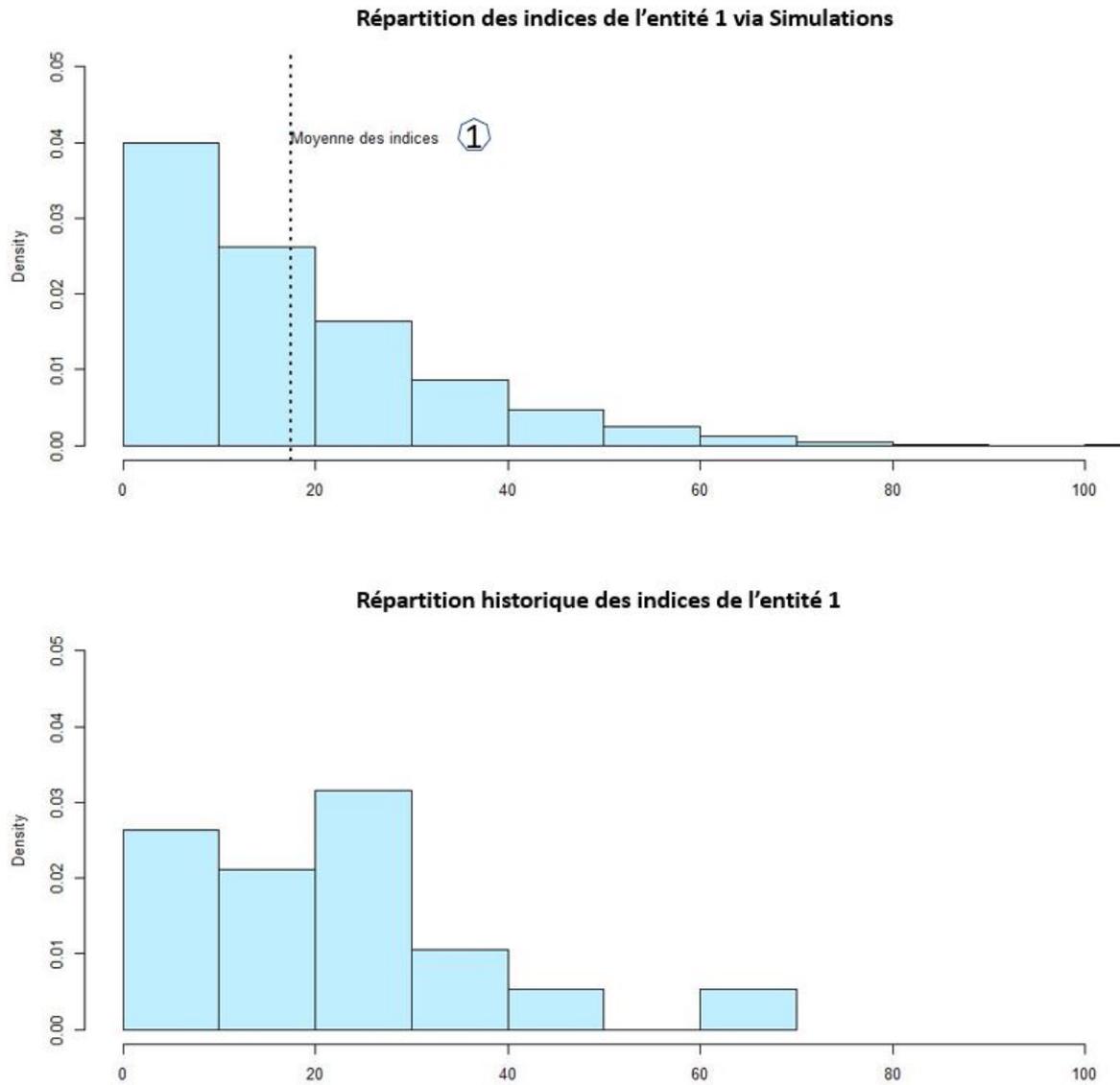


FIGURE 34 – Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 1

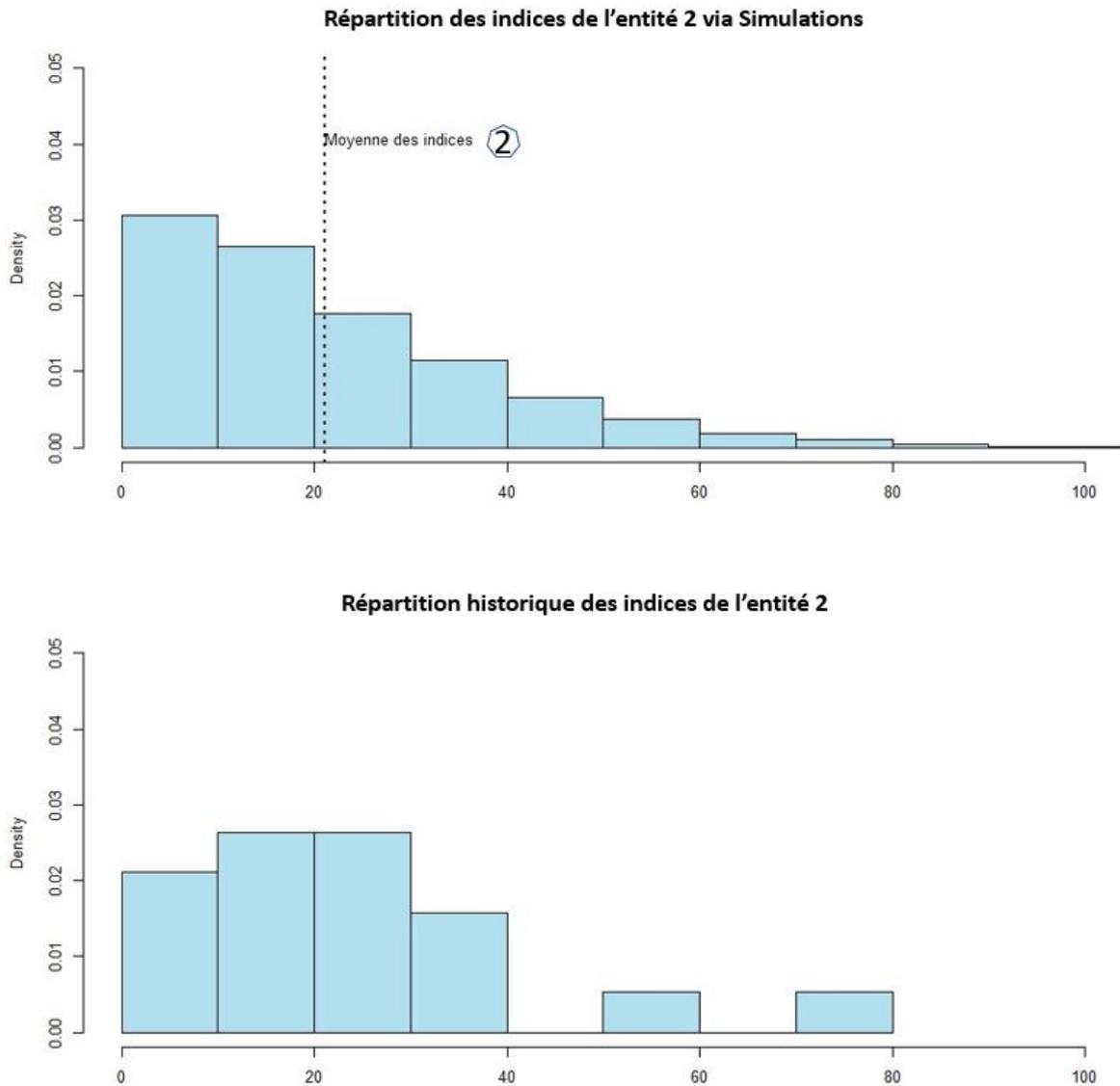


FIGURE 35 – Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 2

Il peut être intéressant de comparer les distributions d'indices simulés et historique malgré un nombre restreint d'indices historiques disponibles. On n'observe aucune contre-indication de répartition incohérente.

En suivant la méthode d'ajustement des limites (partie 3.1.1), nous cherchons à modifier les limites de la façon la plus cohérente possible.

3.3 Modification des limites

La méthode d'ajustement des limites est d'abord appliquée sur les limites de températures initiales du traité (Figure 4 et 5) avec un écart toléré de $0.05M$. On obtient les résultats suivants :

- $BE_{TOT} = 0.89M$ avec $BE_1 = 0.60M$ et $BE_2 = 0.29M$
- $\sigma_{TOT} = 1.15M$ avec $\sigma_1 = 1.28M$ et $\sigma_2 = 0.89M$

On l'applique désormais à un jeu de limites vides et on obtient les résultats suivants :

- $BE_{TOT} = 0.86M$ avec $BE_1 = 0.62M$ et $BE_2 = 0.23M$
- $\sigma_{TOT} = 1.18M$ avec $\sigma_1 = 1.32M$ et $\sigma_2 = 0.80M$

Certes, ce choix est désavantageux pour l'assureur en terme de BE de sinistralité mais il traduit plus justement les objectifs de la mise en place du traité. Ces nouvelles limites sont appliquées sur notre historique de température pour s'assurer de leur cohérence.

	Limites min	Limites max
Bordeaux	1	-1
Lille	3	-3
Lyon	2	2
Marseille	0	0
Montpellier	0	-2
Nantes	0	-1
Orly	3	-2
Perpignan	2	-1
Strasbourg	1	1
Toulouse	0	0

FIGURE 36 – Écarts entre les nouvelles et anciennes limites pour l'entité 1

	Limites min	Limites max
Bordeaux	-2	33
Lille	-4	29
Lyon	-4	35
Marseille	-2	34
Montpellier	-2	33
Nantes	-3	31
Orly	-4	31
Perpignan	0	34
Strasbourg	-6	33
Toulouse	-3	34

FIGURE 37 – Nouvelles limites pour l'entité 1

	Limites min	Limites max
Bordeaux	1	-1
Lille	3	-3
Lyon	2	2
Marseille	-1	0
Montpellier	-1	-1
Nantes	1	-1
Orly	3	-2
Perpignan	2	1
Strasbourg	2	1
Toulouse	-1	0

FIGURE 38 – Écarts entre les nouvelles et anciennes limites pour l'entité 2

	Limites min	Limites max
Bordeaux	-2	33
Lille	-4	29
Lyon	-4	35
Marseille	-2	34
Montpellier	-2	33
Nantes	-3	31
Orly	-4	31
Perpignan		
Strasbourg	-6	33
Toulouse	-3	34

FIGURE 39 – Nouvelles limites pour l'entité 2

Les nouvelles limites sont appliquées sur notre historique de températures pour observer l'évolution de répartition indiciale.

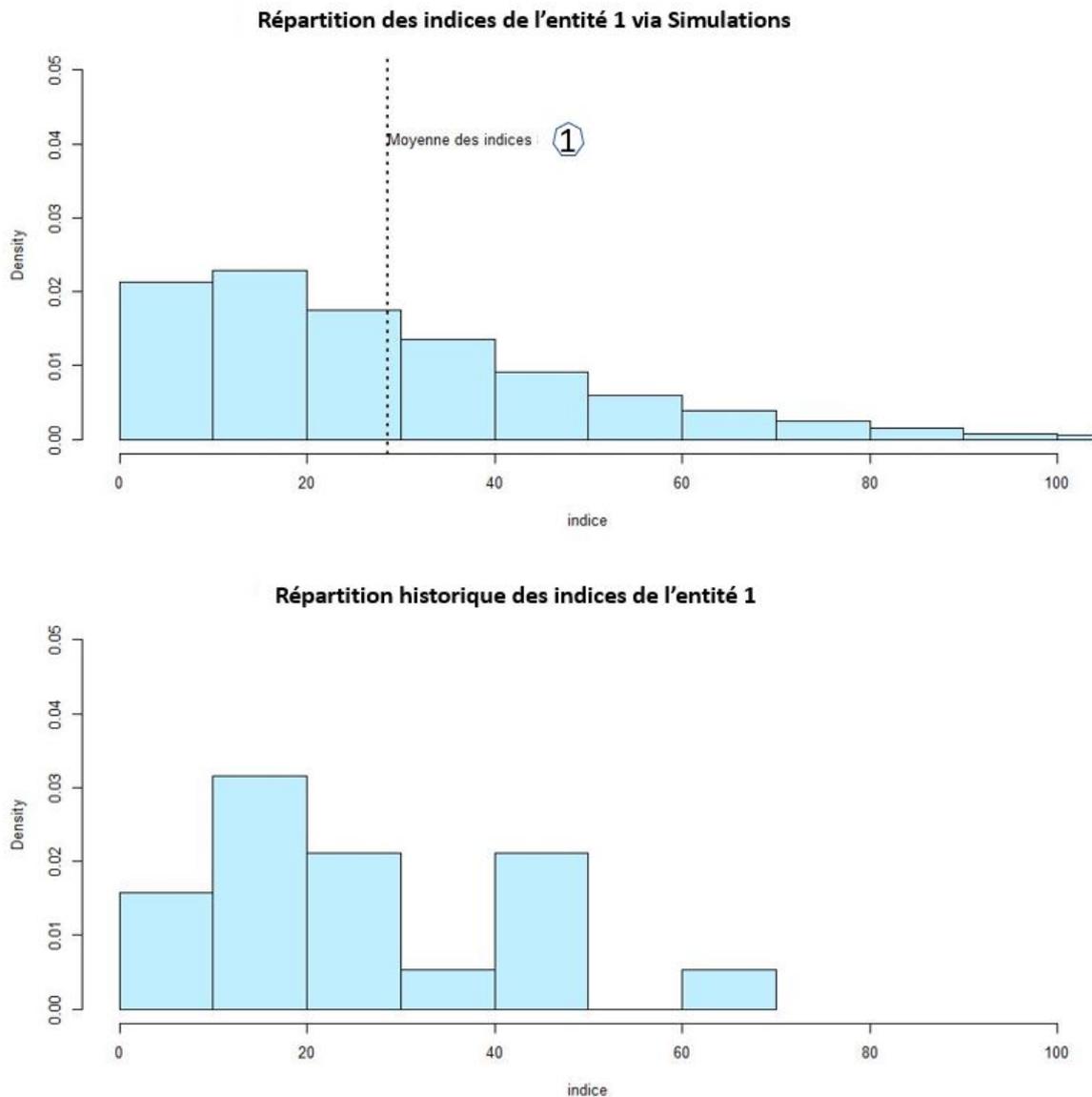


FIGURE 40 – Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 1 avec les nouvelles limites

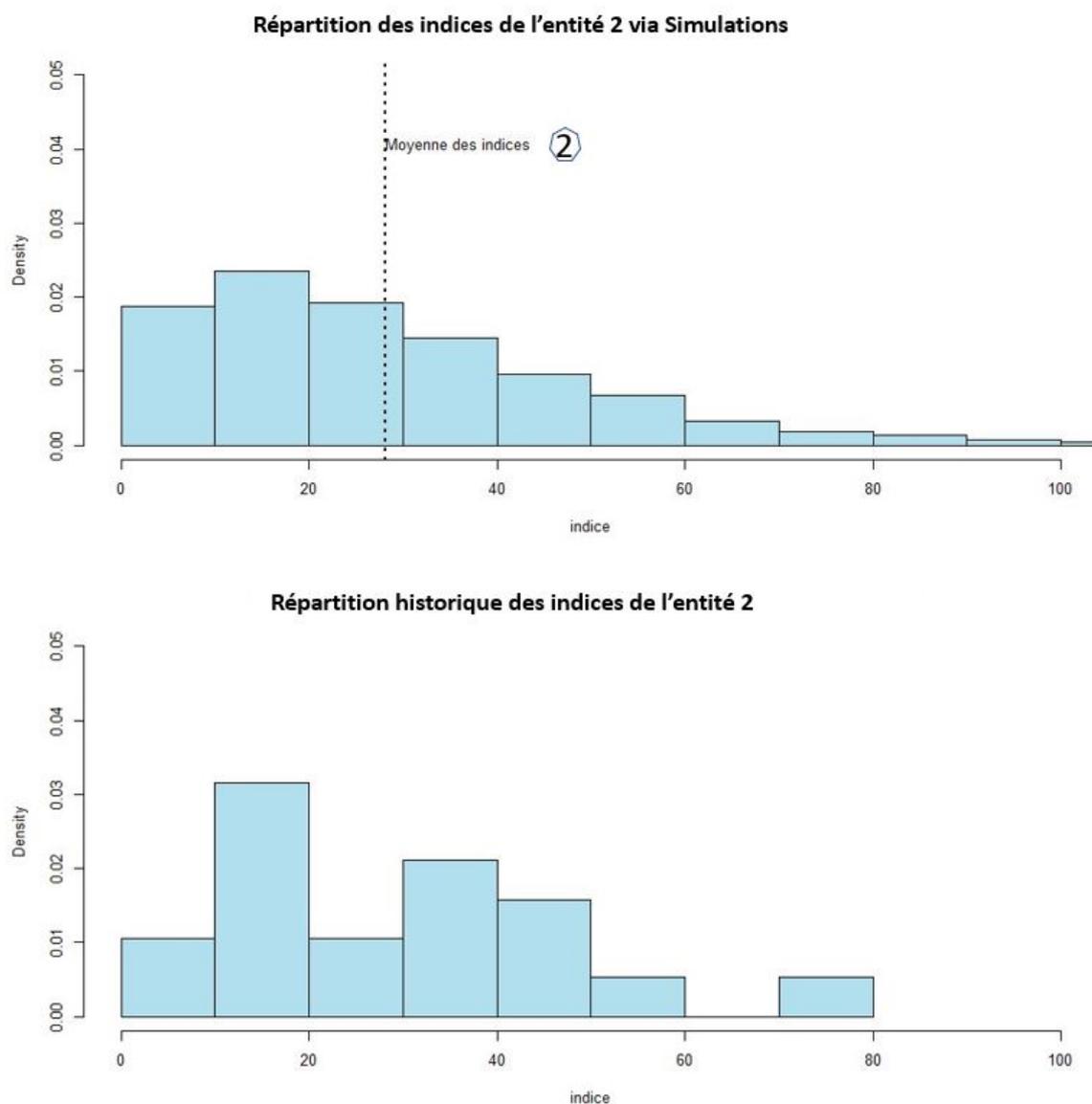


FIGURE 41 – Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 2 avec les nouvelles limites

La modélisation des 2 traités climatiques respectifs semble désormais assez convaincante pour l'appliquer aux bilans du réassureur dans le cadre Solvabilité II.

3.4 Applications au cadre Solvabilité II

Avant de conclure sur les différentes conséquences possibles d'une modification de traité, il est important de préciser quelques caractéristiques quant au bilan SII d'AssuRisk. Dans le cadre de l'étude, AssuRisk possède un Best Estimate très faible.

Dans ce contexte, le passif de l'entreprise est principalement alimenté par les impôts différés : $Impots\ diff = Tax\ rate * (Asset_{SII\ Valuation} - Asset_{Accounting\ Valuation} - (Best\ Estimate_{with\ Risk\ margin} - Technical\ provisions))$.

De plus, les fonds propres de l'entité sont calculés net de Risk Margin. Celle-ci peut évoluer par effet d'écoulement de BE adossé à une projection simplifiée de SCR.

Dans notre cadre, AssuRisk possède un ratio de solvabilité confortable ($\approx 500\%$) et le montant de SCR qui découle des risques sous-jacents est important comparativement au BE de l'entreprise.

Il est nécessaire d'être attentif aux variations de ces composantes pour la suite de l'étude.

3.4.1 Première application : Modification des limites

Pour cette première application, les primes associées à chaque entité restent inchangées à 1M chacune. Les limites du traité sont adaptées de façon à obtenir des indices homogènes entre les différentes villes et entre températures minimales/maximales (voir partie 3.3). En conséquence, le SCR non-vie, adossé à l'assiette de prime, n'est pas impacté.

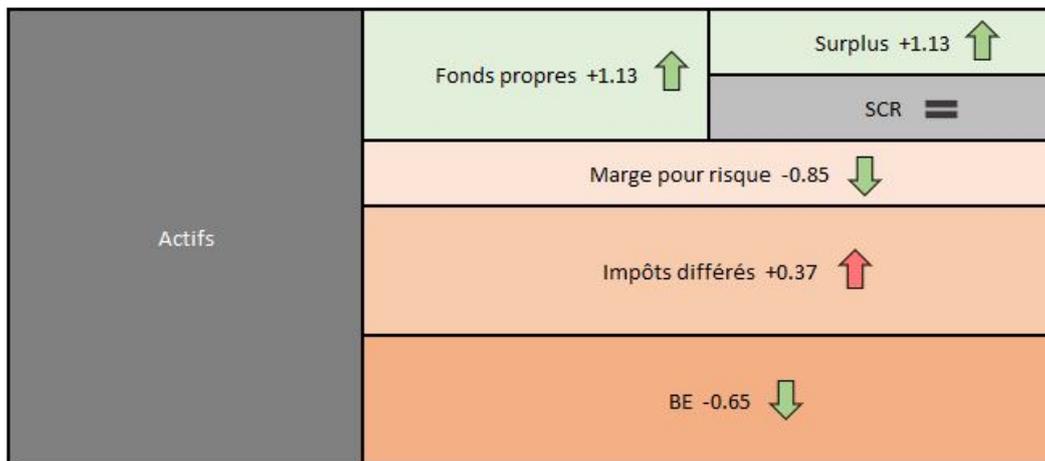


FIGURE 42 – Bilan SII simplifié (première application)

Les flèches vertes (resp. rouges) décrivent des effets favorables (resp. défavorables) au ratio de solvabilité d'AssuRisk. L'effet BE évalué à $-0.65M$ est un effet immédiat de l'application des nouvelles limites : la sinistralité en $t + 1$ était estimée à 1.50 M (voir partie 1.4.3) mais réévaluée à 0.86 M (voir Partie 3.3). Comme décrit précédemment, l'effet sur la Risk Margin est un pur effet d'écoulement du BE qui est partiellement compensé par une augmentation des impôts différés. Il en découle une augmentation des fonds propres de 1.13 M et du ratio SII de 15%.

3.4.2 Deuxième application : Modification de la prime des traités

Pour cette deuxième application, les limites du traités ne sont pas ajustées mais le BE est lui ré-évalué à 0.25M (voir partie 3.2.2). Le montant de prime associée est lui aussi ajusté à $BE_{TOT} + \sigma_{TOT} = 0.78M$ pour s'aligner avec la méthode précédemment décrite. On rappelle que l'on impose $Cible = BE_{TOT} + \sigma_{TOT}$ avec $Cible$ le montant de primes ciblé qui répond à un BE (BE_{TOT}) simulé.

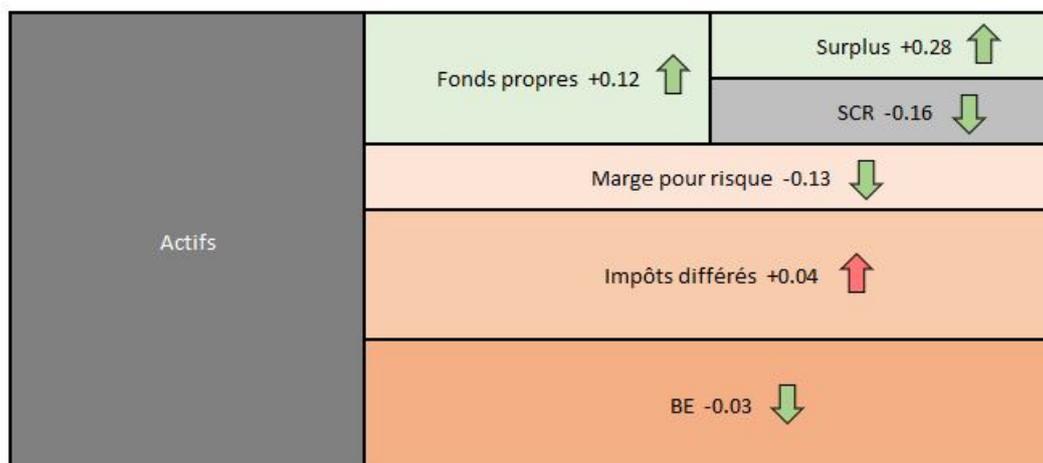


FIGURE 43 – Bilan SII simplifié (deuxième application)

L'effet sur le montant de BE est négligeable car le leeway entre le montant de primes et la projection de sinistre associée reste pratiquement inchangé. L'écoulement du BE est lui légèrement impacté et entraîne un pur effet mathématique d'actualisation des SCR projetés : diminution de 0.13 M de la Risk Margin. En conséquence, les impôts différés augmentent légèrement. Le SCR non-vie, adossé à l'assiette de primes, est lui aussi impacté à la baisse. Il en découle une augmentation des fonds propres de 0.12 M, une diminution du SCR de -0.16 M et une hausse du ratio SII de 12%.

3.5 Applications aux projections ORSA

Les projections ORSA d'AssuRisk sont réalisées sur 4 ans et ce dans 5 scénarios : à partir des données officielles en clôture annuelle et en se basant sur les conditions de marchés à la mi-année.

Ces 3 scénarios sont les suivants :

- **Scénario central** : légère hausse des taux, forte hausse des spreads et baisse du marché action en 2022.
- **Scénario "Worst Case"** : légère baisse des taux, forte hausse des spreads et baisse du marché action en 2022.
- **Scénario "Sudden IR Increase"** : forte hausse des taux, forte hausse des spreads, baisse du marché action en 2022.
- **Scénario "N1"** : perte de l'ensemble du business en 2023.
- **Scénario "N2"** : sinistre grave sur le traité non-proportionnel climatique en 2023 avec une probabilité d'une fois tous les 50 ans (Value at Risk 98%) .

La modification du traité climatique aura évidemment un impact sur l'ensemble des scénarios. Les scénarios "Worst case" et "Sudden IR Increase" sont cependant des scénarios " de marché " qui n'impacte que le comportement des actifs. Le scénario "N1" provoque une perte totale de business en 2023 et est donc moins intéressant dans le cadre de l'étude. Les 2 prochaines parties se concentrent donc sur les scénarios central et "N2".

3.5.1 Première application : Modification des limites

Par rapport au Base Case, les scénarios se déforment de la façon suivante après application de la 1ère modification de traité :

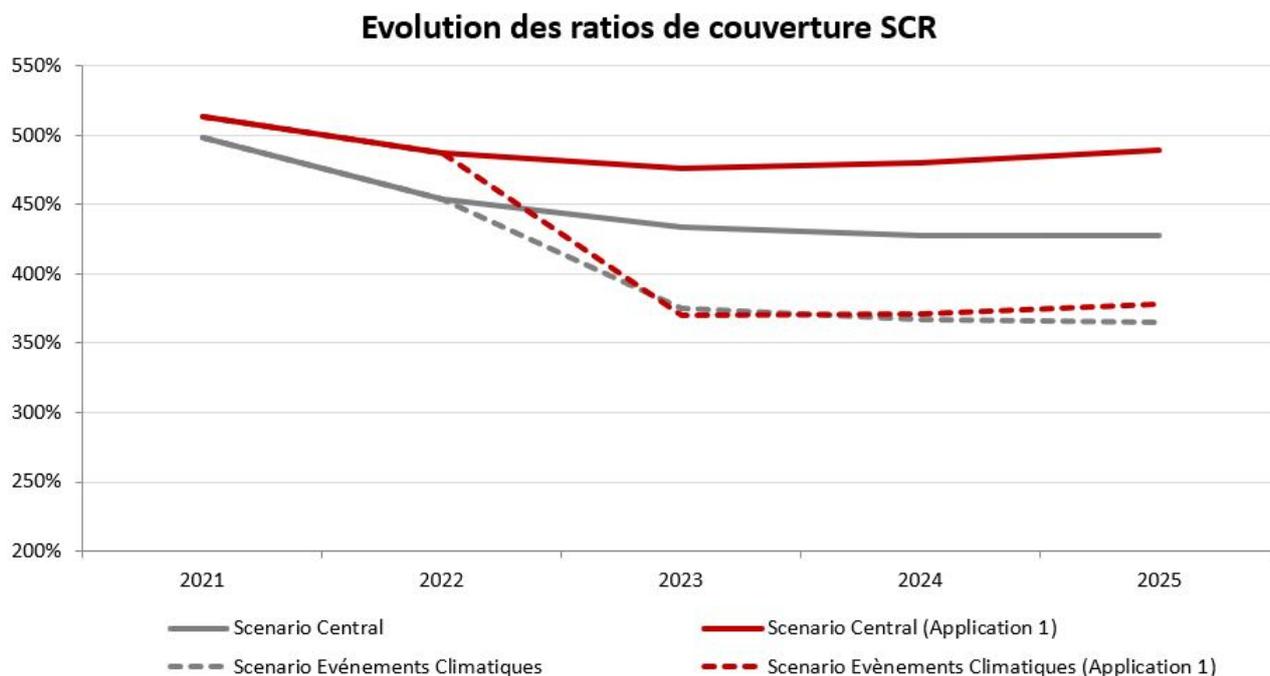


FIGURE 44 – Projection ORSA (première application)

Tout au long de la projection, le scénario Central (Application 1) est porté par ses fonds propres qui accumulent le même gain annuel de leeway entre les primes acquises et les sinistres (BE) prévus (voir partie 3.4.1).

Ce gain en fonds propres est cependant légèrement compensé par un SCR en légère augmentation par rapport au Base case : les gains annuels hypothétiques décrits précédemment sont réinvestis sur des produits de taux en suivant le plan d'investissement prévu par l'ORSA. Ce qui impacte légèrement le SCR Taux et Spread.

D'après notre modélisation, la VaR ⁸ 98% correspond à un sinistre de 5.8M. Dans le scénario Événements climatiques (Application 1), les fonds propres subissent donc un sinistre grave à hauteur de $-5.8M$ comparé à $-5.0M$ pour le Base Case. Cet effet est légèrement compensé par une baisse de SCR par effet inversé à celui décrit pour le scénario central.

3.5.2 Deuxième application : Modification de la prime des traités

Par rapport au Base Case, les scénarios se déforment de la façon suivante après application de la 2ème modification de traité :

8. Value at Risk

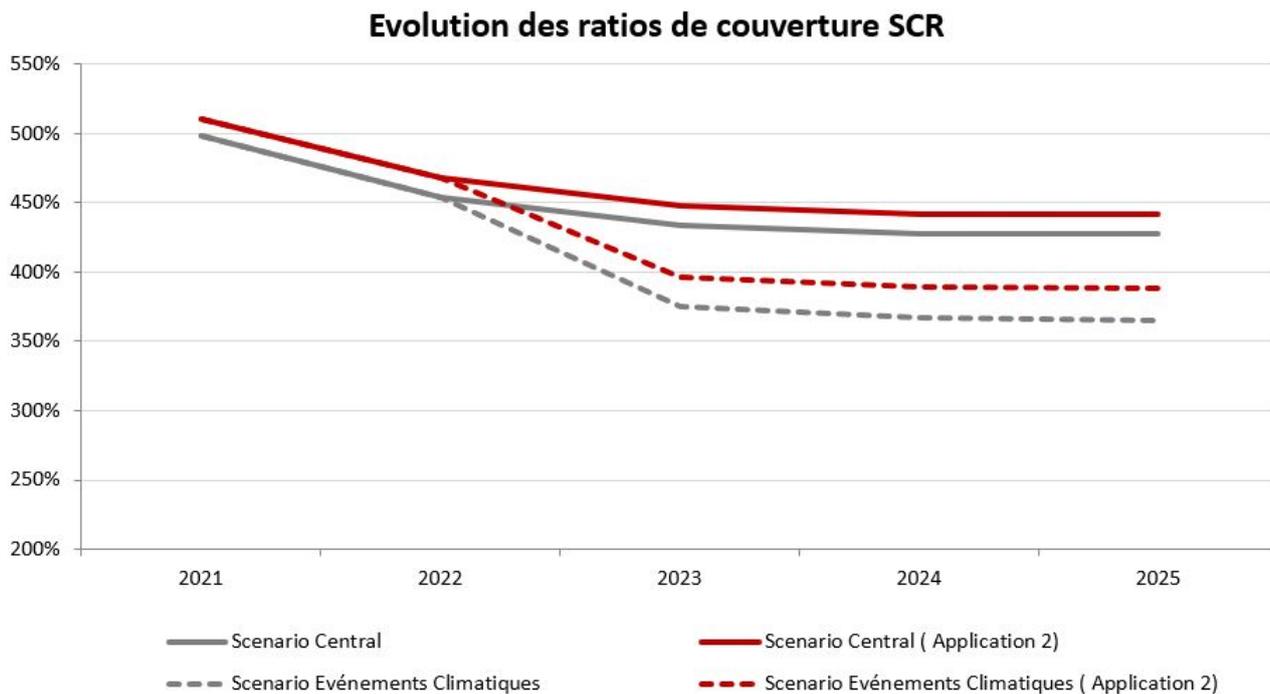


FIGURE 45 – Projection ORSA (deuxième application)

Contrairement à la première application (voir partie 3.5.1), les nouvelles projections de la deuxième application semblent être parallèle au Base Case. Dans le scénario central, les gains en ratio, constant dans le temps, s’expliquent par les éléments suivants :

- Un leeway entre montant de prime et BE de sinistre équivalent à celui du Base Case.
- Le SCR non-life, alimenté par le traité climatique, est adossé à un montant de primes constant.

La modélisation de température évalue la VaR 98% à 4.9M de sinistre, proche du 5.0M initialement modélisé par prudence. Le scénario Événements Climatiques s’en retrouve parallèle à celui du Base Case.

La modélisation du chapitre 2 était imparfaite. L’ajustement proposé dans le Chapitre 3 est lui convaincant. Sur les différents cas d’application décrits, la revue du traité a permis d’éliminer une sur-prudence initial, ce qui est favorable pour le ratio de solvabilité et l’ensemble des projections ORSA.

Conclusion

Les conditions météorologiques et plus particulièrement les températures sont des facteurs importants de l'économie. Les compagnies qui souffrent de conditions météorologiques défavorables sont à même de se protéger contre ce risque. Pour une compagnie d'assurance telle que SwissLife France, des températures particulièrement extrêmes peuvent entraîner des cash-flows instantanés supplémentaires, notamment en assurance non-vie et santé.

En assurance non-vie, les périodes de gel et de canicule éprouvent les biens matériels mais aussi leurs utilisateurs. En assurance santé, les périodes extrêmes éprouvent les systèmes immunitaires humains. Un traité de réassurance est une très bonne solution pour déléguer une partie de ce risque auprès d'une autre entreprise, soulager dans un même temps les provisions liées à ce risque et lisser le résultat issu du business soumis à ce risque.

C'est dans ce cadre que 2 entités respectivement d'assurance non-vie et santé ont souscrit un contrat de réassurance auprès de l'entreprise hypothétique "AssuRisk" sous la forme d'un contrat Aggregate Annuel non-proportionnel climatique.

La société d'étude AssuRisk portait le risque de traités climatiques dont la modélisation semblait incohérente avec l'expérience passée. Fort de ce constat, la remise en cause de la modélisation initiale a permis d'identifier ses faiblesses :

- Une modélisation de température mono-ville rapportée à l'ensemble des villes par un indice correctif.
- Un Best Estimate de sinistralité très volatile qui est estimé à 1.5 M d'euros sur l'ensemble des 2 traités par prudence.
- Un scénario "extrême" (probabilité d'une fois tous les 50 ans) peu fiable qui est évalué à 5 M sur l'ensemble des 2 traités par prudence.
- Un historique de sinistralité réelle qui ne semble pas correspondre aux attentes.

Plusieurs variables d'ajustement de modélisation ont été mise à l'épreuve : Multi-ville, Brownien simple, pont brownien, quantiles contraints, etc. Ces différents ajustements ont mis en lumière la sensibilité des modèles utilisés dans un tel cas de protection climatique. Tout méthode particulière aurait pu être adoptée si elle n'avait été examinée que par un seul prisme. Notre étude défend les qualités de la modélisation avec volatilité journalière contrainte (accompagné par des résidus en pont brownien). Elle apporte une réponse convaincante à la répartition réelle des indices et indemnités historiques.

Cette modélisation impacte, de fait, les bilans de la société notamment dans le BE de prime dans lequel la prévision de sinistre est prise en compte mais aussi dans les projections dans le cadre du processus ORSA.

L'étude ne cherchait pas à re-tarifier de tels traités mais à apporter des éléments de réponse en cas de modification du traité. Ce choix appartient à la société AssuRisk qui peut :

- décider de garder le même montant de prime et d'ajuster les limites lors du renouvellement de contrat : auquel cas, la solvabilité de l'entreprise se verra revalorisée et bien supérieure au Base Case en fin de projection.
- décider d'ajuster le montant de primes en fonction du montant de BE de sinistre évalué par la modélisation : auquel cas, la solvabilité de l'entreprise se verra aussi revalorisée mais cependant une trajectoire ORSA parallèle au Base Case.

Dans l'ensemble des cas d'application de modification de traité, la hausse des ratio de Solvabilité de l'entreprise traduit un relâchement de capital qui pourrait être "re-riské" en l'investissant sur des actifs à plus haut rendement. Le tout dans un objectif de hausse de la rentabilité à ratio de solvabilité égal.

Le modèle est applicable dans n'importe quel pays tant qu'un minimum de données d'entraînement soit disponible. Il peut servir au réassureur pour proposer rapidement des tarifs à toutes les compagnies intéressées par ce type de traité.

Au delà des modèles de températures, il pourrait être intéressant d'utiliser des modèles prédictifs sur la concentration en CO₂ ou autre gaz à effet de serre. Ces prédictions pourraient par exemple avoir un impact sur les paramètres de mortalité utilisés lors de l'évaluation des passifs de l'entreprise d'assurance vie.

Un tel modèle prédictif pourrait aussi être un outil de prévention auprès des clients de l'entreprise en prévenant de tout épisode de pollution à venir.

Table des figures

1	Projection ORSA	12
2	Synthèse des 3 piliers de Solvabilité II	18
3	Passage du bilan comptable au bilan économique	18
4	Synthèse des modules de la formule standard	22
5	Limites de températures extrêmes et pondération de chaque ville pour le traité 1	27
6	Limites de températures extrêmes et pondération de chaque ville pour le traité 2	27
7	Températures maximales journalières sur l'année 2021 à Bordeaux	32
8	Températures minimales journalières sur l'année 2021 à Bordeaux	32
9	Températures maximales journalières à Bordeaux	33
10	Températures minimales journalières à Bordeaux	33
11	Moyenne Mobile C (Rouge) et Moyenne des températures maximales journalières pour Bordeaux	34
12	Moyenne Mobile F (Rouge) et Moyenne des températures minimales journalières pour Bordeaux	34
13	Vitesse de retour à la moyenne pour les températures maximales et pour chacune des villes	36
14	Vitesse de retour à la moyenne pour les températures minimales et pour chacune des villes	36
15	Matrice de corrélation entre résidus pour les températures maximales	37
16	Matrice de corrélation entre résidus pour les températures minimales	37
17	QQPlot des résidus historiques (max) de Bordeaux par rapport à une loi normale de mêmes caractéristiques	38
18	QQPlot des résidus historiques (min) de Bordeaux par rapport à une loi normale de mêmes caractéristiques	38
19	Variance des résidus pour les températures maximales	39
20	Variance des résidus pour les températures minimales	39
21	Variance des résidus pour les températures maximales	39
22	Variance des résidus pour les températures minimales	39

23	Exemple de pont brownien non-retraité	40
24	Exemple de pont brownien retraité	41
25	Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantile 99.9% pour la ville de Bordeaux	42
26	Températures minimales historiques/simulées (Gauche) et maximales historiques/simulées (Droite) avec écart-type journalier pour la ville de Bordeaux	43
27	Distribution des paiements simulés pour l'entité 1	45
28	Distribution des paiements simulés pour l'entité 2	46
29	Limites initiales du traité pour l'entité 1	49
30	Nouvelles limites du traité pour l'entité 1	49
31	Écart anciennes/nouvelles limites du traité pour pour l'entité 1	49
32	Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantiles pour la ville de Bordeaux	51
33	Histogramme des paiements totaux simulés pour les 2 entités	52
34	Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 1	53
35	Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 2	54
36	Écarts entre les nouvelles et anciennes limites pour l'entité 1	55
37	Nouvelles limites pour l'entité 1	55
38	Ecart entre les nouvelles et anciennes limites pour l'entité 2	55
39	Nouvelles limites pour l'entité 2	56
40	Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 1 avec les nouvelles limites	56
41	Répartition des indices historiques et simulés pour l'entité 2 avec les nouvelles limites	57
42	Bilan SII simplifié (première application)	58
43	Bilan SII simplifié (deuxième application)	59
44	Projection ORSA (première application)	60
45	Projection ORSA (deuxième application)	61
46	Composantes $\gamma_2 - \gamma_{28}$ obtenus pour les températures maximales	68
47	Statistique R^2 entre la moyenne mobile C et les températures maximales journalières de Bordeaux	68
48	Composantes $\gamma_2 - \gamma_{28}$ obtenus pour les températures minimales	69

49	Statistique R^2 entre la moyenne mobile F et les températures minimales journalières de Bordeaux	69
50	Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantiles pour la ville de Lille	70
51	Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantiles pour la ville de Lyon	71

Bibliographie

- [1] Directive 2009/138/CE du PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL. *Accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité II)*. 2009.
- [2] Quantitative Impact Study NO.4. *Insurance Risk - Instructions*.
- [3] Analysis of RISK PREMIUMS et Hedging EFFECTIVENESS. *The journal of Risk Finance*. 2009.
- [4] Evaluation des dérivés CLIMATIQUES. *Michael Moreno*.
- [5] Stochastic Modelling of DAILY TEMPERATURE TIME SERIES FOR USE IN WEATHER DERIVATIVE PRICING. *Rodrigo Caballero*.
- [6] Monte Carlo Simulation of STOCHASTIC PROCESSES.
- [7] Martingale estimation functions for discretely observed diffusion PROCESSES. *Bo Martin Bibbyn Michael Sorensen*. 1995.

Annexes

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
X2_max1  -40593.02  35779.70  -1.135  0.2574
X2_max2   16697.95   9302.77   1.795  0.0736 .
X2_max3  236930.06  204288.30   1.160  0.2470
X2_max4  -64124.49   36771.53  -1.744  0.0821 .
X2_max5 -327606.56  272037.60  -1.204  0.2293
X2_max6   74351.38   44765.68   1.661  0.0977 .
X2_max7  198476.25  156041.42   1.272  0.2043
X2_max8  -35567.12   23151.58  -1.536  0.1254
X2_max9  -56272.89   41071.97  -1.370  0.1716
X2_max10   6775.28    5013.65   1.351  0.1775
X2_max11   6320.19    4178.47   1.513  0.1313
X2_max12   -347.64     326.32  -1.065  0.2875
X2_max13   -131.88      76.22  -1.730  0.0845 .
X2_max14  -3534.23    1947.69  -1.815  0.0705 .
X2_max15 -129946.95  113502.30  -1.145  0.2531
X2_max16   39793.02   22444.51   1.773  0.0771 .
X2_max17  313591.33   265882.98   1.179  0.2391
X2_max18  -77740.17   45546.19  -1.707  0.0888 .
X2_max19 -279977.89  226729.74  -1.235  0.2177
X2_max20   57235.17   35667.71   1.605  0.1095
X2_max21  116724.61   88658.25   1.317  0.1889
X2_max22  -17634.84   12136.13  -1.453  0.1471
X2_max23  -21653.19   15094.56  -1.435  0.1524
X2_max24   1904.07    1553.84   1.225  0.2213
X2_max25   1262.49     784.83   1.609  0.1086
X2_max26   -30.15      35.51  -0.849  0.3965
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7132 on 339 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9883,    Adjusted R-squared:  0.9874
F-statistic: 1097 on 26 and 339 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

FIGURE 46 – Composantes $\gamma_2 - \gamma_{28}$ obtenus pour les températures maximales

```

Residual standard error: 3.417 on 6568 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7064,    Adjusted R-squared:  0.7064

```

FIGURE 47 – Statistique R^2 entre la moyenne mobile C et les températures maximales journalières de Bordeaux

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
X2_min1	-38202.78	32193.24	-1.187	0.236
X2_min2	-4236.25	8370.29	-0.506	0.613
X2_min3	217698.27	183810.98	1.184	0.237
X2_min4	18490.74	33085.65	0.559	0.577
X2_min5	-288776.13	244769.27	-1.180	0.239
X2_min6	-25917.04	40278.49	-0.643	0.520
X2_min7	164462.84	140400.24	1.171	0.242
X2_min8	15998.06	20830.93	0.768	0.443
X2_min9	-42740.59	36955.03	-1.157	0.248
X2_min10	-4274.66	4511.10	-0.948	0.344
X2_min11	4253.30	3759.63	1.131	0.259
X2_min12	356.36	293.61	1.214	0.226
X2_min13	-74.97	68.58	-1.093	0.275
X2_min14	852.85	1752.46	0.487	0.627
X2_min15	-121090.02	102125.13	-1.186	0.237
X2_min16	-10680.09	20194.73	-0.529	0.597
X2_min17	282876.81	239231.57	1.182	0.238
X2_min18	24456.67	40980.76	0.597	0.551
X2_min19	-239947.62	204002.95	-1.176	0.240
X2_min20	-22464.61	32092.47	-0.700	0.484
X2_min21	92933.09	79771.38	1.165	0.245
X2_min22	9276.71	10919.64	0.850	0.396
X2_min23	-15558.08	13581.52	-1.146	0.253
X2_min24	-1491.06	1398.09	-1.066	0.287
X2_min25	786.38	706.16	1.114	0.266
X2_min26	44.83	31.95	1.403	0.162

Residual standard error: 0.6417 on 339 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9834, Adjusted R-squared: 0.9821
F-statistic: 771.1 on 26 and 339 DF, p-value: < 2.2e-16

FIGURE 48 – Composantes $\gamma_2 - \gamma_{28}$ obtenus pour les températures minimales

Residual standard error: 2.814 on 6568 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6501, Adjusted R-squared: 0.6501

FIGURE 49 – Statistique R^2 entre la moyenne mobile F et les températures minimales journalières de Bordeaux

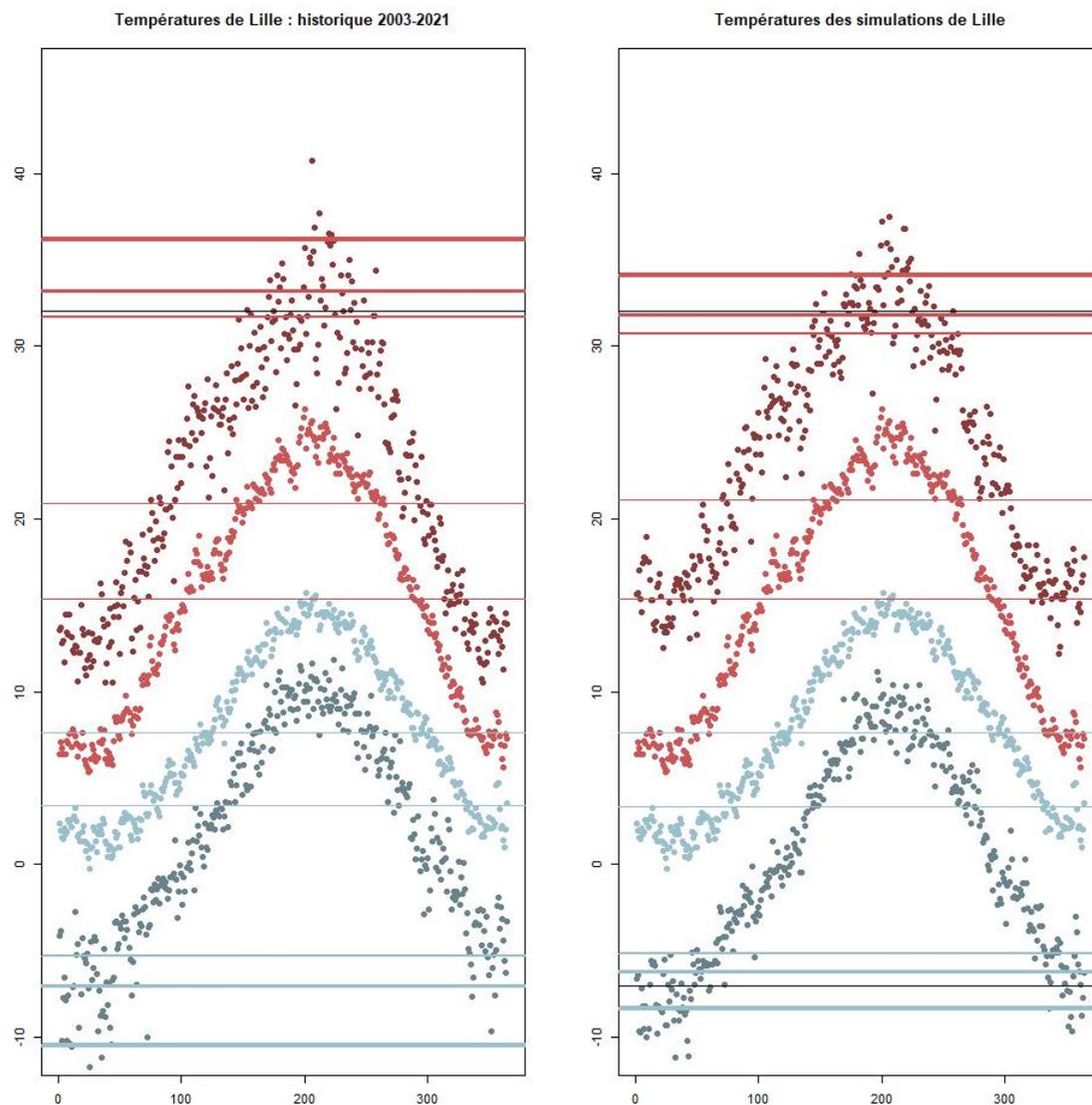


FIGURE 50 – Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantiles pour la ville de Lille

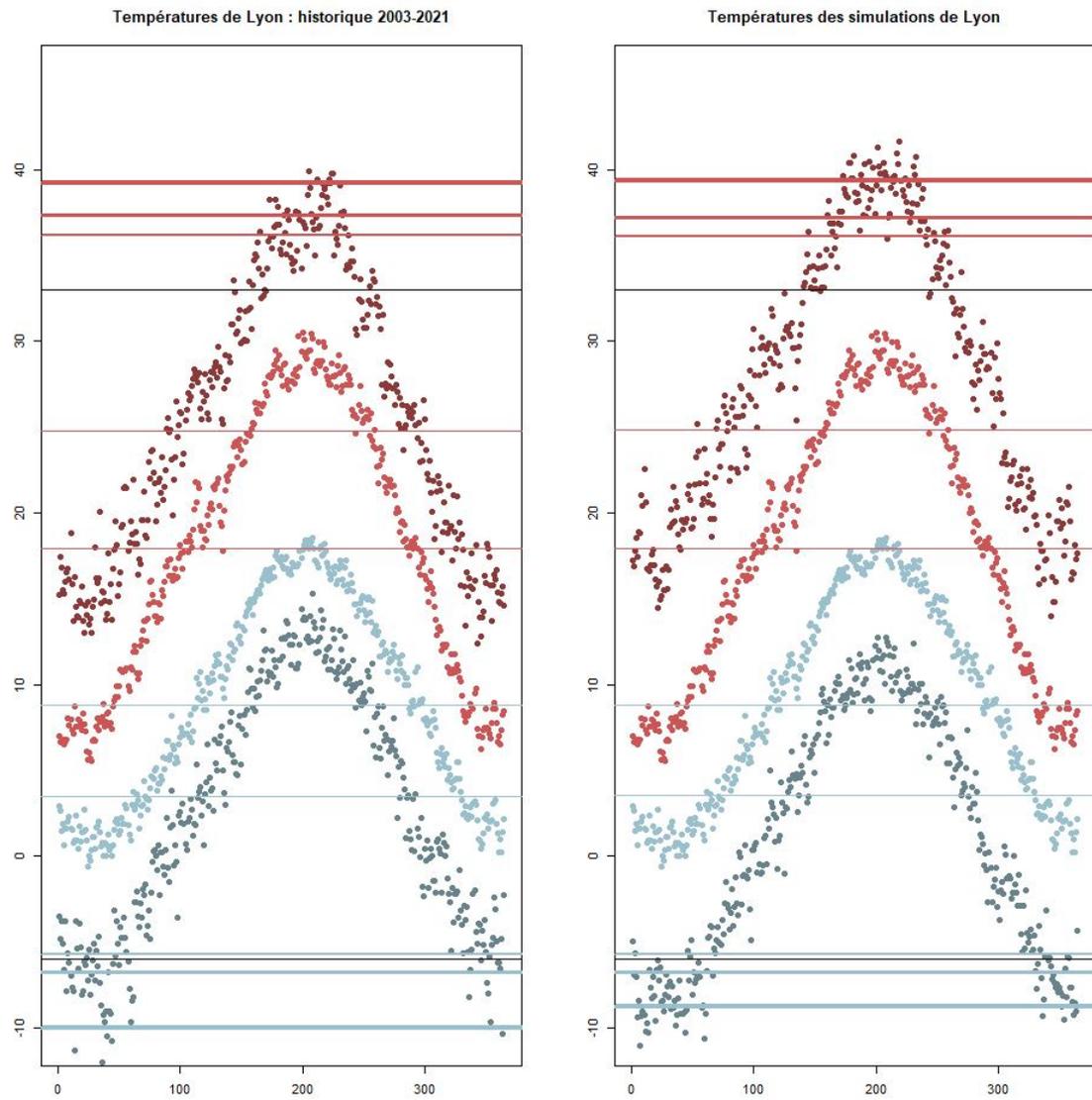


FIGURE 51 – Comparaison entre températures historiques (Gauche) et simulées (Droite) avec quantiles pour la ville de Lyon