

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuares

le 27/06/2024

Par : Arthur CORDIER

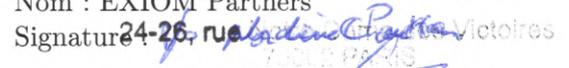
Titre : Identification et quantification des facteurs influençant la sensibilité à la convexité de la courbe des taux pour un assureur Epargne Euro.

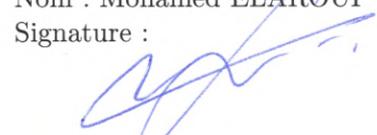
Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

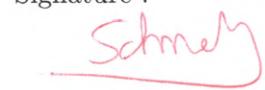
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuares :*

*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*
Quentin GUIBERT

Entreprise : **EXIOM PARTNERS**
Nom : EXIOM Partners
Signature : 
24-26, rue de la République, 75001 Paris
SIRET : 851 20 344 00034
APE 70.22Z - RCS Paris

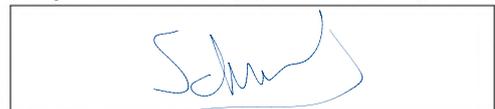
Directeurs de Mémoire en entreprise :
Nom : Mohamed ELAROUI
Signature : 

Nom : Mathieu SCHNEIDER
Signature : 

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat

Bibliothèque :



Résumé

Suite aux évolutions récentes dans la politique monétaire de la BCE, les taux directeurs ont progressivement augmenté, passant de 0,5 % en juillet 2022 à 4,5 % en septembre 2023. En réaction à cette évolution particulièrement rapide, la structure traditionnelle des taux s'est métamorphosée, passant d'une forme concave croissante à une forme convexe décroissante.

Les organismes d'assurance sont désormais confrontés à un contexte économique sans précédent – l'inversion de la courbe des taux – susceptible d'avoir un impact sur leurs résultats et leur solvabilité. Cette situation est d'autant plus préoccupante qu'elle survient après une période prolongée de taux relativement bas, marquée par des taux négatifs.

Ce mémoire examine en profondeur les implications de ce phénomène inhabituel pour des assureurs-vie, en particulier les fonds euros.

L'assurance-vie se distingue par ses engagements à long terme étroitement liés à l'évolution de l'environnement économique. Les interactions complexes entre les actifs et les passifs des assureurs dans ce domaine requièrent l'utilisation de modèles ALM (*Asset & Liabilities Management*) pour projeter et actualiser les flux futurs probables et les décisions de gestions de l'assureur.

L'ALM joue un rôle essentiel, notamment dans le calcul des indicateurs prudentiels requis par le pilier I de solvabilité II, tels que le *best-estimate* et le SCR. L'exploration des particularités liées à la création d'un modèle ALM dans le cadre des contrats d'épargne en euros, ainsi que l'analyse des conséquences de l'inversion et de la convexité des taux, permet de mettre en évidence les zones de sensibilité des assureurs à cette convexité.

En cette période d'incertitude, il est essentiel pour les organismes d'assurance d'identifier précisément les éléments qui ont le plus d'impact sur leur stabilité financière. S'agit-il principalement des actifs, des passifs ou des hypothèses intégrées dans leurs modèles ?

Cette recherche s'efforce de fournir une analyse approfondie des facteurs en jeu. Son objectif principal est de mettre en lumière les limites potentielles des modèles existants et d'offrir aux professionnels de l'assurance les clés pour comprendre l'origine de leur sensibilité. Cela contribuera à maintenir leur stabilité financière dans le contexte actuel de perturbations économiques.

Mots-clés : Assurance-vie, Gestion actif-passif, Convexité des taux, Inversion, Modélisation ALM, Solvabilité II.

Abstract

Following recent developments in the ECB's monetary policy, key rates have gradually risen from 0.5% in July 2022 to 4.5% in September 2023. In response to this particularly rapid change, the traditional structure of rates has been transformed, moving from an increasing concave shape to a decreasing convex one.

Insurance companies are now faced with an unprecedented economic context – the inversion of the yield curve – likely to have an impact on their results and solvency. This situation is all the more worrying as it comes after a prolonged period of relatively low rates, marked by negative rates.

This report takes an in-depth look at the implications of this unusual phenomenon for life insurers, particularly euro funds.

Life insurance is characterised by its long-term guarantees, which are closely linked to changes in the economic environment. The complex interactions between the assets and liabilities of insurers in this field require the use of ALM models (Asset and Liability Management) to project and discount probable future cash flows and the insurer's management decisions.

ALM plays an essential role, particularly in calculating the prudential indicators required by Pillar I of solvency II, such as the best-estimate and the SCR. Exploring the particularities associated with the creation of an ALM model for savings contracts in euros, and analysing the consequences of the inversion and convexity of rates, highlights the areas in which insurers are sensitive to this convexity.

In these uncertain times, it is essential for insurance companies to identify precisely the elements that have the greatest impact on their financial stability. Are they mainly assets, liabilities or the assumptions built into their models?

This research endeavours to provide an in-depth analysis of the factors involved. Its main objective is to highlight the potential limitations of existing models and to provide insurance professionals with the keys to understanding the origin of their sensitivity. This will help to maintain their financial stability in the current context of economic turmoil.

Mots-clés: Life Insurance, Asset and liabilities management, Yield convexity, Inversion, ALM modeling, Solvency II.

Note de Synthèse

Contexte et problématique

Au cours de l'année 2022, l'Europe a été le théâtre d'une inflation soutenue, marquant ainsi une période économique exceptionnelle. En réaction à cette situation et via ses décisions de politique monétaire, la Banque Centrale Européenne (BCE) a rehaussé intensément ses taux directeurs, plongeant les acteurs financiers, notamment les assureurs, dans un territoire inexploré. L'une des conséquences les plus notables de cette dynamique, en plus de la montée globale des taux, a été l'inversion de la courbe des taux, un phénomène rare qui a défié les attentes et les stratégies traditionnelles des investisseurs.

Une courbe de taux est normalement concave et croissante. La croissance découle de la surprime attendue par les acteurs financiers lorsqu'ils investissent sur le marché obligataire. À mesure que la maturité s'allonge, le risque associé à une hausse potentielle des taux ou de l'inflation augmente également, ce qui pourrait entraîner une diminution du rendement réel des obligations. La concavité de la courbe, elle, reflète l'incertitude marginale par maturité additionnelle, pour les placements les plus longs. L'altération de la convexité ne semble ainsi pas être un processus anodin et présente une complexité qui va à l'encontre de l'intuition. Lorsqu'une courbe est très décroissante, comme en décembre 2022, on s'attend à retrouver rapidement des taux beaucoup plus bas, et on anticipe une baisse de l'inflation future.

Dans ce nouveau paysage financier, les assureurs font face à un déplacement de leurs risques majeurs suite à la baisse de valeurs des actifs obligataires et l'émergence de produits offrant des taux de rendement élevés. Alors que les taux courts dépassent désormais les taux longs, les assureurs sont confrontés à un dilemme : privilégier les investissements à maturité courte pour des rendements plus attrayants, mais nécessitant de replacer des volumes de nominaux importants dans un futur proche et ouvrant le *gap* de duration ; ou bien maintenir une stratégie plus prudente en tenant compte des obligations à plus long terme envers leurs clients.

Comment les assureurs peuvent-ils naviguer dans cet environnement de taux changeant tout en maintenant leur stabilité financière et en assurant la protection de leurs assurés ? Pour répondre à cette question, il est essentiel de comprendre en profondeur les implications spécifiques de l'inversion de la courbe des taux sur les activités et les résultats des assureurs. Cette analyse permettra d'identifier les raisons de la sensibilité des compagnies d'assurance Vie à cette convexité et d'évaluer les stratégies et les mesures d'atténuation qui pourraient être mises en place pour minimiser les risques associés.

Outils de projection

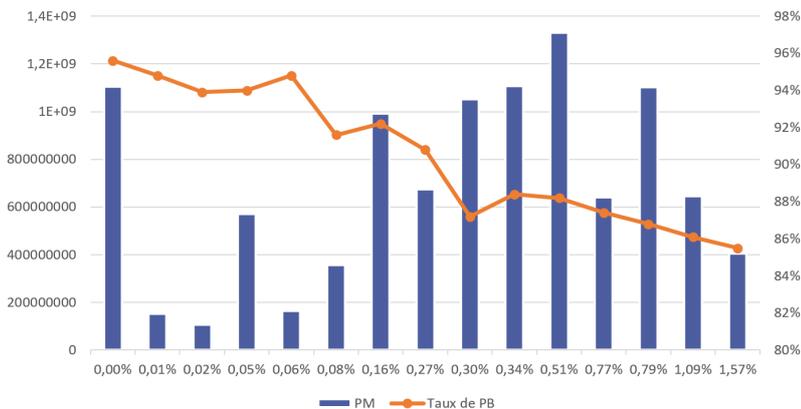
Avant de mener cette étude, il convient de mettre en place un algorithme de gestion actif-passif permettant de calculer la "meilleure estimation" des passifs d'assurance. L'outil a été conçu de zéro dans l'objectif de réaliser ce mémoire et de fournir une solution à l'entreprise pour des travaux de recherche à venir. Le modèle permet de projeter les flux de trésorerie de l'assureur en prenant en compte les interactions entre l'actif et le passif. L'ensemble de l'algorithme permet de s'assurer que les placements futurs vont permettre de respecter les obligations de l'assureur. Parmi ces engagements, les deux principaux modélisés sont les taux minimum garantis (TMG) et la gestion de la participation aux bénéfices (PB) : son versement ainsi que son provisionnement.

Afin de déterminer le coût des options et garanties, tout en se conformant aux exigences réglementaires, il est essentiel d'intégrer une approche stochastique à la modélisation en utilisant un générateur de scénarios économiques (GSE), spécialement conçu pour cet ouvrage. Les options des contrats d'assurance sont, en effet, trop difficiles à *pricer* avec une formule fermée, c'est pourquoi le modèle ALM, muni de tables de GSE risques-neutres, permet d'approcher ce montant via Monte-Carlo. Le comportement des assurés est par ailleurs étroitement lié à l'évolution des marchés financiers, et la valeur des engagements de l'assureur dépend fortement de leurs décisions de racheter ou non leurs contrats. Les options des contrats d'épargne Euro sont par ailleurs asymétriques : en cas de performances financières, l'assureur doit partager une partie des bénéfices en plus du versement des taux garantis des contrats. En cas de mauvaise année cependant, il ne peut prélever de résultats financiers, mais doit pour autant toujours verser les intérêts techniques dus.

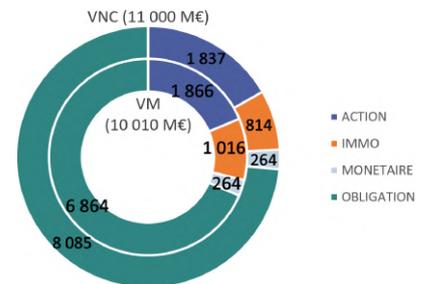
L'*output* généré par le modèle est le *best-estimate* (BE), correspondant à la moyenne actualisée des flux de trésorerie sortants, ainsi que la valeur actuelle des profits futurs (PVFP), équivalent économique pour l'assureur, mais également le capital de solvabilité requis (SCR) pour le risque de marché. Ces indicateurs permettent d'étudier les effets de la convexité des taux à travers le mémoire.

Portefeuille d'un assureur fictif

Dans le cadre de cette étude, un assureur-épargne Euro fictif a été mis en place. Son portefeuille est calibré sur des statistiques internes du cabinet de conseil, au 31 décembre 2022. Le passif est caractérisé par des *model points* à taux garantis bas, autour de 0,5%, dont la distribution est visible en figure 1a. Le montant des provisions mathématiques s'élève à 10 400 millions d'euros, auxquels s'ajoutent 150 millions de réserve de capitalisation et 450 millions de provisions pour participation aux bénéfices (PPE/PPB).



(a) *Model points* du passif. En abscisse les taux garantis des contrats.



(b) Répartition des actifs en valeur comptable (extérieure) et valeur de marché (intérieure).

FIGURE 1 : Description des portefeuilles de l'assureur fictif.

L'actif se compose d'obligations d'état sans risque, d'actions, d'immobiliers et de liquidités. Sa structure est disponible en figure 1b. La durée du portefeuille obligataire est de **8,73 ans**. Il est **en moins-value moyenne de 15%** en raison de la remontée des taux en 2022.

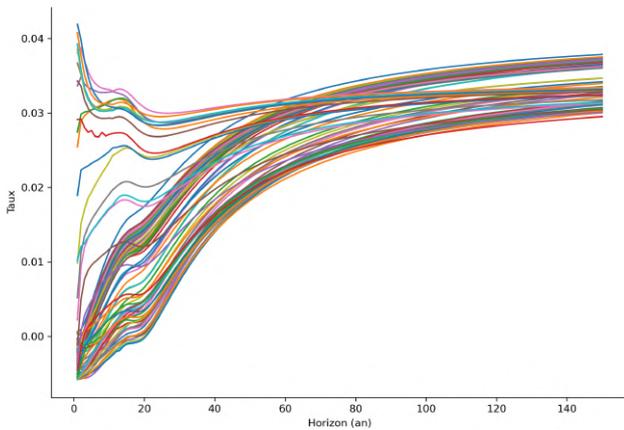
Méthodologie d'analyse de la convexité

La structure par terme des taux est la fonction qui relie chaque maturité aux taux d'intérêt des titres à revenu fixe, tels que les obligations. Cette fonction est dite convexe, comme en décembre 2022, si sa courbure vers le haut est telle que la corde reliant deux points de son graphe se situe entièrement ou partiellement au-dessus de la courbe.

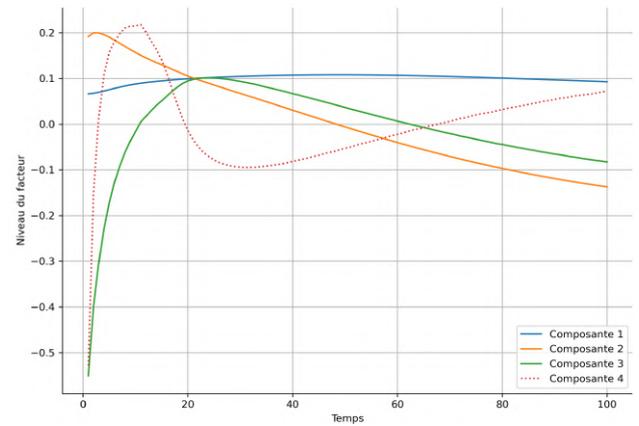
Les modèles internes des plus grosses compagnies d'assurance décomposent généralement la courbe des taux en trois facteurs distincts pour lui appliquer des chocs. Ces trois facteurs de risques permettent de

modifier la forme de la courbe lors de la génération de scénarios réels aléatoires pour la calibration des formes paramétriques permettant le calcul de leur SCR. L'approche choisie est semblable, mais vise à identifier les raisons des variations de résultats observées pour challenger la structure du modèle et ses décisions.

S'inspirant de cette méthodologie, il est possible d'effectuer une analyse en composantes principales (ACP) sur l'historique des courbes de taux réglementaires de l'EIOPA (voir figure 2a) afin d'isoler les principaux facteurs. Une telle analyse permet de décomposer les courbes de la base de données initiale en trois axes (voir figure 2b) : une composante de niveau, qui explique plus de 85% de la variance, une composante de pente pour 14%, et une composante de courbure pour le reste. Chaque courbe du corpus initial peut alors être reconstruite à l'aide de trois coefficients multiplicateurs de ces composantes. Les analyses du mémoire portent sur celle au 31 décembre 2022, une courbe de taux inversée. En appliquant des chocs sur le deuxième ou troisième coefficient de l'ACP, il est alors possible de modifier respectivement la pente ou la courbure des taux.



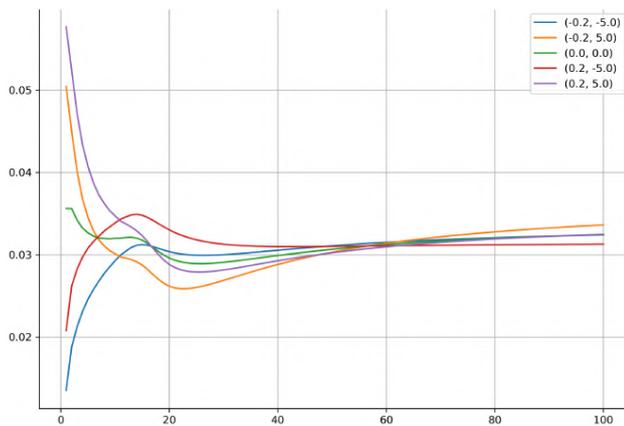
(a) Ensemble des courbes EIOPA jusqu'au 31 décembre 2022.



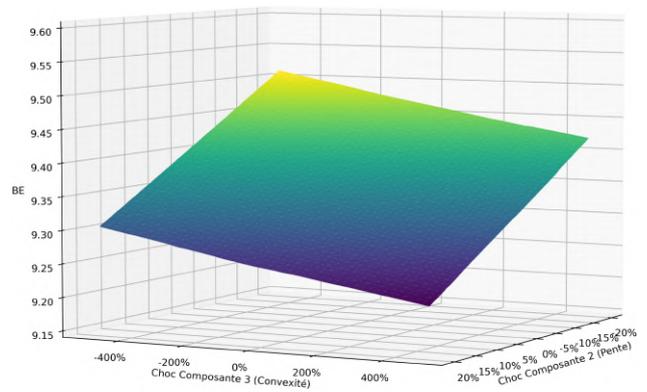
(b) Composantes extraites de l'analyse en composantes principales des courbes EIOPA.

FIGURE 2 : Application de l'analyse en composantes principales.

Ces différents chocs permettent la création de nouvelles courbes, dont l'éventail est présenté dans la figure 3a. Elles sont ensuite introduites dans le modèle ALM, sous forme de scénarios déterministes. Plus la convexité est forte, plus le taux à 1 an est élevé et plus le *best-estimate* est bas. Une observation analogue peut être établie pour la pente, menant à la nappe de BE de la figure 3b.



(a) Éventail de courbes générées par la déformation de celle de l'EIOPA.



(b) Nappe de *best-estimate* en fonction des chocs de pente et de convexité de la courbe.

FIGURE 3 : Evaluation du *best-estimate* en fonction de courbes choquées.

Résultats et sensibilités

Afin de poursuivre l'analyse, des ratios de solvabilité "proxy" ont été déterminés pour onze courbes, qui résultent d'un seul choc affectant la courbure des taux, comme illustré sur le graphique 4.

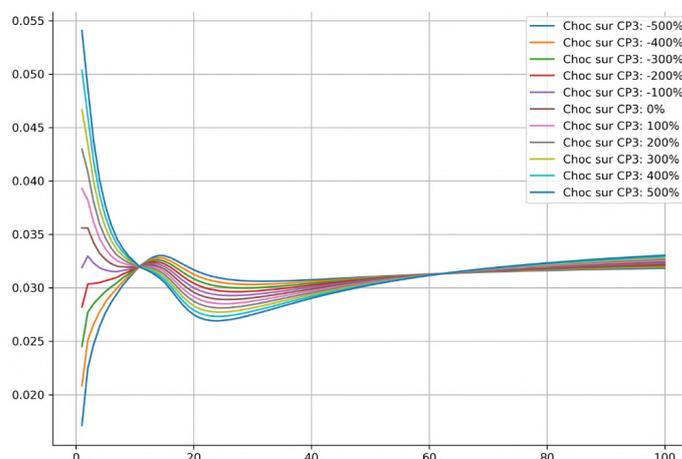


FIGURE 4 : Les 11 courbes à convexité choquée.

Ce proxy est calculé en divisant le montant de la PVFP Monte-Carlo par le SCR marché. Le tableau 1 met en évidence les résultats obtenus : la solvabilité croît avec la convexité. L'assureur semble bénéficier davantage des niveaux élevés des taux courts.

Scénario CP3	SCR taux	SCR action	SCR immo	SCR marché	PVFP	PVFP/SCR marché
-500%	46 432 504	191 461 148	62 153 869	268 891 259	482 287 231	179,36%
-400%	47 284 939	194 250 172	64 827 512	274 428 874	488 685 585	178,07%
-300%	45 832 471	196 673 683	65 277 364	276 234 792	495 109 383	179,23%
-200%	46 190 062	200 433 498	66 029 828	280 761 266	501 541 807	178,64%
-100%	44 192 487	201 455 880	64 083 706	278 826 259	508 535 127	182,38%
0%	50 174 471	200 983 278	64 253 247	282 345 675	514 217 513	182,12%
100%	49 185 395	201 207 430	64 026 092	281 731 037	520 970 127	184,92%
200%	48 520 095	201 710 343	61 816 769	279 915 270	526 008 975	187,92%
300%	48 552 019	202 495 375	62 353 270	281 154 611	532 234 886	189,30%
400%	48 797 588	200 907 745	61 830 565	279 325 080	538 378 290	192,74%
500%	47 757 353	199 695 254	60 677 122	276 497 320	544 217 145	196,83%

TABLE 1 : Niveau du SCR marché et de la PVFP stochastique en fonction du choc de convexité.

Le constat précédent est cependant conditionné à notre configuration de fonction de rachat dynamique et à la composition du portefeuille de passifs, caractérisé par ses TMG assez faibles. Une modification des *model-points* de passif pour monter les garanties moyennes à 3%, ou l'application d'un choc de niveau sur l'ACP pour faire descendre les taux à 0,5% apporte un effet nouveau : une augmentation du BE pour les courbes à la fois très pentues et très convexes. Les rachats et mauvais taux de réinvestissement à moyen terme pèsent alors proportionnellement plus que le gain à court terme de l'assureur.

La compréhension approfondie du modèle facilite son réglage selon les besoins et permet de réaliser des analyses de sensibilité sur différents scénarios. Le but est d'établir un indicateur de réactivité à la convexité des taux. **Il est conçu en évaluant le degré de variation du niveau de la PVFP Monte-Carlo, par rapport à 3 courbes issues de l'ACP précédente** (choc CP3 à -500%, 0% et 500%). En se basant sur les taux de décembre 2022, une augmentation de 500% de la courbure donne une courbe convexe et décroissante, débutant à 5,5%, illustrant l'hypothèse d'une poursuite de la hausse des taux. Une baisse de 500% entraîne une courbe concave et ascendante débutant à 1,5%, similaire au troisième trimestre de 2022. Les calculs sont aussi effectués en situation centrale, sur la courbe sans choc.

Influence de la structure de l'actif et du passif

L'actif et le passif sont des données d'*input* du modèle. Chaque assureur, en raison de la composition de ses portefeuilles de placements et de contrats, n'a pas la même sensibilité à la convexité des taux.

Un assureur proposant des contrats à taux garantis bas est **davantage sensible à la convexité des taux**, puisque le montant de réévaluation de ces contrats dépend fortement de la configuration du marché. Les TMG élevés ont pour effet de restreindre la portée de la politique de redistribution, tout en contribuant à la stabilité des résultats.

L'âge de la population est aussi une des causes majeures de sensibilité. **Plus la population est jeune, moins l'assureur est sensible à la convexité.** Une population jeune contribue significativement à allonger la durée des engagements par rapport à celle de l'actif, ce qui permet à l'assureur de ne pas être contraint de vendre ses actifs à perte pour régler les prestations de décès au cours des premières années.

La sensibilité à une convexité à la hausse ou à la baisse dépend aussi de la structure du portefeuille obligataire. Des obligations plus longues décalent l'horizon de réinvestissement, et par conséquent modifient le taux de rendement futur possible pour l'assureur. Pour une courbe décroissante convexe, par exemple, on s'attend à des rendements inférieurs à moyen terme, ce qui constitue une situation peu avantageuse. **En fonction de la durée de son actif et celle de son passif, l'assureur n'est ainsi pas exposé au même risque.**

Impact de la modification du modèle

Les assureurs peuvent apporter des ajustements à leur modèle pour se conformer à des exigences réglementaires, corriger des effets indésirables, ou encore calibrer ses réactions afin de mieux correspondre au comportement attendu dans une situation similaire. Le caractère "attendu" doit s'apprécier à la lumière d'un *backtest* ou via la cohérence avec les politiques de gestion et le cadre de décision opérationnelle de la compagnie. L'assureur a la possibilité d'intégrer à son modèle des *management actions*, comme la gestion de la participation aux bénéficiaires, le niveau de revalorisation, les choix d'actifs à acheter, etc.

Deux effets principaux sont explorés : l'incidence de la définition du taux attendu, intervenant dans la loi de rachats dynamique, et l'impact de la configuration de cette même loi. Le taux attendu peut être adapté en fonction du profil de la population assurée et de sa propension à la mobilité de son épargne. Il est implémenté dans le modèle comme une moyenne pondérée de trois indicateurs : la moyenne des taux servis sur le contrat pour les 3 dernières années ; le taux de marché à un an, pouvant s'apparenter à un taux concurrent tel que le livret A ; et le taux de marché à 10 ans. La fonction de rachat dynamique utilisée est celle proposée par l'ACPR en 2013 dans ses ONC. Les rachats conjoncturels se déclenchent si la différence entre le taux attendu et le taux servi dépasse un certain seuil, configurable via les paramètres de la fonction. Manipuler ces deux aspects permet de modifier la sensibilité du comportement des assurés face aux conditions économiques.

La première modification consiste à définir le taux attendu comme le maximum entre les trois indicateurs évoqués. Le taux attendu est alors très élevé, dès la première année, et particulièrement pour le scénario de choc de convexité à la hausse, puisqu'il dépasse les 5,5%. Des taux attendus si élevés poussent l'assureur à reprendre sa provision pour participation aux bénéficiaires afin de rehausser la revalorisation des contrats. Cette provision s'amenuise rapidement, engendrant une baisse des revalorisations les années suivantes, un mécontentement des assurés, des rachats et des ventes d'actifs en moins-value. Ce cercle vicieux s'éternise et plonge l'assureur dans une situation inconfortable.

L'effet de la redéfinition du taux attendu est d'autant plus fort s'il est couplé à une augmentation de la sensibilité de la fonction de rachats conjoncturels. En activant les rachats dès lors que la différence entre le taux attendu et le taux servi est positive, le comportement des assurés devient extrêmement volatile. Ce scénario, observable en figure 5, est celui pour lequel la sensibilité à la convexité est la plus forte.

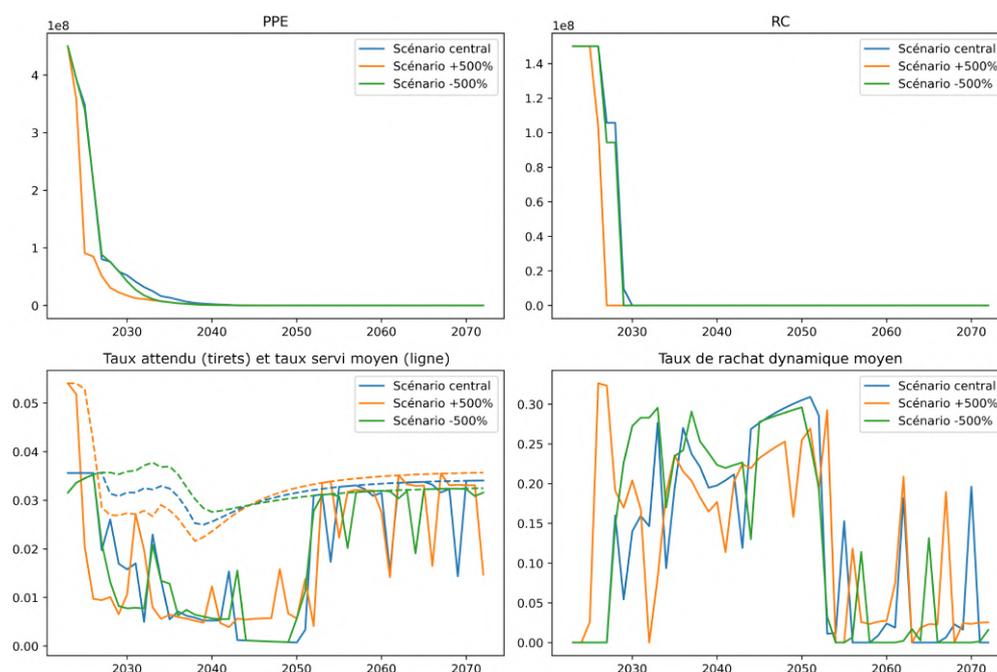


FIGURE 5 : Évolution des provisions de l'assureur dans un scénario de sensibilité extrême au marché.

Synthèse des impacts

Le tableau 2 synthétise les résultats de sensibilité. Huit contextes sont étudiés et confrontés à la situation de référence, mentionnée en première ligne. Le tableau décrit en premier lieu le niveau global de résultat de l'assureur (en déterministe et stochastique), indépendamment des chocs de convexité. La troisième colonne montre si l'augmentation de la convexité est bénéfique pour l'assureur (flèche montante), ou pas (descendante). Le coût des options et garantie est aussi observé (TVOG) : globalement entre les scénarios, puis en fonction de l'augmentation de la convexité. Enfin, l'indicateur de sensibilité est calculé, et correspond pour rappel au degré de variation du résultat de l'assureur par rapport aux courbes choquées à +500% et -500%. Sa valeur est représentée dans le graphique 6.

Nom du scénario de sensibilité	PVFP det.	PVFP sto.	Sens PVFP sto. (p.r. convexité)	Effet TVOG	Sens TVOG (p.r. convexité)	Indicateur de sensibilité
CENTRAL	=	=	↗	=	↗	=
TMG = 0%	≈	≈	↗	-	↗	≈
TMG + 100bps	≈	-	↗	++	↗	-
Investissement obligatoire uniforme	-	-	↘	+	↘	--
Taux attendu = max(n3, r1, r10)	≈	--	↗	+++	↘↗	++
Rachats dynamiques plus sensibles	≈	-	↗	++	↗	+
Combinaison des 2 scénarios précédents	≈	---	↗	++++	↘	++++
Population jeune	+++	+++	↘	++	↗	--
Population âgée	--	--	↗	+	↘	+++

TABLE 2 : Synthèse des scénarios étudiés et de leur sensibilité à la convexité des taux (par rapport au scénario central). En vert les situations les moins sensibles ; en ocre les plus à risque.

Le scénario le moins sensible à la convexité est celui où la population est jeune. La variation moyenne du ratio de solvabilité en fonction des courbes choquées est 70% plus faible que pour le scénario central. A l'inverse le plus sensible est celui où le modèle surréagit par rapport au contexte économique (à la fois sur la définition du taux attendu et de la loi de rachats) : la variation moyenne du ratio est 1186% plus

forte dans ce cas.

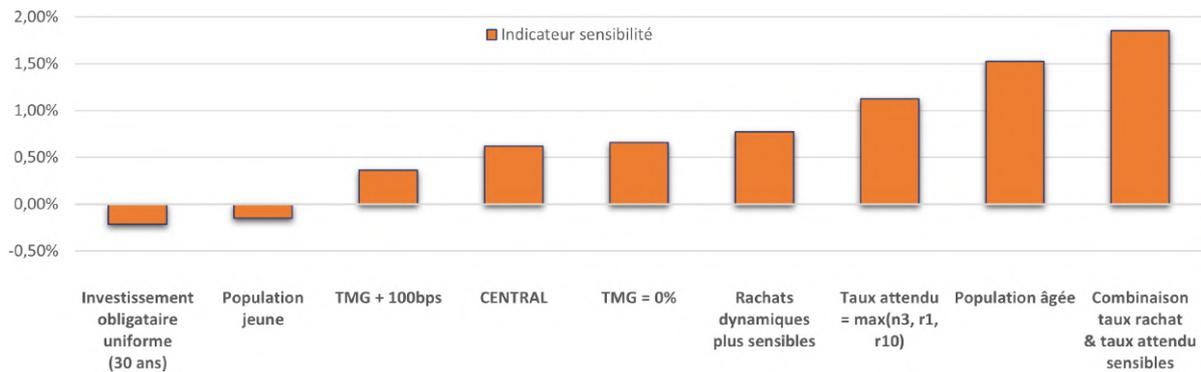


FIGURE 6 : Valeur de l'indicateur de sensibilité à la convexité du résultat de l'assureur, en pourcentage de la valeur de marché initiale.

La chronique des flux, qu'elle soit due à l'âge de la population ou au montant des sorties en raison des rachats, justifie la majorité de la sensibilité de l'assureur face à la convexité.

Conclusion

L'effet de la convexité des taux se traduit par une augmentation significative des taux d'intérêt à court terme, ayant pour conséquence d'accroître les revenus des compagnies d'assurance-vie au cours des premières années de projection. Cependant, cette convexité risque d'entraîner des attentes accrues de la part des assurés en ce qui concerne la revalorisation de leurs contrats en début de projection ALM, tout en diminuant les perspectives de réinvestissement de l'assureur à moyen terme.

Les études de sensibilité mettent en évidence l'importance de certaines hypothèses ou *inputs* du modèle, notamment la structure initiale de l'actif et du passif. En particulier, la durée de ces éléments est identifiée comme un facteur clé qui influe sur les résultats face aux variations de la courbe des taux. Plus les flux de passifs sont à courte échéance, plus l'effet de convexité de la courbe se ressent sur le niveau du BE ou de la PFVP.

La sensibilité la plus forte provient cependant des choix de modélisation et des actions implémentés au sein du modèle. L'effet de la convexité des taux sur les engagements est accru si le modèle surréagit au contexte économique. La définition des taux attendus et des rachats dynamiques est alors à ne pas négliger.

Ces conclusions mettent en évidence la nécessité pour les compagnies d'assurance de comprendre les interactions profondes au sein de leur modèle ALM, tout en prenant en compte la complexité inhérente aux différents facteurs de risque. La prise de décision éclairée fondée sur une maîtrise des métriques clés de rentabilité et de solvabilité et dans un environnement de marché en évolution rapide dépend de la maîtrise de ces éléments.

Notre étude a ainsi permis de mettre en lumière l'impact de la convexité des taux sur les compagnies d'assurance-vie et leurs pratiques de modélisation. Elle présente des limites qui ouvrent la voie à des développements futurs. Une complexification du générateur de scénario économique, du modèle ou du nombre de produits manipulés permettrait de nuancer et d'affiner les résultats. Une application pratique de l'étude sur un modèle ALM complet d'un assureur pourrait être envisagée pour une comparaison plus approfondie.

Par ailleurs, le mémoire soulève la nécessité de développer des stratégies de *hedging* pour atténuer la sensibilité de l'assureur à la convexité des taux. Cette perspective ouvre la porte à de futures recherches destinées à approfondir ces questions et à élaborer des approches novatrices pour la gestion des risques dans le secteur de l'assurance Vie, en parallèle avec les pratiques du secteur bancaire et financier.

Synthesis note

Context and issues

During 2022, Europe witnessed sustained inflation, marking an exceptional economic period. In response to this situation, the European Central Bank (ECB), through its monetary policy decisions, intensively raised its key interest rates, plunging financial players, and insurers in particular, into uncharted territory. One of the most notable consequences of this dynamic, in addition to the overall rise in rates, was the inversion of the yield curve, a rare phenomenon that defied investors' traditional expectations and strategies.

A yield curve is normally concave and rising. The growth stems from the premium expected by financial players when investing in the bond market. As maturities lengthen, the risk associated with a potential rise in rates or inflation also increases, which could lead to a reduction in the real yield on bonds. The concavity of the curve reflects the marginal uncertainty per additional maturity for the longest investments. The alteration of convexity thus seems to be no trivial process, and presents a complexity that runs counter to intuition. When a curve decreases sharply, as it did in December 2022, much lower rates are expected, and future inflation is expected to fall.

In this new financial landscape, insurers are facing a shift in their major risks following the fall in bond product values and the emergence of products offering high rates of return. With short rates now outstripping long rates, insurers are faced with a dilemma: whether to favor short-maturity investments for more attractive yields, but requiring the replacement of large nominal volumes in the near future and opening up the duration gap; or to maintain a more cautious strategy, taking into account longer-term obligations to their customers.

This raises a fundamental question: how can insurers navigate this changing rate environment while maintaining their financial stability and protecting their policyholders? To answer this question, it is essential to gain an in-depth understanding of the specific implications of the inversion of the yield curve on insurers' activities and results. This analysis will enable us to identify the reasons for the sensitivity of life insurance companies to this convexity, and to assess the strategies and mitigation measures that could be put in place to minimize the associated risks.

Projection tools

Before carrying out this study, we need to set up an asset-liability management algorithm to calculate the "best estimate" of insurance liabilities. The tool was designed from scratch for the purposes of this dissertation and to provide the company with a solution for future research work. The model projects the insurer's cash flows, taking into account the interactions between assets and liabilities. The entire algorithm ensures that future investments will meet the insurer's obligations. Among these commitments, the two main ones modeled are minimum guaranteed rates (MGR) and management of profit sharing (PS): its payment and provisioning.

In order to determine the cost of options and guarantees, while complying with regulatory requirements, it is essential to integrate a stochastic approach to modeling using an economic scenario generator (ESG), specially designed for this study. Insurance contract options are in fact too difficult to price with a closed

formula, which is why the ALM model, fitted with risk-neutral ESG tables, makes it possible to approach this amount via Monte Carlo. Policyholder behavior is also closely linked to financial market trends, and the value of the insurer’s commitments is highly dependent on their decisions to buy back their contracts or not. Euro savings contract options are also asymmetrical: in the event of good financial performance, the insurer must share part of the profits in addition to paying the guaranteed rates on the contracts. In the event of a bad year, however, the insurer may not take any financial profits, but must still pay the technical interest due.

The outputs generated by the model are the best-estimate (BE), corresponding to the discounted average of outgoing cash flows, and the present value of future profits (PVFP), the economic equivalent for the insurer, as well as the solvency capital requirement (SCR) for market risk. These indicators make it possible to study the effects of rate convexity throughout the dissertation.

Portfolio of a fictitious insurer

As part of this study, a fictional Euro savings insurer was set up. Its portfolio is calibrated to the consulting firm’s internal statistics, as at December 31, 2022. Liabilities are characterized by model points with low guaranteed rates, around 0.5%, whose distribution can be seen in figure 7a. Mathematical reserves amount to 10,400 million euros, plus 150 million in capitalization reserves and 450 million in profit-sharing reserves.

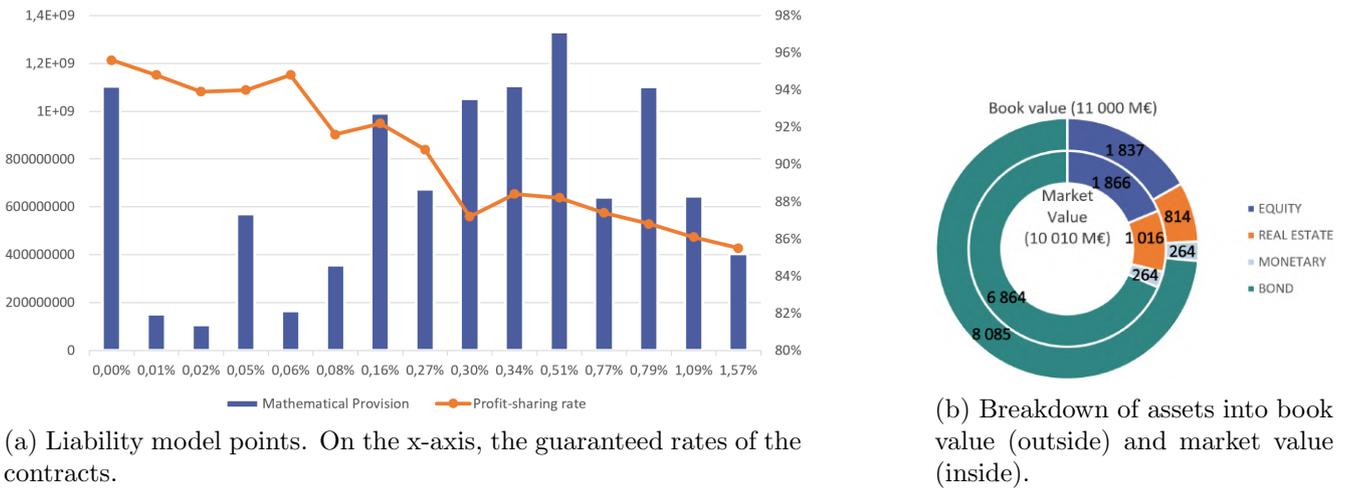


Figure 7: Description of the fictional insurer’s portfolios.

Assets include risk-free government bonds, equities, real estate and cash. Its structure is shown in figure 7b. The duration of the bond portfolio is **8.73 years**. Its **average capital loss is 15%**, due to the rise in interest rates in 2022.

Convexity analysis methodology

The term structure of rates is the function that links each maturity to the interest rates of fixed-income securities, such as bonds. This function is said to be convex, as in December 2022, if its upward curvature is such that the chord connecting two points on its graph lies entirely or partially above the curve.

The internal models of the largest insurance companies generally break down the yield curve into three distinct factors in order to apply shocks to it. These three risk factors are used to modify the shape of the curve when generating random real scenarios for calibrating the parametric forms used to calculate their SCR. The approach chosen is similar, but aims to identify the reasons for the variations in results observed, in order to challenge the structure of the model and its decisions.

Drawing on this methodology, it is possible to perform a principal component analysis (PCA) on the history of EIOPA’s regulatory rate curves (see figure 8a) in order to isolate the main factors. A three-factor analysis breaks down the curves from the initial database into three axes (see figure 8b): a level component, which explains over 85% of the variance, a slope component for 14%, and a curvature component for the remainder. Each curve in the initial corpus can then be reconstructed using three multiplier coefficients for these components. The analyses in this brief focus on the curve at 31 December 2022, an inverted yield curve. By applying shocks to the second or third coefficient of the PCA, it is then possible to modify the slope or curvature of the rates respectively.

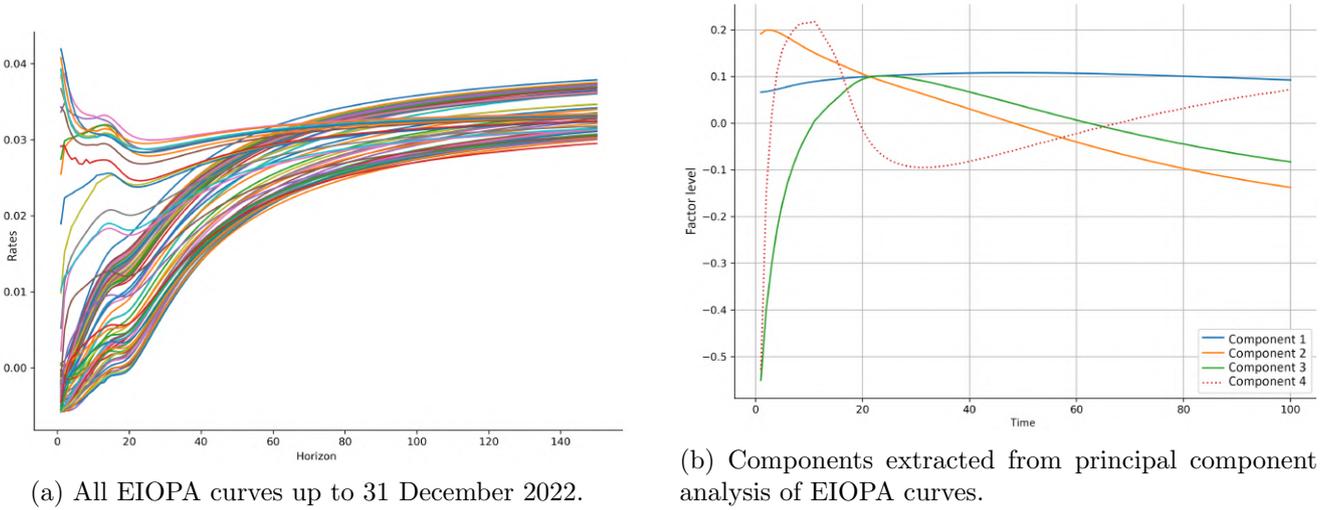


Figure 8: Application of principal component analysis.

These various shocks are used to create new curves, the range of which is shown in Figure 9a. They are then introduced into the ALM model in the form of deterministic scenarios. The greater the convexity, the higher the 1-year rate and the lower the best estimate. A similar observation can be made for the slope, resulting in the BE map shown in Figure 9b.

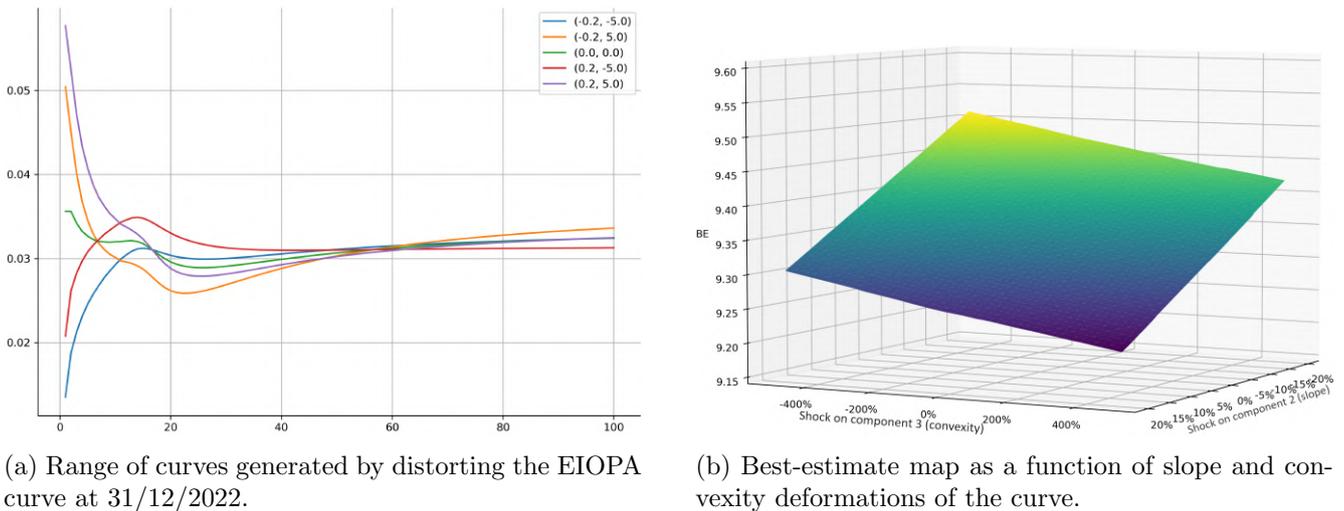


Figure 9: Best-estimate evaluation based on shocked curves.

Results and sensitivities

For further analysis, "proxy" solvency ratios have been determined for eleven curves, which result from a single shock affecting the curvature of rates, as illustrated in graph 10.

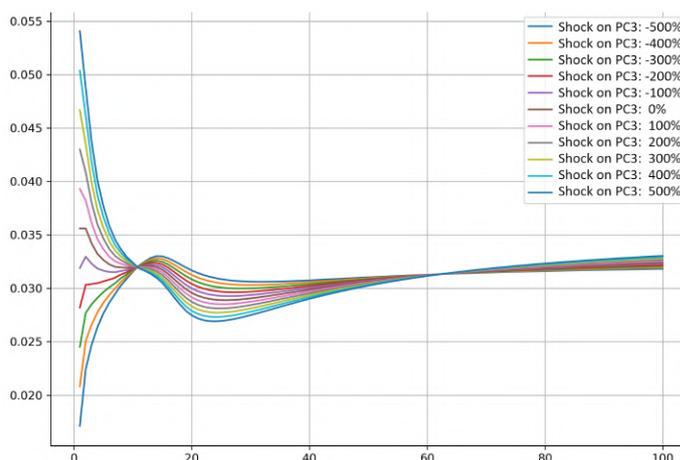


Figure 10: Les 11 courbes à convexité choquée.

This proxy is calculated by dividing the Monte Carlo PVFP by the market SCR. Table 3 highlights the results obtained: solvency increases with convexity. The insurer seems to benefit more from high levels of short rates.

CP3 scenario	Interest rate SCR	Equity SCR	Property SCR	Market SCR	PVFP	PVFP/Market SCR
-500%	46 432 504	191 461 148	62 153 869	268 891 259	482 287 231	179,36%
-400%	47 284 939	194 250 172	64 827 512	274 428 874	488 685 585	178,07%
-300%	45 832 471	196 673 683	65 277 364	276 234 792	495 109 383	179,23%
-200%	46 190 062	200 433 498	66 029 828	280 761 266	501 541 807	178,64%
-100%	44 192 487	201 455 880	64 083 706	278 826 259	508 535 127	182,38%
0%	50 174 471	200 983 278	64 253 247	282 345 675	514 217 513	182,12%
100%	49 185 395	201 207 430	64 026 092	281 731 037	520 970 127	184,92%
200%	48 520 095	201 710 343	61 816 769	279 915 270	526 008 975	187,92%
300%	48 552 019	202 495 375	62 353 270	281 154 611	532 234 886	189,30%
400%	48 797 588	200 907 745	61 830 565	279 325 080	538 378 290	192,74%
500%	47 757 353	199 695 254	60 677 122	276 497 320	544 217 145	196,83%

Table 3: Level of market SCR and stochastic PVFP as a function of the convexity shock.

The above observation is, however, conditional on our dynamic buyback function configuration and the composition of the liabilities portfolio, which is characterised in particular by fairly low MGRs because they are calibrated to a real situation at 31/12/2022 (around 0.5%). Modifying the liability model-points to raise average guarantees to 3%, or applying a level shock to the PCA to bring rates down to 0.5% would have a new effect: an increase in the BE for curves that are both very steep and very convex. Surrenders and poor reinvestment rates in the medium term then weigh proportionately more than the insurer's short-term gain.

A thorough understanding of the model makes it easy to fine-tune as required, and enables sensitivity analyses to be carried out on different scenarios. The aim is to establish an indicator of reactivity to rate convexity. **It is designed by assessing the degree of variation in the level of Monte Carlo PVFP, relative to 3 curves derived from the previous PCA (CP3 shock at -500%, 0% and 500%).** Based on December 2022 rates, a 500% increase in curvature gives a convex and decreasing curve, starting at 5.5%, illustrating the hypothesis of a continuing rise in rates. A 500% decrease results in a concave, ascending curve starting at 1.5%, similar to the third quarter of 2022. Calculations are also carried out in the central situation, on the curve without shocks.

Influence of asset and liability structure

Assets and liabilities are input data for the model. Each insurer, because of the composition of its investment and contract portfolios, does not have the same sensitivity to interest rate convexity.

An insurer offering contracts with low guaranteed rates is **more sensitive to rate convexity**, since the revaluation amount of these contracts is highly dependent on market configuration. High MGRs have the effect of restricting the scope of the redistribution policy, while contributing to earnings stability.

The age of the population is also a major cause of sensitivity. **The younger the population, the less sensitive the insurer is to convexity**. A young population contributes significantly to lengthening the duration of liabilities relative to assets, so that the insurer is not forced to sell assets at a loss to pay death benefits in the early years.

Sensitivity to upward or downward convexity also depends on the structure of the bond portfolio. Longer bonds shift the reinvestment horizon, and consequently modify the possible future rate of return for the insurer. For a convex downward curve, for example, lower yields are expected in the medium term, which is not a very advantageous situation. **Depending on the duration of its assets and liabilities, the insurer is not exposed to the same risk.**

Impact of changes to the model

Insurers can make adjustments to their model to comply with regulatory requirements, rectify undesirable effects, or calibrate its reactions to better match expected behaviour in a similar situation. The 'expected' aspect should be assessed in the light of a backtest or through consistency with the company's management policies and operational decision-making framework. The insurer has the option of integrating equity management into its model, such as the management of profit sharing, the level of revaluation, the choice of assets to purchase, etc.

Two main effects are explored: the impact of the definition of the expected rate, used in the dynamic surrender law, and the impact of the configuration of this same law. The expected rate can be adapted according to the profile of the insured population and its propensity for savings mobility. It is implemented in the model as a weighted average of three indicators: the average of the rates paid on the contract over the last 3 years; the one-year market rate, which may be similar to a competing rate such as Livret A; and the 10-year market rate. The dynamic buyback function used is the one proposed by the ACPR in 2013 in its ONCs*. Cyclical surrenders are triggered if the difference between the expected rate and the rate paid exceeds a certain threshold, which can be configured via the function parameters. Manipulating these two aspects makes it possible to modify the sensitivity of policyholders' behaviour to economic conditions.

The first change is to define the expected rate as the maximum between the three indicators mentioned. The expected rate is then very high, from the first year, and particularly for the upward convexity shock scenario, since it exceeds 5.5%. Such high expected rates prompt the insurer to take back its provision for profit sharing in order to increase the revaluation of contracts. This provision is rapidly depleted, leading to a fall in revaluations in subsequent years, policyholder dissatisfaction, surrenders and sales of depreciating assets. This vicious circle drags on, leaving the insurer in an uncomfortable position.

The effect of redefining the expected rate is all the greater if it is combined with an increase in the sensitivity of the cyclical surrender function. By activating surrenders as soon as the difference between the expected rate and the rate paid is positive, policyholder behaviour becomes extremely volatile. This scenario, shown in Figure 11, is the one with the highest sensitivity to convexity.

* *Orientations Nationales Complémentaires*

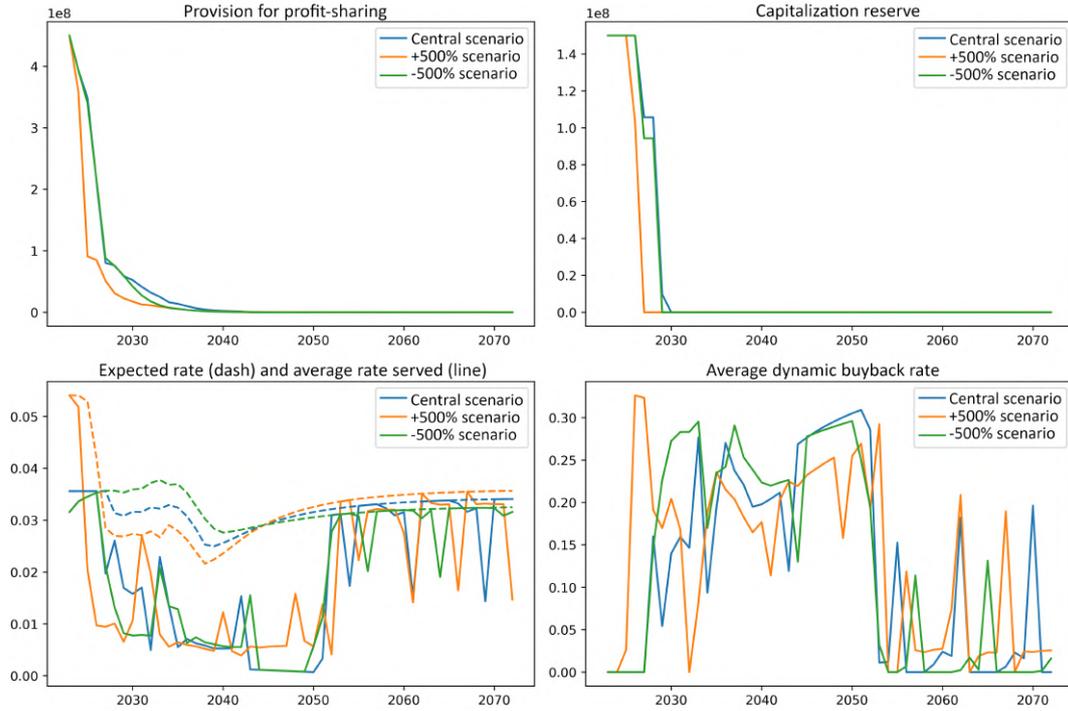


Figure 11: Changes in the insurer's reserves in a scenario of extreme market sensitivity.

Summary of impacts

Table 4 summarises the sensitivity results. Eight contexts are studied and compared with the reference situation mentioned in the first row. The table first describes the insurer's overall level of earnings (deterministic and stochastic), independently of convexity shocks. The third column shows whether the increase in convexity is beneficial to the insurer (upward arrow), or not (downward arrow). The cost of options and guarantees is also observed (TVOG): globally between sensitivity scenarios, then as a function of increasing convexity. Finally, the sensitivity indicator is calculated, and corresponds, as a reminder, to the degree of variation of the insurer's result in relation to the shocked curves at +500% and -500%. Its value is shown in the graph 12.

Sensitivity scenario name	Deterministic PVFP	Stochastic PVFP	Direction of sto. PVFP (w.r.t convexity)	TVOG effect	Direction of TVOG (w.r.t convexity)	Sensitivity indicator
CENTRAL	=	=	↗	=	↗	=
Guaranteed Minimum Rate = 0%	≈	≈	↗	-	↗	≈
Guaranteed Minimum Rate + 100bps	≈	-	↗	++	↗	-
Uniform bond investment (30 years)	-	-	↘	+	↘	--
Expected rate = max(n3, r1, r10)	≈	--	↗	+++	↘↗	++
More sensitive dynamic buybacks	≈	-	↗	++	↗	+
Combination of the 2 previous scenarios	≈	---	↗	++++	↘	++++
Young population	+++	+++	↘	++	↗	--
Elderly population	--	--	↗	+	↘	+++

Table 4: Summary of the scenarios studied and their sensitivity to interest rate convexity (compared with the central scenario). In green, the least sensitive situations; in ochre, those most at risk.

The less sensitive scenario relative to convexity is the one with the youngest population. The average variation of the solvency ratio as a function of the shocked curves is 70% lower than for the central scenario. Conversely, the most sensitive scenario is the one in which the model over-reacts to the economic context

(both on the definition of the expected rate and the law of redemptions): the average variation in the ratio is 1186% higher in this case.

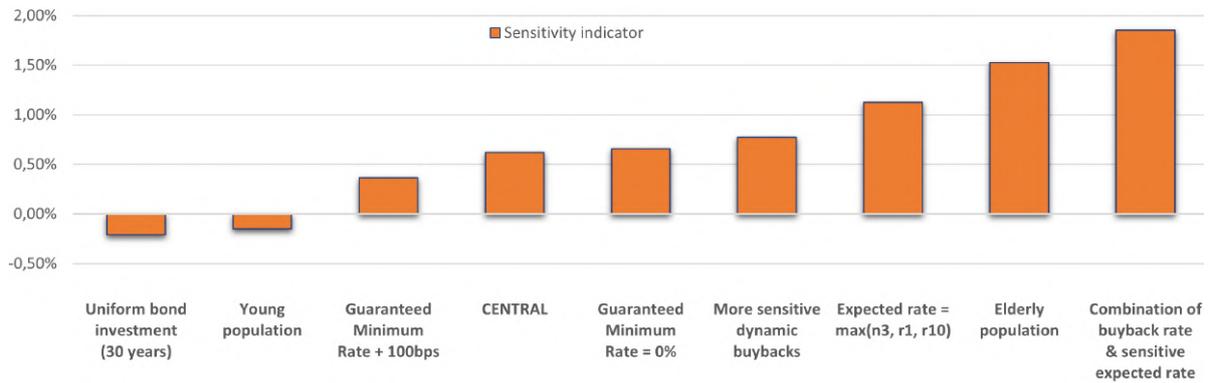


Figure 12: Value of the insurer's income convexity sensitivity indicator, as a percentage of the initial market value.

The chronicity of flows, whether due to the age of the population or the amount of outflows due to surrenders, justifies most of the insurer's sensitivity to convexity.

Conclusion

The effect of interest rate convexity translates into a significant increase in short-term interest rates, resulting in higher revenues for life insurance companies in the early years of the projection. However, this convexity is likely to lead to increased expectations on the part of policyholders regarding the revaluation of their contracts at the start of the ALM projection, while reducing the insurer's reinvestment prospects in the medium term.

Sensitivity studies highlight the importance of certain assumptions or inputs in the model, especially the initial structure of assets and liabilities. In particular, the duration of these elements is identified as a key factor influencing results in the face of changes in the yield curve. The shorter the maturity of liability flows, the greater the effect of curve convexity on the level of BE or PFVP.

However, the greatest sensitivity arises from the modelling choices and actions implemented within the model. The effect of the convexity of rates on liabilities is increased if the model over-reacts to the economic context. The definition of expected rates and dynamic redemptions should therefore not be neglected.

These findings highlight the need for insurance companies to understand the deep interactions within their ALM model, while taking into account the inherent complexity of different risk factors. Informed decision-making based on a mastery of key profitability and solvency metrics and in a rapidly changing market environment depends on mastery of these elements.

Our study has shed light on the impact of rate convexity on life insurance companies and their modelling practices. There are limitations, however, which pave the way for future developments. Making the economic scenario generator, the model or the number of products handled more complex would help to qualify and refine the results. A practical application of the study on a complete ALM model of an insurer could be considered for a more in-depth comparison.

In addition, the brief raises the idea that hedging strategies need to be developed to mitigate the insurer's sensitivity to rate convexity. This perspective opens the door to future research aimed at exploring these issues in greater depth and developing innovative approaches to risk management in the life insurance sector, in line with practices in the banking and financial sector.

Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude et mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire au sein d'EXIOM Partners.

Je souhaite en premier lieu exprimer ma reconnaissance envers Mathieu SCHNEIDER et Mohamed ELAROUI. Leur confiance, leurs conseils avisés et leur accompagnement constant ont été d'une grande aide tout au long de cette expérience.

Je remercie également Pierre MONTESINOS, mon tuteur académique, pour son encadrement et ses précieux conseils tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Un grand merci à Quentin GUIBERT, responsable de mon parcours d'étude à l'université Paris Dauphine-PSL, pour son engagement et son aide précieuse dans l'organisation et le suivi de mon cursus.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à Elisabeth DE VANDIERE, Taha BOUTOUBA, Kilian ZURBACH et Brice BALAGOUROU. Leur aide et leur expertise ont grandement contribué à la réussite de ce projet.

Je n'oublie pas mes collègues et amis, Lucas GERACI, Stella STAVILA, Nicxan HENSMAN STALIN, et Joffrey SUZAT, pour tous les bons moments passés ensemble. Leur soutien et leur camaraderie ont rendu cette période encore plus enrichissante.

Je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien inconditionnel tout au long de ce parcours. Leur encouragement constant a été une source de motivation inestimable.

Enfin, je tiens à remercier toutes les autres personnes non mentionnées, mais qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire. Leur aide et leur soutien ont été précieux et je leur en suis profondément reconnaissant.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	13
Remerciements	21
Table des matières	23
Introduction	25
1 L'assurance vie face à la remontée des taux en 2022	27
1.1 Contexte macroéconomique et enjeux pour les assureurs	27
1.2 Analyse approfondie de la courbe des taux	35
1.3 L'assurance vie : un choix d'épargne toujours attractif	43
2 Développement des modèles	53
2.1 Objectifs et principes de la gestion actif-passif	53
2.2 Le générateur de scénarios économiques	58
2.3 Le modèle ALM : la gestion actif-passif	69
2.4 Les limites des modèles	85
3 Risque de convexité des taux d'intérêt	89
3.1 Quantifier les déformations des courbes de taux	90
3.2 Déformations des courbes de taux, impact sur le BE et la PVFP	96

3.3	Au-delà du <i>best-estimate</i> : étude du SCR marché	104
3.4	Études secondaires : TMG haut, taux bas	109
3.5	Ajuster la volatilité face aux changements de la courbe des taux?	113
3.6	Limites de l'analyse de convexité	114
4	Sensibilité des assureurs face à la convexité des taux	117
4.1	Scénario initial central	119
4.2	Influence de l'actif et du passif	121
4.3	Influence du modèle	125
4.4	Synthèse des résultats et analyse d'indicateurs	129
4.5	Perspectives d'approfondissement	136
	Conclusion	141
	Bibliographie	142
A	Annexes	147
A.1	Rappels sur les modèles de taux et le calcul stochastique	147
A.2	Résolutions d'EDS : Vasicek et Hull White	149
A.3	Fondements de Monte-Carlo et réduction de variance	151
A.4	Passage d'une mesure historique à une mesure risque neutre	154
A.5	Configuration du modèle ALM	156
A.6	Séries temporelles des coefficients d'ACP des courbes EIOPA	157
A.7	La méthode d'interpolation/extrapolation de Smith-Wilson	160
A.8	Choc UP et DOWN de l'EIOPA	161
A.9	Graphes supplémentaires des cas d'études	162

Introduction

La dynamique des taux d'intérêt revêt un rôle critique dans l'économie globale, influençant les décisions d'investissement, les comportements d'épargne et servant de baromètre central pour l'évaluation des risques et des opportunités sur les marchés financiers. La période de 2022 à 2023 s'est révélée exceptionnelle à cet égard.

L'augmentation soudaine de l'inflation à l'échelle mondiale, en réaction aux crises récentes telles que la pandémie de COVID-19 et le conflit armé en Ukraine, a perturbé l'environnement économique. En réponse à cette inflation persistante et grâce à des politiques monétaires, la Banque Centrale Européenne (BCE) a décidé à partir de juillet 2022 d'augmenter les taux directeurs en Europe. Les décisions de la BCE ont entraîné une hausse significative des taux courts, tandis que les taux longs sont restés relativement stables, voire ont baissé. Cette divergence entre les taux courts et longs a entraîné une modification notable de la structure par terme des taux, transformant sa forme de concave à convexe, marquant ainsi **l'inversion de la courbe des taux**.

Dans ce contexte, les assureurs, en tant qu'acteurs majeurs de la sphère financière, sont confrontés à un ensemble complexe de défis. La remontée des taux a des conséquences multiples sur leurs stratégies et leur santé financière. En effet, des taux plus élevés présentent l'avantage de générer des rendements plus intéressants lors du réinvestissement, mais ils entraînent également une dévalorisation des actifs actuellement détenus, notamment les obligations. De plus, le risque lié aux rachats s'accroît pour les assureurs, car les taux concurrentiels, comme ceux du livret A, s'ajustent rapidement à la nouvelle situation économique, tandis qu'ils restent limités par la composition de leurs portefeuilles existants.

Les organismes d'assurance s'appuient également sur les hypothèses de marché pour établir leurs bilans et effectuer leurs calculs de solvabilité. En vertu de la directive solvabilité II, les organismes d'assurance-vie doivent être en mesure de projeter et d'actualiser les flux d'actifs et de passifs probables pour l'évaluation de leurs engagements. L'utilisation de modèle ALM (*Asset & Liabilities Management*) est fondamentale pour ces évaluations, en raison des interactions complexes qui interviennent entre les deux côtés du bilan.

L'environnement de taux actuel pose une question essentielle : **quel est l'impact de la convexité de la courbe des taux sur un assureur épargne Euro ? D'où provient sa sensibilité ?**

Ce mémoire, structuré en quatre chapitres, cherchera à répondre à cette interrogation. Son ambition est double. D'une part, il aspire à fournir une compréhension approfondie du contexte actuel, mettant en lumière les nuances et les spécificités du paysage économique. D'autre part, il vise à fournir aux professionnels de l'assurance des analyses approfondies pour les aider à naviguer dans cet environnement tumultueux avec prudence et perspicacité.

Le premier chapitre présentera le contexte global de l'étude, les définitions importantes et les aspects liés à la réglementation. Dans un second volet, la conception et le développement des outils de projection seront exposés. Une troisième partie présentera la méthodologie de décomposition et d'analyse de la structure par terme des taux. Le dernier chapitre tentera de déterminer les causes de la sensibilité des assureurs à la convexité des taux, en prenant en compte leurs particularités.

Chapitre 1

L'assurance vie face à la remontée des taux en 2022 et 2023

Depuis près d'un an, une période d'inflation soutenue s'est installée en Europe et n'est pas sans conséquence sur les réinvestissements des assureurs. Cette inflation, principalement due aux décisions de politique monétaire de la BCE, a entraîné un phénomène inhabituel : l'inversion de la courbe des taux. Les taux courts sont en effet plus élevés que les taux longs en ce début de 2023.

Cette situation pousse les assureurs à privilégier les actifs à maturité courte qui offrent donc des rendements financiers plus attractifs. Il suffit alors de réitérer les opérations de réinvestissement rapide, pour pouvoir maintenir un niveau de performance financière confortable. Cependant, cette orientation vers des investissements à brève échéance présente des risques non négligeables pour les assureurs, en raison des engagements plus ou moins prolongés qu'ils détiennent envers leurs assurés.

La recherche de rentabilité se heurte en effet aux contraintes de solvabilité des assureurs sur le long terme, qui ont la responsabilité primordiale de protéger leurs assurés en investissant dans des actifs à faible risque et **en accord avec la structure de leurs engagements**. Investir seulement sur des actifs à maturité courte sous-entend qu'en cas de rechute des taux, les assureurs n'auraient plus de supports générant des flux financiers suffisants et stables dans le temps pour respecter leurs obligations. Les compagnies d'assurance doivent donc tenir compte des fluctuations de la courbe des taux afin d'optimiser leur stratégie de réinvestissement et d'assurer une gestion efficace de leurs engagements à long terme envers leurs assurés.

Cette partie du mémoire se concentre sur l'étude de l'environnement de taux changeant et son impact sur les fonds en euros. Dans un premier temps, il est essentiel de revenir sur la période de taux historiquement bas et d'analyser les causes et les conséquences de cette situation pour les assureurs. Une étude des décisions prises par les institutions financières européennes permettra ensuite de comprendre la dynamique de la remontée rapide des taux observée en 2022. Enfin, quelques chiffres clés concernant l'assurance vie en France seront examinés, tout en présentant le cadre réglementaire dans lequel elle opère et les outils de projection utilisés pour assurer la conformité réglementaire.

1.1 Contexte macroéconomique et enjeux pour les assureurs

Cette section examine le contexte macroéconomique qui a marqué les dernières décennies, en mettant l'accent sur la chute progressive des taux d'intérêt des années 1980 à 2021. L'impact de l'action de la BCE dans la remontée des taux en 2022 et 2023 sera ensuite analysé. Enfin, les enjeux liés à la gestion du capital pour les assureurs seront abordés, compte tenu de ces fluctuations macroéconomiques.

1.1.1 Un aperçu de la période de taux d'intérêt bas

Les dernières décennies ont été marquées par une baisse continue des taux d'intérêt à l'échelle mondiale, avec des implications significatives pour l'économie et les différents acteurs du secteur financier. Cette tendance à la baisse, s'étalant des années 1980s jusqu'à récemment, a été le résultat de divers facteurs inter-connectés. Cette partie se concentre sur la période des années 2000 jusqu'à aujourd'hui.

Pour commencer, les **politiques monétaires accommodantes** mises en place par les banques centrales ont joué un rôle clé dans la chute des taux d'intérêt. À la suite de la crise financière de 2008, les principales institutions monétaires telles que la Banque centrale européenne (BCE) et la Réserve fédérale américaine (Fed), ont adopté des mesures pour stimuler la croissance économique et prévenir le risque de déflation. Ces politiques accommodantes ont impliqué une augmentation de la masse monétaire disponible, ce qui a eu pour effet de réduire les taux d'intérêt et d'encourager les investissements et la consommation (LÉVY-GARBOUA et MONNET, 2016). Les politiques accommodantes sont utilisées pour baisser les taux, mais la banque centrale peut à l'inverse adopter une politique monétaire restrictive pour les élever, comme présenté dans le schéma de la figure 1.1. Ces deux options ont des conséquences directes sur la consommation des ménages.

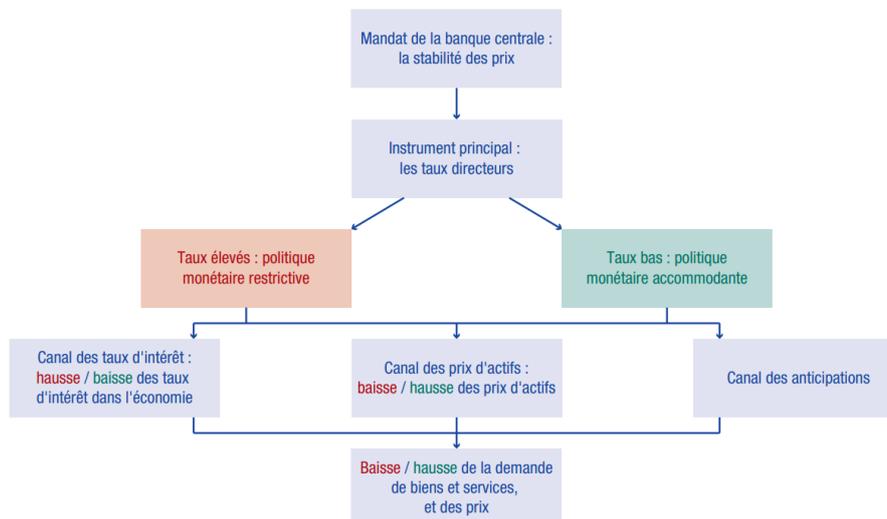


FIGURE 1.1 : La transmission de la politique monétaire (Source : BANQUE DE FRANCE, 2022).

Un second facteur a été la **baisse générale de l'inflation** observée dans de nombreux pays au cours de cette période. Lorsque l'inflation est faible, les banques centrales ont davantage de marge de manœuvre pour maintenir des taux d'intérêt bas afin de stimuler l'activité économique.

La **crise de la dette souveraine** qui a éclaté dans certains pays de la zone euro, tels que la Grèce, l'Espagne et l'Italie, a elle aussi eu un impact significatif sur les taux d'intérêt. Les investisseurs ont cherché à se protéger en se tournant vers des actifs considérés comme plus sûrs, tels que les obligations d'État allemandes et françaises. Cette demande accrue pour ces titres a entraîné une augmentation des prix, donc une baisse des rendements obligataires, et par conséquent, une diminution des taux d'intérêt (LÉVY-GARBOUA et MONNET, 2016).

Les mesures de **quantitative easing** (assouplissement quantitatif) mises en œuvre par les banques centrales ont également contribué à la baisse des taux d'intérêt. Ces programmes ont impliqué l'achat massif de titres de dette sur les marchés, notamment des obligations d'État et des titres adossés à des créances hypothécaires. En augmentant la demande pour ces titres, les banques centrales ont fait

artificiellement augmenter leur prix et réduire leurs rendements, ce qui a participé, encore une fois, à la diminution des taux d'intérêt (LISSOWSKI et NESSI, 2017).

Enfin, **l'incertitude économique et géopolitique** a joué son rôle dans le phénomène. Les événements tels que la crise financière mondiale, la crise de la dette en Europe, le Brexit et les tensions commerciales internationales ont créé une atmosphère d'incertitude sur les marchés. Dans de telles situations, les investisseurs ont tendance à chercher des actifs considérés comme plus sûrs, ce qui a entraîné une baisse des taux d'intérêt des obligations (LISSOWSKI et NESSI, 2017). On pourrait aussi mentionner la pandémie de COVID19 qui a grandement participé à cette incertitude en déséquilibrant l'économie avec les nombreux confinements et arrêts d'activités.

Un indicateur clé : le taux des OATs 10 ans

Les banques et assureurs peuvent surveiller le taux des Obligations Assimilables au Trésor (OATs) pour suivre l'évolution globale des taux en France. Ces obligations sont des emprunts d'État de haute qualité émis pour une durée de 7 à 50 ans. Notées AA par les agences de notation, elles présentent un risque de défaut extrêmement faible. Plus spécifiquement, le taux de l'OAT 10 ans, publié quotidiennement sur le site de la Banque de France, est particulièrement suivi par les acteurs économiques. Ce taux représente approximativement le coût d'emprunt à long terme pour les banques et a donc une influence indirecte sur les prêts à long terme accordés aux ménages, tels que les crédits immobiliers.

Rappelons que les obligations constituent l'investissement privilégié des assureurs, car elles apportent des flux financiers continus dans le temps et permettent ainsi de s'assurer une performance financière plutôt stable dans le temps. Plus précisément, les assureurs accordent une grande importance aux obligations souveraines en raison de leur caractère sûr et de leur faible risque*. Lors des calculs réglementaires de solvabilité, qui seront explorés ultérieurement, ces actifs ne pénalisent que peu voire pas du tout l'assureur.

Remarque : 10 ans est très proche de la durée des engagements des assureurs vie. C'est-à-dire que les flux sortants actualisés et proratisés se font en moyenne sur 10 ans. Avoir en portefeuille des obligations de maturité égale à la durée du passif permet d'éviter les **gaps de durée** : les flux d'entrée d'argent (produits financiers par exemple) sont alors parfaitement adossés avec les flux de sorties (prestations sur le portefeuille : rachat, décès, etc.). Ainsi, pour un assureur vie, le taux de l'OAT 10 ans est un très bon estimateur de son taux de refinancement sans risque, en accord avec la structure de son passif.

Le graphique suivant présente l'évolution du taux de l'OAT 10 ans entre 2008 et 2023. On observe une baisse continue de l'indice jusque 2021, avant de remonter brutalement ces deux dernières années.

*Les obligations souveraines allemandes, notées AAA, font référence en Europe lorsqu'il s'agit d'obligations « sans risque ».



FIGURE 1.2 : Evolution de l'OAT 10 ans en France depuis 2008 (BANQUE DE FRANCE, 2023c).

Le contexte de taux bas avait forcé les assureurs à réinvestir sur des obligations à rendements bien plus faibles que celles qu'ils avaient en portefeuille initialement. Face à la remontée des taux récente, ces obligations ont perdu de leur valeur, mettant les assureurs dans une position délicate, le risque étant que leurs assurés demandent des rendements plus importants et qu'ils soient dans l'incapacité de satisfaire cette requête.

Afin de comprendre les évolutions récentes de ce taux et les conséquences pour les assureurs, il convient d'abord de comprendre quels sont les acteurs clés ayant pu influencer à tel point sur les taux, ainsi que le contexte économique ayant pris place depuis 2022.

1.1.2 La remontée des taux provoquée par l'action de la BCE

La Banque Centrale Européenne (BCE)

Depuis 1999, la politique monétaire de la zone euro est sous la responsabilité de la BCE. Ses prérogatives et objectifs sont dictés par le TFUE (Traité de Fonctionnement de l'Union Européenne). L'article 127 (UNION EUROPÉENNE, 2023) précise ainsi :

1. *L'objectif principal du Système européen de banques centrales, ci-après dénommé "SEBC", est de maintenir la stabilité des prix. [...]*
2. *Les missions fondamentales relevant du SEBC consistent à :*
 - *définir et mettre en œuvre la politique monétaire de l'Union ;*
 - *[...]*

La politique monétaire de la BCE a connu des évolutions significatives ces dernières années, notamment avec sa participation dans la remontée des taux dès 2022. La BCE joue un rôle central dans la régulation de l'activité économique de la zone euro, en influençant la création de monnaie et le volume de liquidité en circulation (1.3). Comprendre le rôle de la BCE dans la politique monétaire et la création monétaire est essentiel pour appréhender son impact sur l'économie.

La **création monétaire** est un processus clé géré par les banques commerciales. Contrairement à l'époque où la monnaie était adossée à des métaux précieux, la création monétaire repose désormais principalement sur le crédit bancaire. Lorsqu'une banque commerciale accorde un crédit, elle inscrit simplement le montant prêté sur le compte de son client. À ce stade, il n'y a pas de création monétaire proprement dite. Celle-ci intervient lorsque le client utilise cet argent pour effectuer des transactions avec d'autres acteurs économiques, ce qui entraîne une circulation monétaire. En remboursant le crédit, la destruction monétaire se produit, réduisant les actifs et les passifs de la banque au fur et à mesure du remboursement du capital, tandis que les intérêts demeurent présents dans le bilan de la banque.

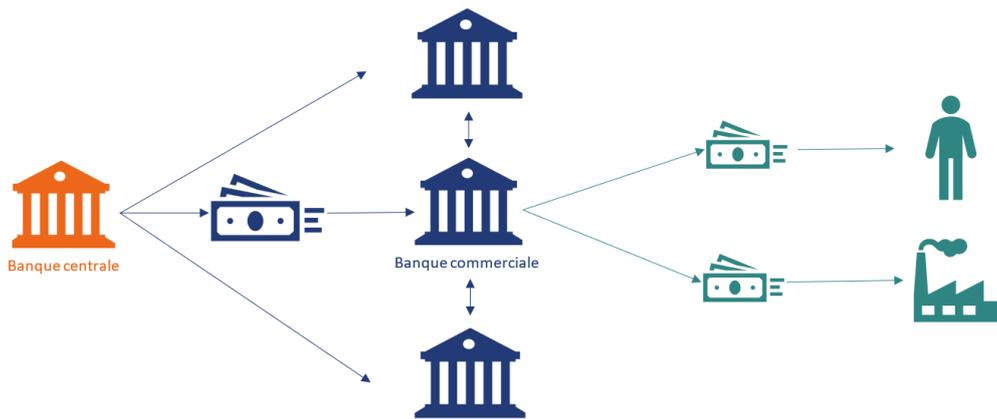


FIGURE 1.3 : La banque centrale contrôle le volume de liquidité en circulation, et contraint les banques commerciales dans leur activité. Cette influence se répercute sur l’activité économique du pays et la consommation des ménages.

Le pilotage de la création monétaire est un enjeu crucial pour les banques centrales. En cas de forte inflation, la BCE peut décider de relever ses taux directeurs afin d’augmenter le coût du crédit pour les ménages et les entreprises, réduisant ainsi la consommation et les investissements. Cette contraction de l’activité économique ralentit la croissance des prix. En revanche, en cas d’inflation jugée trop faible, la réduction des taux directeurs vise à stimuler l’activité économique en offrant des financements moins coûteux aux ménages et aux entreprises. L’écart entre le volume de nouveaux prêts et le volume de remboursements reflète si le monde est en période de contraction ou d’expansion monétaire.

Les banques commerciales ont quant à elles une capacité limitée à créer de la monnaie, car elles sont soumises à des exigences de refinancement fixées par la banque centrale pour garantir leur capacité à faire face à d’importantes demandes de retrait de liquidités. Lorsqu’une banque accorde un prêt, elle doit être en mesure de restituer cette monnaie en « monnaie banque centrale ». À l’origine du crédit, seule la monnaie de la banque commerciale est créditée. Le schéma 1.4 résume le rôle de la monnaie créée par les banques commerciales et la monnaie « banque centrale ».

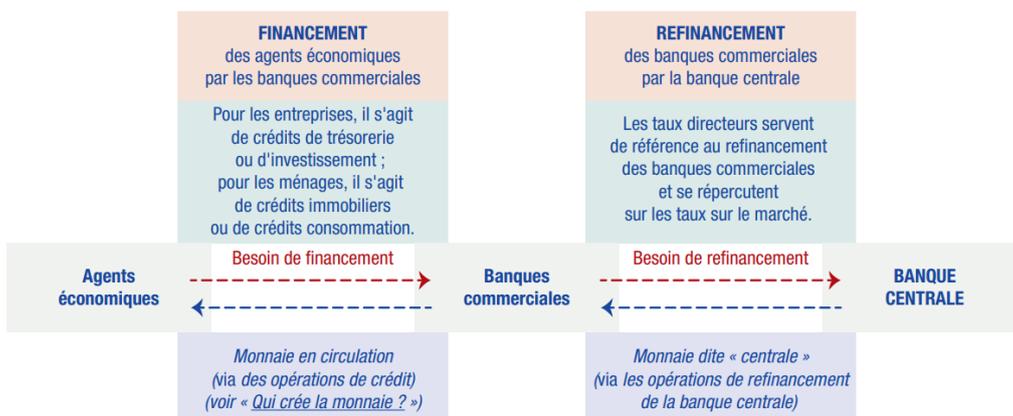


FIGURE 1.4 : Le circuit du financement de l’économie (Source : BANQUE DE FRANCE, 2022).

La BCE utilise différents instruments de politique monétaire pour mettre en œuvre sa stratégie. Les mesures conventionnelles comprennent les opérations d’*open market*, qui consistent en des opérations

de refinancement à court terme destinées aux banques commerciales, les facilités permanentes qui permettent aux banques commerciales de retirer ou de déposer de la liquidité bancaire au jour le jour, et les réserves obligatoires imposées aux banques commerciales en fonction de leurs dépôts. En ajustant le volume des réserves obligatoires, la banque centrale peut influencer le volume de liquidité disponible sur le marché interbancaire. En plus des mesures conventionnelles, la BCE a également recours à des mesures non conventionnelles pour stimuler l'économie, comme l'*Asset Purchase Program* entre 2015 et 2018 ou encore le *Long Term Refinancing Operations*, pendant la crise financière de 2008-2009 et à nouveau pendant la crise du COVID-19 pour soutenir le marché interbancaire.

La BCE dispose de trois principaux taux directeurs pour influencer l'activité des banques commerciales et la création monétaire. Ils sont directement liés aux mesures conventionnelles mentionnées précédemment :

- **Le taux d'intérêt des opérations principales de refinancement.** D'horizon d'une semaine, il est le taux auquel les banques commerciales peuvent obtenir des fonds auprès de la BCE lorsqu'elles ont besoin de liquidité à plus long terme.
- **Le taux de facilité de prêt marginal.** Avec un horizon d'un jour, il permet aux banques commerciales de s'approvisionner en liquidité pour des besoins plus urgents.
- **Le taux de facilité de dépôts.** Il est le taux auquel les banques commerciales peuvent déposer leurs excédents de liquidité auprès de la BCE.

Le marché interbancaire joue un rôle important dans la politique monétaire de la BCE. Les banques commerciales peuvent choisir de se refinancer auprès d'autres banques commerciales disposant d'un excédent de liquidité. Le taux d'intérêt interbancaire est déterminé par l'offre et la demande sur ce marché, et est représenté par des indices tels que le taux **EONIA (Euro Overnight Index Average)** ou le taux **€STR (Euro Short-Term Rate)**. En général, le taux interbancaire devrait se situer entre le taux de facilité de dépôts, qui fait office de plancher, et le taux de facilité de prêt marginal, qui fait office de plafond. Ces dernières années, l'abondance de liquidité résultant des mesures non conventionnelles a progressivement poussé le taux interbancaire vers le plancher du taux de facilité de dépôts.

Le retour de l'inflation

Au cœur de la crise de COVID-19, l'inflation a connu un niveau historiquement bas, se rapprochant même de zéro, en 2020. A partir de janvier 2021, avec la reprise progressive de l'économie, elle a commencé à augmenter. L'inflation est progressivement remontée pour retrouver un niveau plus habituel, aux alentours de 1,5% annuel, au milieu de l'année. Cependant, cette trajectoire ascendante s'est poursuivie au cours de la seconde moitié de l'année, puis en 2022. La forte hausse du prix des matières premières et de l'énergie a d'ailleurs été annonciatrice de l'installation d'une période d'inflation élevée. Cette augmentation des prix a également été grandement stimulée par l'arrivée du conflit armé en Ukraine en février 2022.

Le graphique 1.5 montre que l'IPC (Indice des prix à la consommation) a augmenté de manière forte et continue à partir de juillet 2021, avec un bond significatif entre février et juillet 2022. Il ne s'est stabilisé qu'à partir de mi-2022, mais reste aujourd'hui très élevé, autour de 6%. L'IPC est un indice basé sur un panier de consommation des ménages français, et est proche du niveau global de l'inflation du pays qui oscille aujourd'hui entre 5.5 et 6.5 % (INFLATION.EU, 2023).

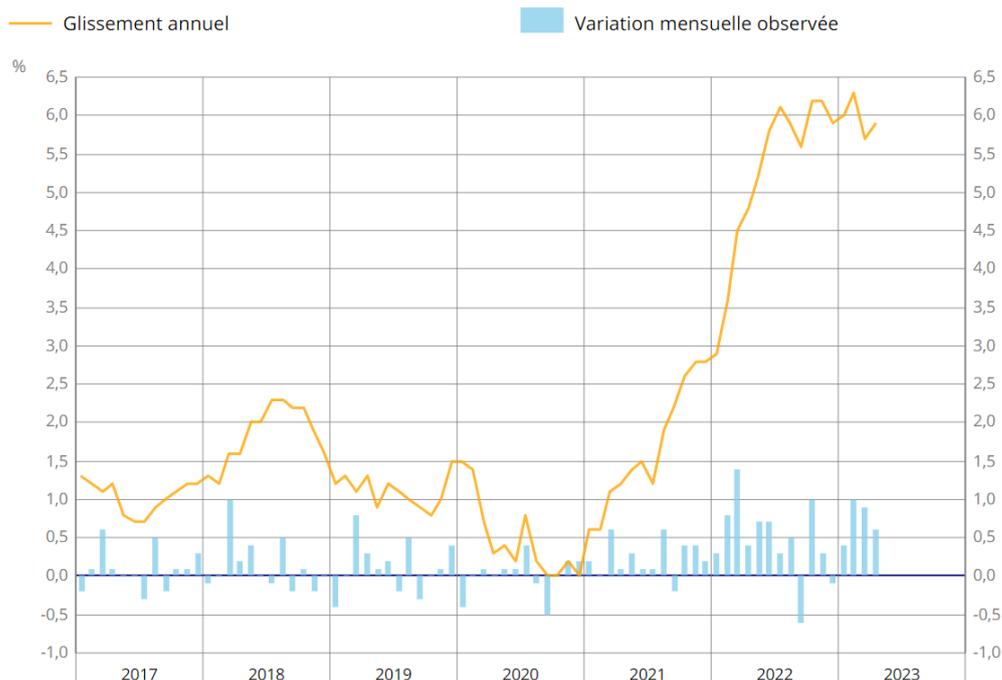


FIGURE 1.5 : Évolutions de l'indice des prix à la consommation en France (Source : INSEE, 2023).

Malgré cette croissance quasi-exponentielle de l'inflation, il faut attendre jusqu'en juillet 2022 pour que la BCE décide enfin de relever ses taux directeurs, comme il est possible de voir dans le tableau 1.1, ou encore sur le graphique 1.6. Jusqu'à cette date, les banques commerciales se voient offrir des taux de dépôts négatifs, ce qui a suscité des critiques envers la Banque Centrale Européenne pour sa réaction tardive face à l'inflation croissante. En 2023, la BCE poursuit son combat contre l'inflation en augmentant progressivement ses trois taux directeurs, considérés comme son principal outil de défense face à la tendance haussière des prix (BCE, 2023).

Date	Opérations principales de refinancement	Facilités permanentes (au jour le jour)	
		Dépôt	Prêt marginal
14/09/2023	4,50	4,00	4,75
02/08/2023	4,25	3,75	4,50
21/06/2023	4,00	3,50	4,25
10/05/2023	3,75	3,25	4,00
02/03/2023	3,50	3,00	3,75
08/02/2023	3,00	2,50	3,25
21/12/2022	2,50	2,00	2,75
02/11/2022	2,00	1,50	2,25
14/09/2022	1,25	0,75	1,50
27/07/2022	0,50	0,00	0,75
18/09/2019	0,00	-0,50	0,25
16/03/2016	0,00	-0,40	0,25

TABLE 1.1 : Taux de facilités des dépôts et de prêt marginal ces dernière années (BANQUE DE FRANCE, 2023b).

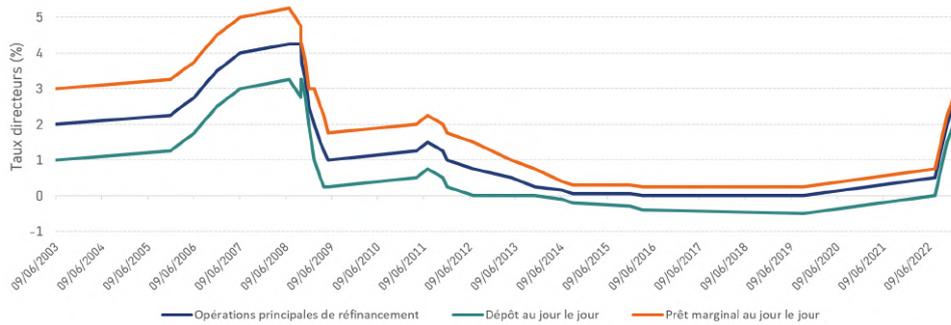


FIGURE 1.6 : Taux directeurs de 2003 à 2022 (Source : BANQUE DE FRANCE, 2023b)

En conclusion, la BCE utilise une combinaison de mesures conventionnelles et non conventionnelles pour mettre en œuvre sa politique monétaire et influencer la création monétaire dans la zone euro. Ses décisions en matière de taux directeurs, d'opérations de refinancement et d'achats d'actifs ont un impact significatif sur les conditions de crédit, la liquidité et l'activité économique globale.

L'augmentation répétée des taux directeurs par la BCE et le contexte économique inhabituel a cependant engendré un phénomène extraordinaire : une **inversion de la courbe des taux**. Ce phénomène sera décrit dans la deuxième partie du chapitre.

1.1.3 Le *Capital Management*, un problème triple pour les assureurs

Avec la transformation de l'économie de ces dernières années, les acteurs du marché de l'assurance ont pris conscience de l'importance d'aligner leurs stratégies de gestion du capital avec les réalités économiques et financières. Alors que solvabilité II est en place depuis plus de 6 ans et qu'IFRS 17 vient d'entrer en vigueur, les assureurs continuent d'enrichir leur arsenal de métriques pour analyser, interpréter et se couvrir face aux événements économiques incertains. Il est essentiel pour les assureurs d'optimiser leurs ressources financières pour faire face aux défis actuels du secteur.

Ils font face à trois défis majeurs dans la gestion de leur capital, représenté sur la figure 1.7, et résultant de l'influence exercée par trois acteurs clés sur leur activité :

- **Les assurés** : L'assureur doit s'engager à respecter les conditions du contrat en garantissant à l'assuré la capacité de remplir ses obligations. Par exemple, dans le cas d'un contrat d'assurance non vie, l'assureur doit être en mesure de verser les prestations liées aux sinistres subis par l'assuré. Pour un contrat d'assurance vie de type fonds en euros, l'assureur doit être en mesure de verser les taux de rendement garantis selon les termes du contrat, voire les dépasser en fonction de ses performances financières, et ce tout au long de la durée du contrat qui peut s'étendre sur plusieurs années ou plusieurs décennies. Assurer la capacité de verser des garanties sur une période prolongée implique donc la nécessité de **garantir des rendements financiers à moyen et long terme**.
- **Les actionnaires** : Les actionnaires qui investissent dans les compagnies d'assurance attendent un retour sur investissement rapide et élevé. Les assureurs sont donc contraints de **générer une rentabilité à court terme** pour satisfaire ces exigences. Ils doivent mettre en place des stratégies et des politiques favorisant des bénéfices immédiats, ce qui implique des décisions d'investissement judicieuses, une gestion efficace des risques et une optimisation des rendements sur les placements. En résumé, les compagnies d'assurance doivent répondre à la demande des actionnaires en visant une rentabilité rapide et élevée.

- **Les institutions de contrôle** : Les assureurs sont soumis à une réglementation stricte qui encadre leurs activités. Cette réglementation vise à protéger les intérêts des assurés et à assurer la stabilité du secteur de l'assurance. Les assureurs doivent **respecter des normes financières et prudentielles pour garantir leur solidité et leur capacité à faire face aux risques auxquels ils sont exposés**. Ils sont également tenus de respecter des règles de conduite et d'éthique professionnelle pour assurer une gestion transparente et responsable. En outre, les assureurs sont régulièrement contrôlés par les autorités de régulation pour s'assurer de leur conformité aux exigences réglementaires. Ces contrôles visent à garantir la protection des intérêts des assurés et la stabilité du marché de l'assurance dans son ensemble.

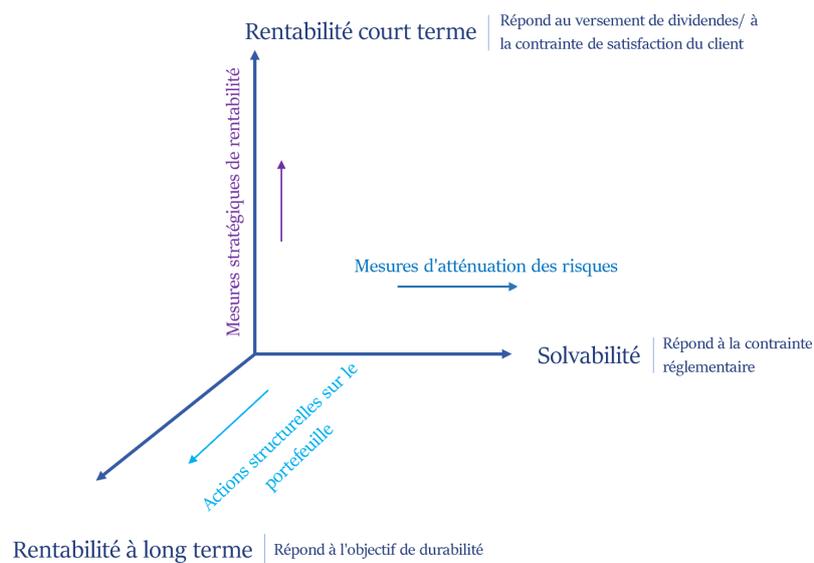


FIGURE 1.7 : Optimisation des performances des assureurs : Les trois axes clés à considérer.

Répondre à ces trois exigences est un défi de taille pour les compagnies d'assurance, d'autant plus dans un contexte économique instable. Elles doivent s'adapter aux fluctuations du marché et développer des stratégies flexibles pour assurer leur pérennité et répondre aux attentes des parties prenantes. Le contexte de remontée des taux fait ainsi partie des défis auxquels doivent faire face les assureurs. Comprendre précisément l'influence des taux sur ces trois axes est essentiel.

1.2 La nécessité croissante d'une analyse approfondie de la courbe des taux

Un **taux d'intérêt** est le pourcentage du montant d'un prêt ou d'un investissement qui est facturé ou gagné sous forme d'intérêts sur une période donnée. Il représente le coût du crédit ou le rendement financier potentiel associé à un prêt ou à un placement. Les taux d'intérêt sont généralement exprimés en pourcentage annuel et sont utilisés dans de nombreux domaines, tels que les prêts hypothécaires, les prêts automobiles, les comptes d'épargne, les obligations et les investissements financiers.

La **structure par terme des taux d'intérêt**, ou simplement courbe des taux d'intérêt, est une représentation graphique qui met en relation les taux d'intérêt et les échéances des instruments financiers à taux fixe, tels que les obligations d'État. Elle montre comment les taux d'intérêt varient en fonction de la durée du prêt ou de l'investissement. En général, cette courbe présente une tendance

croissante en raison de l'existence d'une prime de risque liée à l'incertitude future et à l'immobilisation des fonds dans les actifs à maturité longue. Cependant, il peut arriver que cette courbe s'inverse, en particulier lorsque les opérateurs anticipent une baisse de l'inflation ou une récession, alors que les taux courts ont subitement augmenté. C'est la situation dans laquelle se trouve l'Europe aujourd'hui.

1.2.1 Courbes de taux : origine et construction

A date donnée et pour un lieu précis (pays, zone monétaire, etc.), on peut trouver plusieurs courbes de taux. Bien que présentant une même réalité économique, ces courbes sont différentes par leur méthode de construction ou le sous-jacent utilisé pour déterminer les taux aux différentes maturités. Les courbes de taux sont habituellement construites à partir des taux d'intérêt des instruments financiers tels que les obligations d'État, les obligations d'entreprise ou les *swaps*.

On distingue généralement deux types de courbes :

- Les **courbes de marché**, construites à partir de données récupérées directement sur les marchés financiers (ex : les courbes de *taux swaps*).
- Les courbes implicites, déduites des données de marché mais pas observables directement. (ex : les courbes de *taux zéro-coupons* et de *taux forward*).

Courbe des taux *swaps*

La courbe des taux *swaps* est, comme son nom l'indique, construite à partir des ***swaps de taux d'intérêt***. Un *swap* de taux est un instrument financier dans lequel deux contreparties s'accordent à s'échanger des taux d'intérêt, un fixe et un variable, sur base d'un même montant (le notionnel) et une même devise. Le payeur du *swap*, ou jambe fixe, correspond à la contrepartie payant les intérêts à taux fixe, et recevant le taux variable. Le receveur du *swap*, ou jambe variable, à l'opposé, paye le variable et reçoit le fixe.

Un *swap* « vanille » est donc caractérisé par les éléments suivants :

- L'identification de la jambe fixe et la jambe variable ;
- Le montant notionnel, la base de calcul, ainsi que la devise utilisée ;
- L'échéancier de paiement, et la maturité du contrat ;
- Le niveau du taux fixe et l'indice du taux variable (ex : IBOR, LIBOR, Euribor, EONIA).

Les *swaps* permettent notamment aux investisseurs de se protéger du mouvement des taux. Si un investisseur estime que les taux vont augmenter dans un futur proche et qu'il est exposé à ce risque (car il a contracté un emprunt à taux variable par exemple), il peut décider de se procurer un *swap* payeur de taux fixe. Il recevra ainsi le taux variable lui permettant de se couvrir face à son risque de taux. Le mécanisme inverse s'applique si l'investisseur est exposé à une baisse des taux.

Pour se protéger, les assureurs peuvent aussi se procurer des ***swaptions***, qui sont des options sur *swaps* de taux. Une *swaption* payeuse par exemple donne le droit à son détenteur de rentrer dans un *swap* de taux payeur.

La courbe des taux *swaps* est habituellement construite à partir des taux interbancaires pour les maturités inférieures à 1 ans, puis avec les taux fixes de *swaps* jusqu'à 30 ans. Ces taux peuvent être directement récupérés sur le marché (Bloomberg par exemple).

Courbe des taux *zéro-coupon*

Les obligations zéro-coupon sont des instruments financiers qui ne versent pas de coupons intermédiaires. Elles sont caractérisées par leur **prix d'achat**, leur **nominal** (montant remboursé *in fine*) et leur **maturité**.

Avec ces 3 éléments, il est possible de calculer le **taux de rendement actuariel** r de l'obligation, qui désigne le taux véritable du placement obligataire. Il vérifie $\text{prix} \times (1 + r)^{\text{maturité}} = \text{nominal}$.

Le **taux du zéro-coupon** (taux ZC), ou encore **taux spot**, correspond alors à ce taux de rendement actuariel.

En reconstituant les taux de rendement de ces obligations à plusieurs maturités, on peut reconstituer la **courbe des taux zéro-coupon**. Le graphique 1.8 est la courbe proposée par la Banque de France pour des maturités allant d'1 à 60 ans en mai 2023. Elle a la particularité d'être inversée (décroissante), comme présentée dans la figure 1.8. Les enjeux liés à cette forme particulière seront expliqués sous peu.

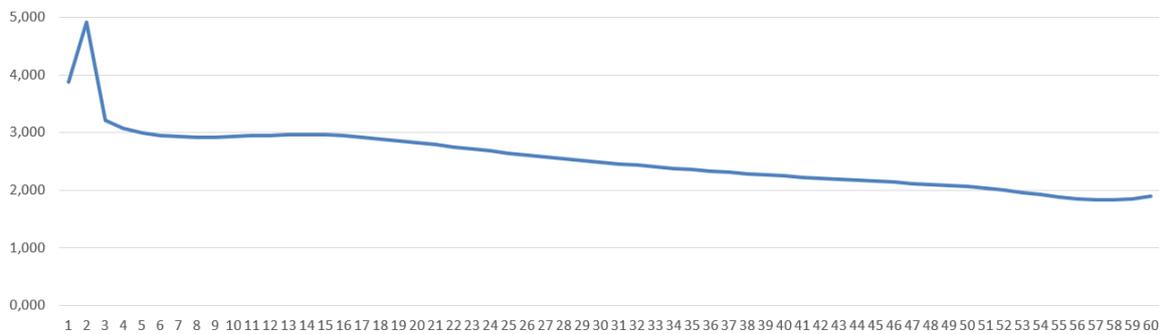


FIGURE 1.8 : La courbe des taux zéro-coupon Banque de France au 31/05/23 (Source : BANQUE DE FRANCE, 2023a)

Plus généralement, on notera par la suite $P(t, T)$ le prix en date $t \in [0, T]$ d'une obligation zéro-coupon payant un flux de 1 en T . Ce prix correspond au **facteur d'actualisation** (*discount factor*, **DF**) utilisé pour actualiser les flux financiers futurs.

Le taux ZC $R(t, T)$ peut ainsi être déterminé à partir du prix du ZC selon la formule (1.1)

$$\forall t \in [0, T], T \in \mathbb{R}, R(t, T) = \begin{cases} \frac{-\ln(P(t, T))}{T-t} & \text{en temps continu,} \\ P(t, T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1 & \text{en temps discret.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Courbe des taux *forward*

Un taux **forward** est un taux fixé aujourd'hui pour un contrat de prêt démarrant à une date fixée ultérieure et portant sur une période future. Le contrat requiert donc de fixer le **niveau du taux**, la **date de début du contrat** ainsi que la **durée** du prêt.

Soit $f(t, s, T - s)$ le taux établi à la date t pour un prêt démarrant en s et s'achevant en T . Ce taux rend les 2 stratégies d'investissement suivantes équivalentes :

- Investir jusqu'à T au taux $R(t, T)$.
- Investir jusqu'à s au taux $R(t, s)$, puis de s à T au taux $f(t, s, T - s)$.

Soit $t = 0$, $R(0, s) = r_s$ et $f(0, s, T - s) = f(s, T - s)$. La relation 1.2 est alors vérifiée

$$(1 + r_T)^T = (1 + r_s)^s \times (1 + f(s, T - s))^{T-s}. \quad (1.2)$$

En transformant l'équation, il est possible de déterminer le taux *forward* de durée $(T - s)$ commençant en s . C'est le taux d'emprunt dans le futur d'un prêt allant du temps s au temps T , noté

$$f(s, T - s) = \left(\frac{(1 + r_T)^T}{(1 + r_s)^s} \right)^{\frac{1}{T-s}} - 1. \quad (1.3)$$

Il est possible de reconstruire la courbe des taux *forward* de cette manière, même directement avec le prix des zéro-coupons, en utilisant la formule (1.1) liant le prix des ZC à leurs taux. Pour finir, si les taux utilisés sont sans risque, alors on calculera directement des taux *forward* sans risque.

Sur les figures 1.9 et 1.10 ci-dessous, sont construites à partir d'une courbe de taux *swaps* initiale (en rouge), les taux *forward* à un an (en bleu). Sur le second graphe, on observe notamment que malgré la forme très prononcée du creux des taux actuariels, la courbe des taux *forward* est croissante, du fait de la convexité des taux spots initiaux.

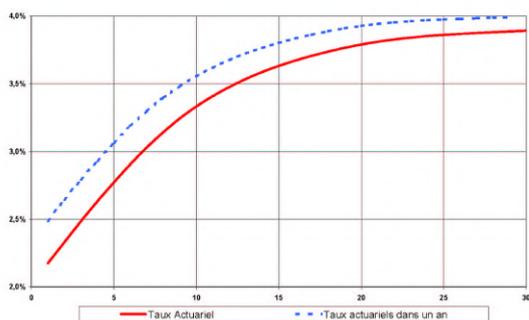


FIGURE 1.9 : Taux *swaps* et taux *forward* à 1 an (exemple 1)

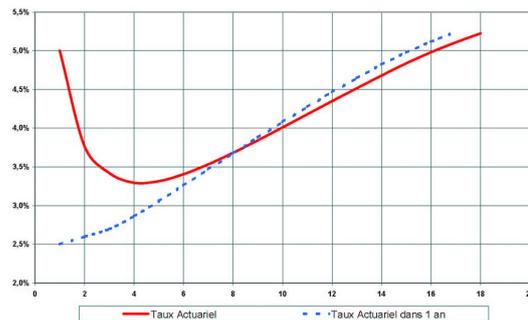


FIGURE 1.10 : Taux *swaps* et taux *forward* à 1 an (exemple 2)

1.2.2 Interprétations des formes de courbes de taux et particularités de la courbe EIOPA

Une courbe des taux peut prendre plusieurs formes : croissante ou décroissante, concave ou convexe, avec creux et bosses, etc. Le graphe de gauche de la figure 1.11 exprime cette diversité de profils. Il a été vu dans la première partie que la forme dépend fortement du contexte économique. Deux effets principaux vont influencer sur la courbe :

- **L'effet des politiques monétaires** : Une politique de hausse des taux telle que le monde connaît aujourd'hui fait mécaniquement s'élever les taux courts.
- **Le sentiment des investisseurs** : Si les investisseurs n'ont pas confiance en l'économie des futures années, alors ils auront tendance à investir plus dans des actifs moins risqués tels que les obligations d'Etat, faisant ainsi augmenter leurs prix et baisser leurs taux de rendements actuariels. Les taux longs s'abaissent alors.

Les variations des taux courts et des taux longs dépendent ainsi de deux facteurs très distincts. Il est à noter que la corrélation entre deux taux diminue à mesure que l'écart de maturité entre ces deux taux augmente.

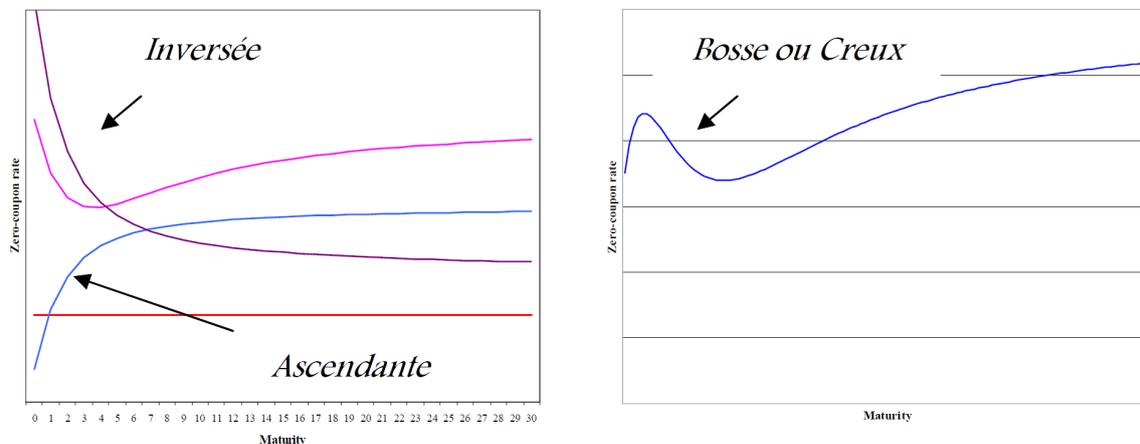


FIGURE 1.11 : Exemples de formes de courbe de taux.

La forme « normale » d'une courbe des taux correspond à la courbe bleue du graphique 1.11 :

- **Croissante** : les rendements croissent avec la maturité des titres car les investisseurs attendent une **surprime** liée aux trois risques du marché obligataire :
 - **Risque de taux réel** : Le niveau des taux réel futurs est incertain. Le rendement économique du titre pourrait donc baisser dans les prochaines années, si les taux venaient à augmenter.
 - **Risque inflation** : Le niveau de l'inflation peut lui aussi venir rogner le rendement économique réel du titre.
 - **Risque de crédit/défaut** : Le risque lié à la non possibilité de l'émetteur de rembourser le capital et/ou payer les intérêts dus, entraînant donc une perte financière de l'investisseur.
- **Concave** : L'incertitude marginale par maturité additionnelle est d'autant plus faible que la maturité croît. Un investisseur suppose plus de risque de variation additionnelle pour un passage d'une maturité de 1 à 2 ans que de 30 à 31 ans.

La courbe des taux évolue donc en fonction des différents acteurs politiques, économiques et financiers. Le niveau général des taux peut être amené à augmenter ou diminuer : on a alors une translation verticale de la courbe. Au-delà de cette transformation, la courbe peut subir différents mouvements :

- **Pentification de la courbe des taux** (courbe orange 1.12)
Les taux *forward* montent en raison des incertitudes concernant les taux futurs qui pourraient augmenter, exposant par ailleurs les investisseurs ayant des obligations à long terme à des pertes potentielles.
- **Aplatissement de la courbe des taux** (courbe bleue 1.12)
Les taux longs baissent pour se rapprocher des taux courts tout en leur restant supérieurs. Ce cas de figure peut apparaître en cas de conviction quant à une baisse de l'inflation par exemple.

- **Inversion de la courbe des taux** (courbe verte basse 1.12)

Les taux courts deviennent plus importants que les taux longs – les taux *forward* y compris prime de risque sur l'incertitude deviennent plus bas que les taux actuels. Cette situation peut survenir en cas de forte inflation et de remontée des taux directeurs par la banque centrale, comme c'est le cas actuellement. En effet, la surchauffe économique devrait se résorber (si confiance du marché en la banque centrale) entraînant alors une baisse de l'inflation future.

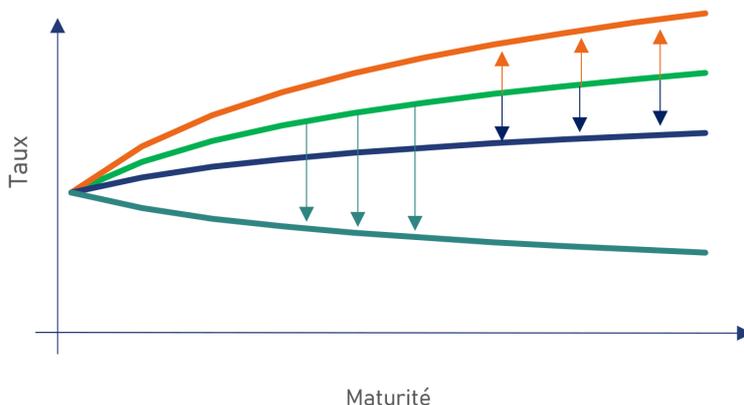


FIGURE 1.12 : Des évolutions possibles de la courbe des taux.

La courbe des taux EIOPA, donnée et contrainte des assureurs

Pour les calculs liés aux activités d'assurance en zone Euro, l'**EIOPA*** fournit mensuellement une courbe des taux zéro-coupon sans risque (EIOPA, 2023). Cette courbe est réglementaire et doit être utilisée pour évaluer la valeur économique des engagements des assureurs soumis au référentiel solvabilité II (voir la partie 1.3.2).

Pour la monnaie Euro, l'EIOPA se fonde sur **la courbe des taux SWAP contre EURIBOR 6M** pour calibrer sa courbe des taux sans risque. Cette courbe de marché répond en effet aux critères de profondeur et de liquidité imposés par l'EIOPA et solvabilité II. Cependant, l'absence d'actifs liquides au-delà d'une certaine maturité impose de devoir extrapoler la courbe.

La courbe de l'EIOPA est ainsi caractérisée par 3 attributs particuliers :

- **Le LLP** (*Last Liquid Point*) : C'est le point jusqu'auquel l'EIOPA utilise des données de marché réelles pour la construction de sa courbe sans risque. Il se situe à **20 ans** pour la courbe Euro en 2023.
- **L'UFR** (*Ultimate Forward Rate*) : C'est le taux vers lequel la courbe converge *in fine*. L'EIOPA justifie ce taux comme la somme de la **cible d'inflation à long terme** de la BCE (2%) et d'un **niveau de taux réel « long terme »** calibré historiquement. L'UFR est à **3,45%** pour la courbe Euro en 2023.
- Le **convergence point** : Fixé par l'EIOPA à 60 ans pour l'euro et $\max\{LLP + 20; 60\}$ ans pour les autres devises, ce point correspond à la période jusqu'à laquelle la courbe des taux sans risque convergera vers l'UFR lors de l'extrapolation.

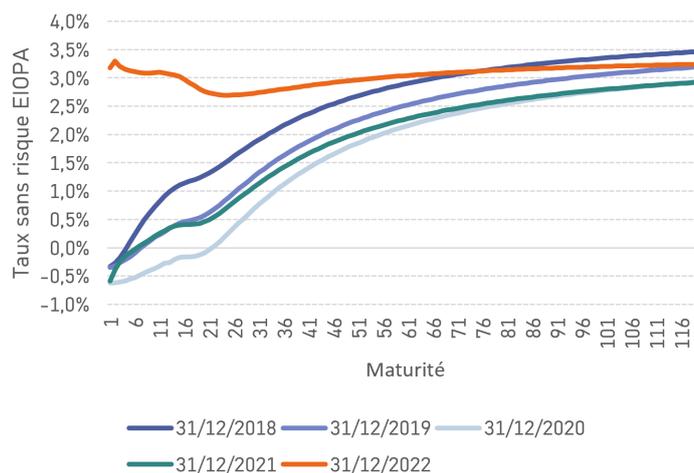
*L'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) est l'agence de réglementation de l'Union européenne chargée de superviser et de réglementer le secteur des assurances et des régimes de retraite professionnels en Europe, assurant la stabilité et la protection des consommateurs.

La méthode de construction de la courbe ensuite utilisée est celle de **Smith-Wilson***, qui consiste en une première phase d'interpolation pour les maturités allant jusqu'au LLP, puis une phase d'extrapolation entre le LLP et l'UFR. La convergence vers l'UFR dépend par ailleurs d'un paramètre de vitesse α . **La courbe des taux sans risque de l'EIOPA dépend donc fortement des hypothèses de construction et de la politique économique en vigueur.** Le tableau 1.2 présente l'évolution de l'UFR de ces dernières années, et le graphe 1.13 l'évolution récente des courbes RFR.

FIGURE 1.13 : Historique de la courbe des taux EIOPA au 31/12 entre 2018 et 2022

Date	UFR
2023	3,45%
2022	3,45%
2021	3,60%
2020	3,75%
2019	3,90%
2018	4,05%

TABLE 1.2 : Evolution de l'UFR entre 2018 et 2023



La particularité de la courbe des taux sans risque de l'EIOPA réside donc dans sa construction et ses hypothèses fortes. Bien que l'UFR ait diminué de 15 points de base chaque année depuis 2017, la méthode d'extrapolation de la courbe en environnement « pré-hausse » des taux a amené à considérer des taux nettement supérieurs aux taux *swap* observés pour des maturités entre 20 et 50 ans. Ce constat a conduit à appliquer des taux d'actualisation supérieurs aux taux de *swap* observés pour des maturités éloignées, ce qui a pu engendrer :

- Une sous-estimation continue des passifs d'assurance les plus longs ;
- Une incitation à recourir à des couvertures non efficaces dans la réalité.

Remarque En complément de publication de la courbe RFR, l'EIOPA met aussi à disposition une **courbe RFR avec VA** (pour *Volatility Adjustment*). Elle correspond à la courbe initiale (RFR) ajustée d'une prime de liquidité, basée sur le spread moyen à long terme d'un portefeuille obligataire de référence.

1.2.3 Impacts d'un mouvement des taux sur le bilan des assureurs vie

Les variations récentes de la courbe des taux affectent les projections qu'ont les assureurs vie. Une augmentation ou une baisse des taux fait évidemment directement varier la valeur de marché des actifs en portefeuille, mais les taux ont une répercussion forte sur le passif également. Les effets principaux rencontrés aujourd'hui avec l'augmentation des taux sont les suivants :

- La **diminution de la valeur de marché des obligations en portefeuille** : leurs prix varient en effet en sens inverse des évolutions de taux ;

*Voir EIOPA, [2022](#)

- **La possibilité d'acquérir des titres à rendements plus intéressants.** La remontée des taux implique que les assureurs peuvent se procurer des obligations d'Etat ou Corporate à taux plus attractifs. Cela leur permet d'augmenter leurs produits financiers futurs à court, moyen ou long terme (suivant la durée des obligations achetées), et leur donne la possibilité de verser des taux plus intéressants aux assurés.
- **L'augmentation du risque de rachat.** En traversant la période de taux bas persistants, les assureurs ont dû réinvestir sur des actifs à faibles rendements. Ils ont mécaniquement proposé à leurs assurés des contrats garantissant des taux faibles, voire nuls. Cependant, la remontée brutale des taux rend très attractifs les nouveaux supports d'épargne (livret A, contrat d'assurance concurrent, etc.) et les assureurs vie sont exposés à un risque de rachat plus élevé. Le schéma 1.14 présente cette mécanique :
 - Le taux attendu est directement affecté par les conditions de marché et les performances historiques du contrat de l'assuré ;
 - Par ailleurs le taux servi n'atteint pas forcément le taux attendu, entraînant des rachats de non-satisfaction.

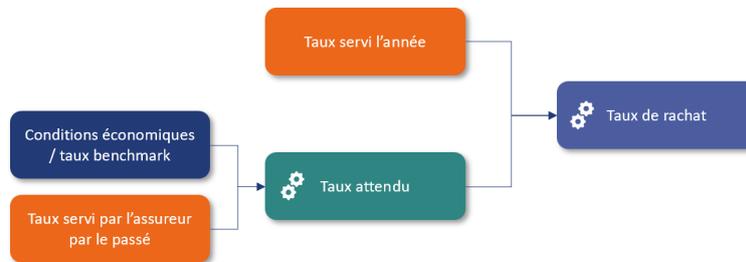


FIGURE 1.14 : Les facteurs influant le taux de rachat.

- **Le risque d'une diminution de la valeur des actifs R343-10** (actions, immobilier). En cas de hausse des taux, si les dividendes ou les loyers ne suivent pas la dynamique haussière et restent figés (en montant) à leur niveau précédent, alors ils perdent en valeur économique. Il devient alors moins intéressant de conserver ses actions par rapport à des obligations nouvellement émises, dont le rendement financier serait plus intéressant. Cependant, l'action peut aussi être considérée pour sa valeur boursière et non ses dividendes. L'effet de baisse de valeur actuelle des dividendes futurs (par hausse des taux) peut alors être compensé par une croissance du cours de l'action.

Au-delà du niveau : la pente et la convexité de la courbe

Traditionnellement, les assureurs analysent l'impact des taux en effectuant des études sur les variations à la hausse ou à la baisse. Cela implique de déplacer l'ensemble de la courbe des taux vers le haut ou vers le bas de manière parallèle, entraînant ainsi une augmentation ou une diminution des taux pour chaque échéance. À l'aide de cette nouvelle courbe, les assureurs peuvent réexaminer leurs modèles de projection pour évaluer l'influence des taux sur leurs actifs et leurs passifs. Ils peuvent notamment étudier la composition de leurs actifs, ainsi que l'impact des réinvestissements réalisés pendant la période projetée sur leur rentabilité et leur solvabilité.

Avec l'inversion de la courbe des taux depuis fin 2022, cette analyse semble ne plus être suffisante. À niveau égal ou presque égal, la courbe peut avoir pris une forme différente et influencer fortement sur

les possibilités de réinvestissement des assureurs. En recalculant les taux *forward* issus de la courbe initiale et en tenant compte des creux et des bosses, les taux de rendements obligataires seront très différents et vont peser sur les perspectives de rendements futurs. **L'analyse plus approfondie de la pente, mais surtout de la convexité de la courbe des taux semble alors pertinente.**

Remarque Sous le référentiel solvabilité II, il existe un déséquilibre structurel dans les projections. On suppose de manipuler un portefeuille de passif en *run-off*^{*}, donc ayant une durée décroissante avec le temps. De l'autre côté, l'assureur se doit d'effectuer des opérations de désinvestissement et réinvestissement tout au long de la projection, notamment pour respecter sa stratégie d'allocation initiale. Bien qu'il soit tentant d'essayer de suivre la durée du passif en achetant des obligations de maturité de plus en plus faible, il a été conclu lors de la **rencontre ACPR - IA du 29 novembre 2018** (INSTITUT DES ACTUAIRES, 2018b) que les modèles ne devaient pas ajuster les réinvestissements obligataires en fonction du passif. Cette contrainte oblige les assureurs à toujours réinvestir dans des titres à maturité proche de la durée initiale de leur portefeuille d'actifs.

Supposons alors la maturité des réinvestissements fixés (= 5 ans pour l'exemple de la figure 1.15). Le taux FWD 5 ans donne une indication sur le taux de réinvestissement (en moyenne sur les trajectoires RN) offert par le marché. Une courbe concave amène à une décroissance des taux FWD et donc des taux offerts pour les réinvestissements en cours de projection. Les taux offerts peuvent alors revenir proche de 0. Hors effet garantie, l'actualisation évolue de la même manière que les taux. Néanmoins, les garanties de taux (et de capital – TMG = 0%) rentrent alors fortement dans la monnaie en cours de projection. Un effet net à la hausse sur la TVOG[†] est attendu.

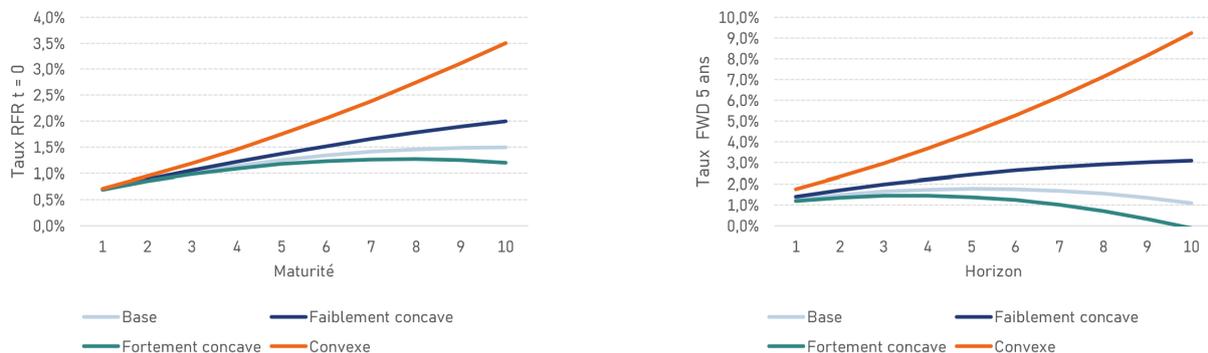


FIGURE 1.15 : Convexité de la courbe RFR et courbes FWD associées.

1.3 L'assurance vie : un choix d'épargne toujours attractif

L'assurance peut être définie comme une opération par laquelle un assureur s'engage à fournir une prestation à un bénéficiaire en cas de réalisation d'un événement aléatoire, appelé risque. En échange de cette garantie, l'assureur reçoit une somme d'argent, appelée prime. Les droits et obligations des parties sont formalisés dans un contrat d'assurance.

En France, l'assurance est devenue un produit largement répandu, en grande partie grâce aux obligations légales, mais aussi grâce aux avantages fiscaux et successoraux qui y sont associés. L'exercice

^{*}Avoir un portefeuille en *run-off* signifie qu'on suppose qu'il n'y a pas de nouveaux entrants (ni nouveaux contrats, ni nouvelles primes). Le passif s'écoule alors progressivement tout au long de la projection.

[†]TVOG : Valeur temps des options et garanties des contrats

de l'activité d'assurance requiert par ailleurs une autorisation préalable (un agrément), impliquant des exigences en termes de gouvernance et de contrôle interne.

La réglementation en matière d'assurance est principalement établie par le Parlement et le ministre des Finances, et est codifiée dans le code des assurances. Le contrôle de l'activité est confié à l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), une autorité administrative indépendante rattachée à la Banque de France. Cette entité a pour mission de protéger les intérêts des assurés et de **veiller à la stabilité du système financier**.

En 2021, les cotisations d'assurance (tout confondu), représentaient 238,4 Md€. L'assurance vie à elle seule représentait plus de 58% du total, comme mis en lumière sur la figure 1.16, avec 148,6 Md€.

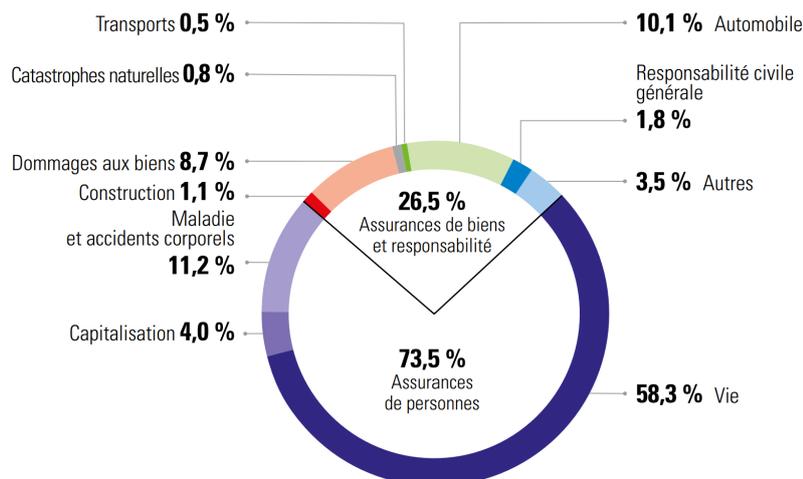


FIGURE 1.16 : Répartition des cotisations d'assurance en France en 2021 (Source : FRANCE ASSUREURS, 2022).

Ce mémoire sera concentré exclusivement sur l'assurance vie et en particulier les fonds Euros. Revenons sur des définitions et quelques chiffres récents.

1.3.1 L'assurance vie en France

L'assurance vie concerne les contrats d'assurance dont le versement de prestations dépend directement de la vie humaine. On distingue alors deux grandes catégories :

- les assurances **en cas de vie** : elles déclenchent le paiement d'une prestation dans le cas où l'assuré est toujours en vie à une échéance prévue au contrat.
- celles **en cas de décès** : la prestation a alors lieu si l'assuré décède dans la période prévue au contrat.

L'assurance vie reste encore aujourd'hui le support d'épargne préféré des Français, avec un encours atteignant 1 893 milliards d'euros à fin avril 2023*. La collecte nette avait diminué en 2022 (8,4 Md€ contre 18,3 Md€ en 2021), mais semble reprendre de l'élan depuis le début de l'année 2023. Ce succès s'explique principalement par les avantages dont elle jouit par rapport aux autres supports d'épargne :

- La fiscalité avantageuse, qu'elle soit dans la transmission de capital ou dans la réalisation de plus-values. Elle ne s'applique en effet que sur le versement de prestations, et est dégressive avec le temps ;

*FRANCE ASSUREURS, 2023

- La possibilité d'accéder facilement aux marchés financiers au moyen de supports en unités de compte, et de bénéficier de rendements très intéressants si ces derniers sont en croissance ;
- Les options sur les contrats, telles que les options de rachats, d'arbitrage ou clause de protections. Ces options garantissent la flexibilité de l'épargne et une certaine forme de liquidité.

Néanmoins, l'assurance vie est concurrencée actuellement par la remontée du taux du livret A, qui est passé à **3%** depuis le 1er février 2023.

La collecte du Livret A et du Livret de développement durable et solidaire au titre du mois de janvier 2023 est positive avec +11,22 Md€ pour l'ensemble des réseaux. La collecte concernant le seul Livret A est positive à +9,27 Md€, un record pour un mois de janvier. L'encours total sur les deux produits atteint 520,9 Md€ à fin janvier 2023, un nouveau record absolu.

« Une collecte et un encours historiques pour le Livret A en janvier »,
Communiqué de la CAISSE DES DÉPÔTS FINANCE, 22 février 2023 (CAISSE DES DÉPÔTS, 2023).

La figure 1.17 montre l'évolution des taux de revalorisation de l'assurance vie face aux indices inflations, TEC10 et le taux du livret A (jusqu'à 2022).

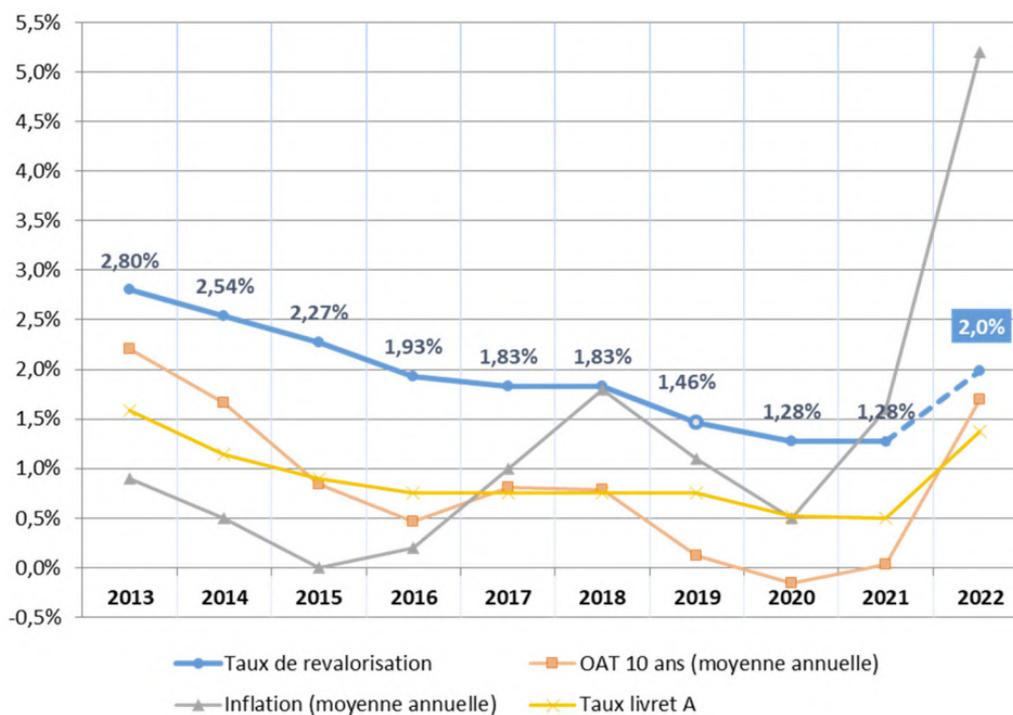


FIGURE 1.17 : Taux de revalorisation des différents supports d'épargne entre 2013 et 2022 (Source : ACPR, 2023)

En 2023, le taux du livret A a même dépassé le taux moyen de revalorisation des assurances vie. Mais malgré la hausse des taux d'intérêt, qui aurait pu inciter à une réaffectation de l'épargne, les rachats d'assurance-vie sont demeurés relativement limités en 2022.

Les paragraphes précédents ont introduit les contrats à support en euro et en unités de comptes (UC). Il convient de les définir avec un peu plus de précision car ils sont l'objet de l'analyse de ce mémoire.

Les contrats en euro

Ils sont les contrats les plus répandus. Le capital versé, net de chargement sur versement est entièrement garanti par l'assureur, qui investit sur des supports stables et peu risqués comme des obligations d'état ou d'entreprises (de bonne notation). En plus de cette garantie de capital, l'assureur peut proposer un **taux minimum garanti (TMG)** qui est un taux de revalorisation annuel de l'épargne. Les contrats mono-supports euros bénéficient aussi de clauses de **participation au bénéfice (PB)** : lorsque les performances de l'assureur sont élevées (et au-delà du TMG), il est contraint de reverser une partie de son bénéfice financier aux assurés. Cette part est légalement fixée à 85% mais peut être contractuellement modifiée.

Les contrats en unités de compte (UC)

Pour ce type de support, **l'assureur ne garantit qu'un nombre d'unités d'actifs, et non leur valeur**. Les fonds de ces contrats sont gérés par des sociétés de gestions investissant sur des actions, des obligations ou d'autres actifs plus complexes (ex : parts d'OPCVM, parts de SCI, etc.). Ces contrats peuvent apporter de plus grands rendements que les contrats mono-supports euros, mais sont plus dangereux pour l'assuré qui porte le risque d'investissement. Le risque auquel s'expose l'assuré peut être diminué par d'éventuelles options proposées par l'assureur (garantie plancher en cas de décès, par exemple).

La part de collecte des contrats en UC est par ailleurs en constante évolution. Cette part a doublé entre 2016 et 2022 comme le montre le graphique 1.18.

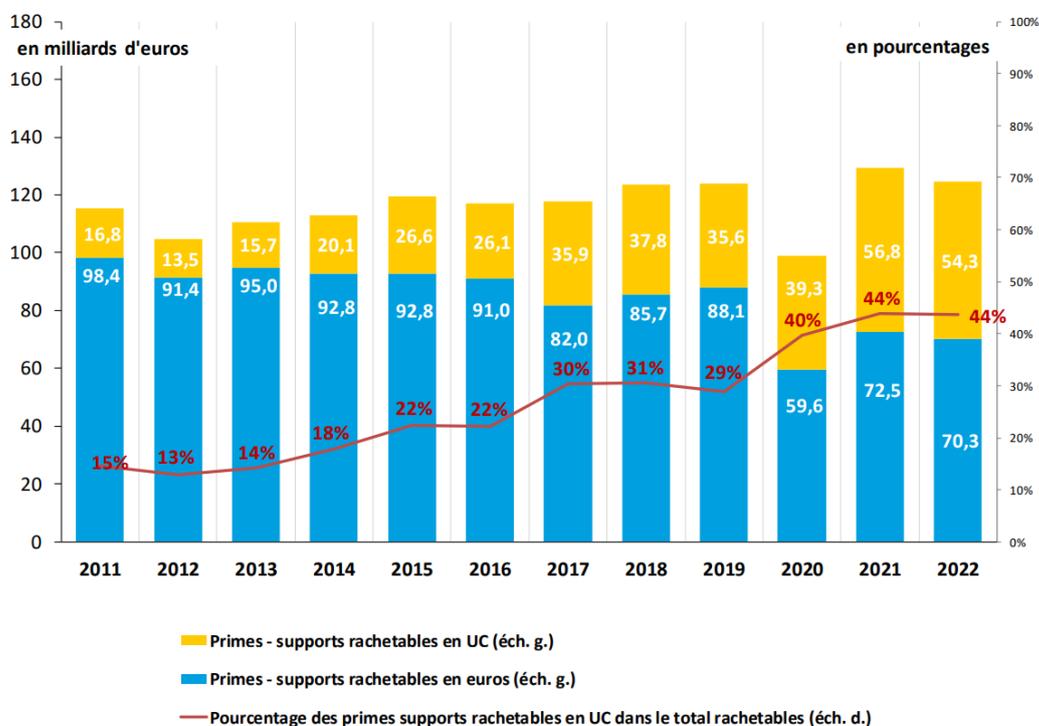


FIGURE 1.18 : Évolution et répartition de la collecte brute par type de supports (Source : ACPR, 2023)

Les contrats multi-supports

Ils offrent la possibilité de détenir une part de l'épargne en euros et l'autre en UC, au sein d'un même contrat. Ils offrent l'avantage à l'assuré d'avoir une partie de l'épargne complètement garantie (euro) et une autre partie pouvant générer des rendements plus importants (UC). Ils sont flexibles et souvent accompagnés d'une option d'arbitrage permettant à l'assuré de modifier la répartition entre les deux supports au cours de la vie du contrat.

Les contrats *euro-croissance*

Les contrats euro-croissance se situent entre les fonds en euros et les fonds en unités de compte. Ils offrent une garantie en capital, mais celle-ci n'est applicable qu'après une durée minimale de huit ans. Si l'assuré choisit un tel contrat, alors il accepte de bloquer son épargne pendant cette période. En cas de sortie prématurée, le montant récupérable par l'assuré est incertain et dépendant du marché. L'avantage de ce type de contrat est qu'il permet à l'assureur de mettre en place une stratégie d'investissement plus longue et plus risquée que pour les fonds euros, permettant donc d'atteindre un meilleur taux de revalorisation. Ces contrats sont également moins sensibles à l'inflation et ils permettent de stimuler l'économie réelle.

1.3.2 Réglementations et comptabilités associées

Depuis 2016, les assureurs européens sont soumis à la directive 2009/138/CE, alias **Directive Solvabilité II**. L'objectif de la norme est d'intégrer les risques liés à l'activité d'assurance, de renforcer les exigences en matière de gouvernance et de capitaux propres, et d'améliorer la protection des assurés tout en harmonisant les normes et les pratiques de contrôle en Europe. Les règles prudentielles de solvabilité II sont réparties au sein de 3 Piliers :

- **Pilier I** : Il englobe les exigences quantitatives, ce qui comprend les règles de valorisation des actifs et des passifs, ainsi que les exigences en matière de capital et leur méthodologie de calcul :
 - L'évaluation de l'actif et du passif ;
 - Le calcul du **SCR** (*Solvency Capital Requirement*) ;
 - Le calcul du **MCR** (*Minimum Capital Requirement*).

Les exigences de capital peuvent être déterminées en utilisant la Formule Standard préétablie, ou en recourant à un modèle interne complet ou partiel. De plus, les organismes ont la possibilité de demander diverses autorisations liées aux exigences quantitatives.

- **Pilier II** : Il regroupe deux aspects importants. D'une part, il contient les exigences qualitatives. Ces règles visent à garantir une gestion efficace et prudente des activités des organismes d'assurance, en mettant l'accent sur la gouvernance d'entreprise, la gestion des risques et les processus internes de contrôle.

D'autre part, le pilier II inclut l'évaluation propre des risques de solvabilité (*Own Risk and Solvency Assessment - ORSA*). Il s'agit d'une évaluation interne réalisée par les organismes d'assurance pour évaluer leur propre solvabilité, en prenant en compte les risques auxquels ils sont exposés, leur capacité à les gérer et les mesures appropriées à mettre en place. L'ORSA permet aux organismes d'assurance de prendre des décisions éclairées et d'adopter des mesures de gestion des risques adaptées à leur situation spécifique.

- **Pilier III** : Il concerne la communication d'informations au public et aux autorités de contrôle. Son objectif est d'harmoniser, au niveau européen, les informations publiées par les organismes

d'assurance ainsi que celles transmises aux superviseurs. Ces informations, à la fois quantitatives et qualitatives, doivent être communiquées à une fréquence annuelle et, dans certains cas, trimestrielle.

Les principales provisions techniques des contrats d'épargne

Les principales provisions comptables manipulées dans le mémoire sont les suivantes :

- **La Provision Mathématique (PM) :** Elle se définit comme la différence entre la valeur actuelle des engagements de l'assureur et la valeur actuelle des engagements des assurés. Elle constitue la majeure partie du passif de l'organisme d'assurance et appartient aux assurés.
- **La Provision pour Participation aux Bénéfices/Excédents (PPB ou PPE) :** Si la participation aux bénéfices de l'année en cours n'est pas réattribuée dans sa totalité aux provisions mathématiques, alors l'assureur peut la doter en PPE et la redistribuer plus tard. L'assureur a alors 8 ans pour la reverser aux assurés. Cette provision constitue un levier de pilotage important pour l'assureur. Il peut en effet lisser le taux servi d'une année à l'autre en dotant ou reprenant successivement de la PPE.

Dans le contexte actuel de hausse des taux concurrents, l'assureur pourrait être incité à utiliser largement son stock de PPE afin d'augmenter les taux d'intérêt proposés aux assurés et de décourager les rachats massifs.

- **La Réserve de Capitalisation (RC) :** La réserve de capitalisation est une réserve spécifique créée pour faire face à la dépréciation de la valeur des actifs et à la diminution des revenus des entreprises d'assurance. Son objectif est de lisser les effets des variations des taux d'intérêt, tant à la hausse qu'à la baisse. Elle concerne principalement les titres obligataires à taux fixes. En cas de vente de ces titres à un prix différent de la valeur comptable, la plus ou moins-value ne vient pas impacter le résultat, mais cette réserve de capitalisation. Cet effet démotive les assureurs à vendre massivement leurs titres obligataires pour réaliser des produits financiers à court terme.

Les bilans *French Gaap* et Solvabilité II

En France, les assureurs sont tenus d'effectuer leur comptabilité et d'ériger leurs bilans en conformité avec les principes comptables généralement admis (i.e. *French Gaap**) ainsi qu'avec les normes de solvabilité II. Bien que les comptes établis selon ces deux référentiels se doivent de refléter la même réalité, ils sont fondamentalement différents. **Le premier adopte une vision comptable historique de l'activité, le second une vision économique et prudentielle.**

ACTIF	PASSIF
Actifs (Valeur Comptable)	Fonds propres FP
	Réserve de Capitalisation RC
	Autres provisions techniques (PPE)
	Provisions mathématique PM

ACTIF	PASSIF	
Actifs (Valeur de Marché)	Net Asset Value NAV	Surplus
		SCR
	Risk Margin (RM)	
	Best Estimate of Liabilities BEL	

(a) Bilan type d'un assureur en norme comptable française

(b) Bilan économique d'un assureur sous solvabilité II (bilan prudentiel)

FIGURE 1.19 : Exemples de bilans en comptabilité sociale (S1) et prudentielle (S2)

* *Generally Accepted Accounting Principles*

Au bilan prudentiel solvabilité II (figure 1.19b), les provisions mathématiques et autres provisions techniques présentes dans les états financiers en normes comptables ne sont pas spécifiées. À la place, on retrouve les éléments suivants :

- **Le *Best Estimate of Liabilities* (BEL)** : Il est égal à la somme des flux de passifs futurs de l'assureur actualisés au taux sans risque. Il correspond à la meilleure estimation de la valeur du portefeuille de passif de l'assureur, s'il venait à être racheté.
- **La *Risk-Margin* (RM)** : La marge pour risque, ajoutée au *best-estimate*, correspond au montant qu'un tiers demanderait pour assumer et honorer les engagements d'une compagnie d'assurance. Elle représente le coût d'immobilisation du capital nécessaire à cet effet.
- **La *Net Asset Value* (NAV)** : Égale à la différence entre la valeur de marché des actifs et l'évaluation des passifs (BEL+RM), elle correspond à la richesse économique de l'assureur.

1.3.3 La modélisation ALM : un outil nécessaire pour l'analyse de l'influence des taux d'intérêt sous les contraintes de Solvabilité II

En assurance, la valeur des passifs n'est pas observable sur le marché, en raison de leur complexité et de leur illiquidité. Pourtant, afin de réaliser le bilan prudentiel requis par solvabilité II, les assureurs doivent être capables de mettre un prix sur leur passif, en l'estimant d'une manière juste : le BEL. Il est donc nécessaire de l'évaluer au moyen d'un modèle (approche *Market-to-Model*) : **un modèle ALM** (*Asset and Liability Management*).

Utilité des modèles ALM

Un modèle ALM est un outil utilisé pour projeter les bilans des assureurs sur une période donnée, tout en gérant et équilibrant les actifs et les passifs de la compagnie. Il vise à aligner les investissements de l'assureur avec ses engagements envers les assurés, en tenant compte des risques financiers et des objectifs de gestion des actifs et des passifs.

Pour atteindre ce résultat, le modèle doit pouvoir projeter à la fois les évolutions de l'actif et du passif de l'assureur, ainsi que les interactions entre eux. En effet, en assurance vie, et en particulier pour les fonds euro, les performances des placements de l'assureur à l'actif vont avoir une influence directe sur le passif. Par exemple, le montant de participation au bénéfice à verser (ou provisionner) dépend des produits financiers générés sur l'exercice. D'un autre côté le montant des prestations à verser peut lui aussi forcer l'assureur à devoir vendre des actifs pour obtenir de la liquidité supplémentaire. L'actif a donc une influence forte sur le passif, et inversement.

Une vision stochastique nécessaire

En raison de présence d'options et de garanties dans les contrats mono-supports euros (TMG, clauses de participation aux bénéfices, possibilité de rachat, ...), utiliser une simple projection déterministe ne permet pas de prendre en compte le coût réel probable sur le portefeuille de l'assureur. Il est alors nécessaire de projeter le bilan de l'assureur selon un très grand nombre de scénarios possibles. Le BEL, calculé comme l'espérance des flux de trésorerie futurs, peut alors être approché par une moyenne stochastique des résultats en sortie de modèle ALM sur les différents scénarios réalisés (*Monte-Carlo*). Le second chapitre reviendra sur les hypothèses concernant ces simulations stochastiques.

Structure des modèles ALM et effet des taux

Les outils des assureurs ont initialement été construits en accord avec un contexte économique précis ainsi que des hypothèses historiques. L'arrivée d'un environnement économique très instable vient donc remettre en question les fondements de ces modèles et leur robustesse. Les évolutions de la courbe des taux ont des impacts multiples sur les projections des modèles ALM, comme l'illustre le graphique 1.20.

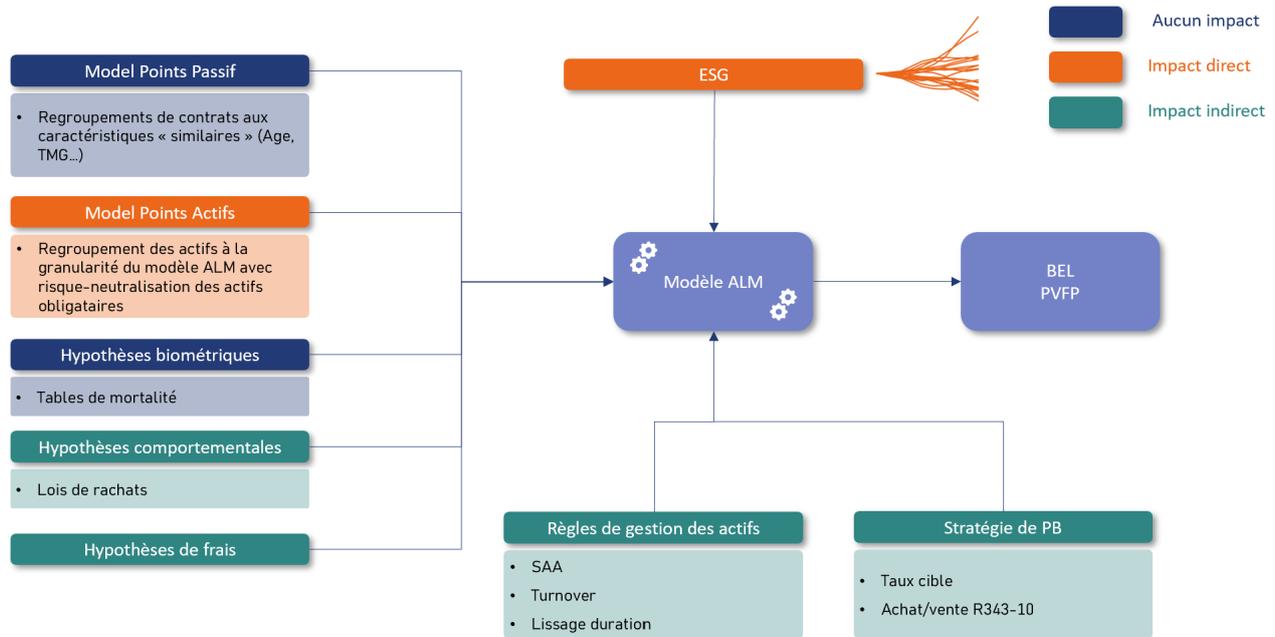


FIGURE 1.20 : Structure d'un modèle ALM et impact des taux sur les différents modules

Etude d'un scénario catastrophe

Cette partie imagine un scénario économique dans lequel la courbe des taux serait inversée et choquée à la hausse. Dans une telle situation, les taux courts deviennent extrêmement élevés (taux spot voisin de 6% en $t = 0$) et on peut imaginer que les taux proposés sur le marché (i.e. les taux concurrents) deviennent aussi très élevés. La situation rend alors attrayant le rachat des contrats par les ménages afin de placer leur épargne ailleurs, surtout si l'assureur ne réagit pas en proposant de servir des taux plus élevés que ceux initialement proposés sur les contrats.

Le scénario est ici dit « catastrophe » en raison de la proportion de rachat dynamique qui risque d'être activée lors de cette période. En effet, les fonctions de rachats dynamiques modélisées au sein des modèles de projections dépendent généralement de l'écart entre le taux attendu par les assurés et le taux concurrent du marché (Voir 1.14).

Si un grand nombre de ménages décident de racheter leurs contrats alors que l'environnement de taux est très élevé, l'assureur devra sûrement – par manque de liquidité – céder des actifs en moins-value latente pour pouvoir payer les prestations de rachat. Généralement ces cessions d'actifs ont lieu sur le portefeuille obligataire pour que les impacts d'une vente en moins-value se répercutent en réserve de capitalisation. Le risque est cependant que cette réserve s'épuise totalement, laissant l'assureur dans une position inconfortable dans laquelle il risquerait de devoir s'attaquer à ses fonds propres pour parvenir à payer les sorties.

Le schéma 1.21 résume les opérations habituelles réalisées par les modèles de projections si un tel scénario venait à se réaliser. Un des risques face à cette situation est que le modèle ALM n'ait pas été testé pour des situations aussi extrêmes. Face aux taux élevés, il pourrait alors devenir incontrôlable et supposer des taux de rachats bien plus extrêmes que ce qui arriverait en réalité, et ce, sur une période prolongée, forçant la liquidation rapide du portefeuille d'actifs de l'assureur. Cette boucle infernale donnerait ainsi des résultats de projection non pertinents et non utilisables par l'assureur.

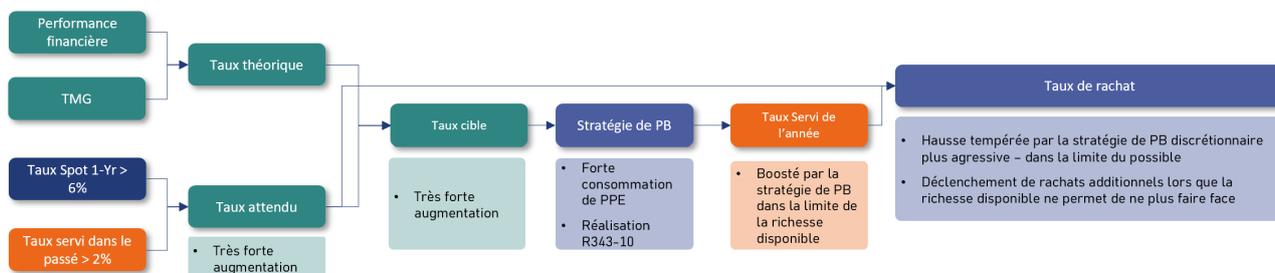


FIGURE 1.21 : Schéma de développement d'un scénario catastrophe

Il est nécessaire de comprendre comment adapter les modèles pour faire face à ce risque, soit par la modification des hypothèses de construction même du modèle, soit par l'ajout ou la modification des *management actions*.

Conclusion du chapitre

Ce premier chapitre a montré comment le contexte économique actuel de remontée des taux et d'inflation forte pousse les assureurs vie à se questionner sur les perspectives d'investissements à venir. Pour ce faire, l'influence de la forme de la courbe des taux sur l'actif et le passif des assureurs lors de projections ALM sera étudiée. Deux objectifs sont alors à remplir :

- Construire un modèle ALM respectant les contraintes de solvabilité II et capable de reproduire les effets généraux de l'activité d'assurance vie, pour des fonds euros.
- Déformer les courbes de taux sans risque de l'EIOPA et comprendre leurs effets sur les projections pour pouvoir mettre en place des stratégies de couverture.

Chapitre 2

Développement des modèles de projection : GSE et modèle ALM

L'étude du risque de convexité des taux d'intérêts introduite précédemment nécessite de disposer d'outils assez précis permettant de capter l'influence des taux sur l'évolution du bilan des assureurs. Ce chapitre a pour but de présenter les outils développés afin de réaliser cette étude théorique.

Les outils étant inexistant, ils ont du être entièrement développés pour ce mémoire, en Python, à partir de zéro. Leur construction a été effectuée dans une optique de possible réutilisation ultérieure, pour de futurs mémoires ou des projets de recherches internes au cabinet. Une notice d'utilisation a été conçue, ainsi qu'une interface compréhensible et facile à utiliser sous Excel pour que l'utilisateur n'ait pas à modifier le code pour choisir les paramètres qu'il souhaite utiliser.

Après avoir abordé avec plus de détails les objectifs et difficultés associées à la gestion ALM, les différentes étapes de construction du modèle de projection seront développées.

2.1 Objectifs et principes de la gestion actif-passif

L'Asset and Liability Management (ALM) représente un domaine complexe et un rôle stratégique qui exige une maîtrise complète à la fois des actifs et des passifs, ainsi que de leur interdépendance évolutive. La gestion actif passif se situe au cœur des sociétés d'assurance, en particulier celles exerçant une activité vie, et est en lien direct avec tous les métiers présents au sein des compagnies : la détermination de la prime et la vente du contrat, la comptabilité et le provisionnement, la gestion et stratégie des portefeuilles d'investissement, la conformité avec les réglementations en vigueur, etc.

La difficulté de la branche réside en cette accumulation d'activités et de problématiques. La projection ALM doit refléter le plus fidèlement possible le fonctionnement de la société d'assurance, particulièrement ses politiques d'investissements et sa manière de gérer les contrats et leurs revalorisations. La modélisation doit servir non seulement à estimer la solvabilité future de l'assureur, mais aussi de détecter des phénomènes indésirables contre lesquels il serait nécessaire de se couvrir pour ne pas mettre en péril la santé économique de l'entreprise. Une attention particulière est donc portée au bon déroulé de la projection et des *management actions* sont ajoutées ou modifiées régulièrement pour mettre à jour la manière dont sont traitées les situations.

2.1.1 La gestion et l'optimisation d'actifs au sein d'une société d'assurance vie

Le cœur de l'activité d'assurance vie réside en la gestion des investissements. Lors de l'ouverture d'un contrat mono-support euro par un ménage par exemple, l'assureur se charge d'investir la prime reçue après avoir prélevé d'éventuels chargements (rémunération de l'assureur). Ce placement générera

un rendement financier qui sera lui-même réutilisé pour revaloriser le contrat du ménage et qui sera réintégré dans de nouveaux investissements. En cela, les contrats d'assurance-vie fonctionnent principalement selon le principe de capitalisation et ses prestations sont forfaitaires (connues à l'avance), en opposition à l'assurance non-vie qui repose sur le principe de répartition et des prestations indemnitaires (le montant des prestations dépend du dommage subi, et n'est pas connu à l'avance).

La première partie du mémoire a mis en lumière le problème triple auquel les assureurs sont confrontés : un besoin de rendement à court terme pour respecter les attentes des investisseurs, un besoin de rendements à moyen voire long terme pour s'aligner sur les engagements contractés envers les assurés et enfin la nécessité de répondre à des contraintes de solvabilité stricte pour être conforme aux régulations européennes.

Parmi les obligations de l'assureur envers ses assurés, on retient principalement le paiement des **taux minimum garantis (TMG)**, ainsi que la **participation aux bénéfices (PB)** :

- **TMG** : Les taux garantis font référence aux rendements minimums promis par l'assureur sur un produit d'assurance vie. Si un individu décide de déposer 1000 euros sur un fonds euro, et que son taux garanti est de 1%, alors l'année d'après, la provision mathématique associée à son contrat sera de 1001 euros ($1000 + 1000 \times 1\%$), peu importe les résultats de l'assureur. Les taux garantis coûtent très cher, étant des options asymétriques définies contractuellement et ayant le plus souvent une durée indéfinie. Le paiement des TMG doit donc être effectué tant que le contrat est en portefeuille, c'est à dire tant que le rachat complet ou le décès de l'assuré n'a pas eu lieu. L'assureur se doit de respecter des objectifs de performances financières afin de pouvoir payer ces taux sur le long terme, au risque de devoir rogner son résultat, voire ses fonds propres.
- **PB** : Selon la réglementation, la rémunération totale de la compagnie est plafonnée à 10% du résultat technique (c'est-à-dire le résultat lié à la mortalité et à la gestion) et à 15% du résultat financier (à l'exclusion des produits financiers sur fonds propres). Il est possible de déduire le montant de participation aux bénéfices des assurés grâce à la relation ci-dessous.

$$\text{Participation aux résultats (assurés)} = \text{Intérêts techniques} + \text{Participation aux bénéfices.}$$

Le minimum de participation aux résultats est défini par l'équation (2.1), les intérêts techniques correspondant à la revalorisation naturelle des contrats d'une année sur l'autre (les TMG définis précédemment).

$$\begin{aligned} & \text{Minimum de participation des assurés aux résultats} = \\ & \left\{ \begin{array}{l} 90\% \text{ du bénéfice technique} \\ \text{ou} \\ 100\% \text{ de la perte technique} \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} 85\% \text{ du bénéfice financier} \\ \text{ou} \\ 0\% \text{ de la perte financière} \end{array} \right. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Remarques :

- Le plancher minimum de participation financière est fixé à 85% par les textes réglementaire (Articles A132-10 à A132-17 du Code des Assurances). Il est cependant possible de définir un taux de participation contractuel plus élevé lors de la création du contrat.
- La participation aux bénéfices ne concerne pas les les contrats en unités de compte.

Pour répondre aux exigences de rendements et de solvabilité nécessaire, les assureurs investissent sur des supports variés. Trois classes d'actifs principales sont observables sur le diagramme 2.1, montrant la répartition des investissements des assureurs français en 2021 (assureurs vie et non vie) :

- **Les obligations** : Elles représentent la majorité du portefeuille des assureurs, avec plus de 60% du total. Environ la moitié correspond à des dettes souveraines qui sont généralement très sûre (notamment la dette allemande, pour l'Europe) et permettent à l'assureur d'améliorer sa solvabilité lors des calculs réglementaires. L'autre moitié se concentre sur les obligations d'entreprises, générant des rendements plus importants, mais dont la robustesse dépend du *rating** associé à l'émetteur. Le *rating* influence fortement la manière dont les obligations seront pénalisées lors du calcul du SCR, il est donc important pour l'assureur d'équilibrer correctement son portefeuille obligataire.
- **Les actions** : Les actions sont le deuxième poste le plus présent au sein des portefeuilles d'assureurs. Ils en espèrent généralement des rendements plus importants et à plus court terme. Les actions génèrent des dividendes pris en compte dans l'assiette de rendements financiers distribuables à l'assuré (dans le calcul de la PB).
- **L'immobilier** : Dernier plus gros poste au portefeuille des assureurs, l'immobilier assure un flux constant de revenus grâce aux loyers. Comme les dividendes, les revenus associés aux investissements immobiliers rentrent en compte dans l'assiette de rendements financiers distribuables à l'assuré.
- **Les autres classes d'actifs** : Le reste du portefeuille des assureurs se compose d'actifs plus exotiques (dérivés, produits structurés, etc.), de prêts, ainsi que de liquidités. Les actifs les plus complexes sont souvent une manière pour l'assureur de se couvrir de risques particuliers. Il peut se procurer des *swaptions* pour se protéger d'une hausse des taux, par exemple.

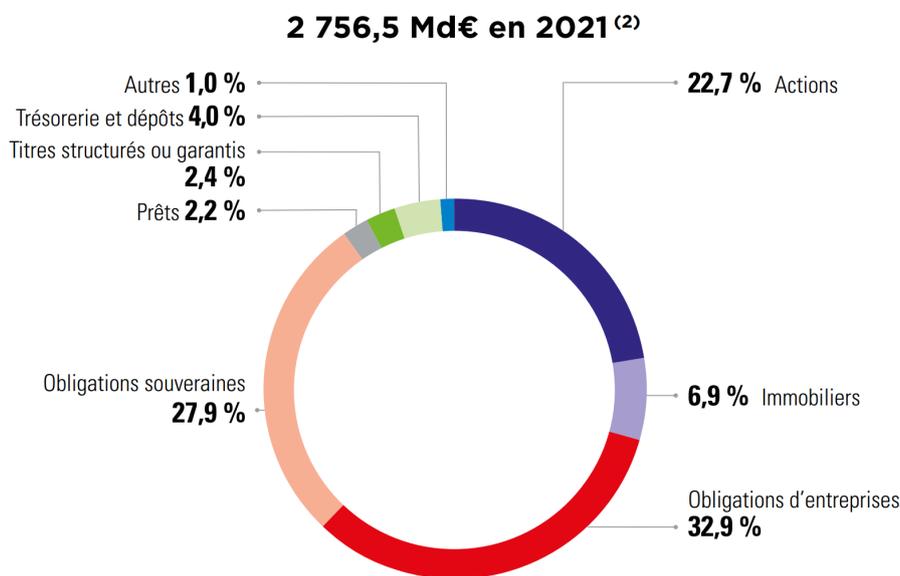


FIGURE 2.1 : Placements des assureurs français par type d'actif en 2021, après transposition[†]
(Source : FRANCE ASSUREURS, 2022)

* **Rating** : évaluation de la solvabilité d'une entreprise émettrice et de la qualité de ses obligations en termes de remboursement. Les agences de notation attribuent des notations (par exemple, AAA, BBB, etc.) pour aider les investisseurs à évaluer le risque associé à ces obligations.

2.1.2 Principes énoncés par solvabilité II pour la construction des modèles ALM

La directive solvabilité II contraint les assureurs européens pour garantir que les compagnies disposent de suffisamment de capitaux propres pour couvrir les risques auxquels elles sont exposées. La réglementation européenne énonce des principes à respecter, qu'ils soient relatifs aux calculs réglementaires, à la gouvernance ou encore à la communication avec le public.

Cette partie s'intéresse plus particulièrement au Pilier 1 de SII. Il se concentre sur les **exigences quantitatives**, c'est-à-dire les mesures financières que les compagnies d'assurance doivent respecter. Au cœur de ces mesures figurent deux concepts cruciaux : le Capital de Solvabilité Requis (**SCR**, pour *Solvency Capital Requirement*) et le Minimum de Capital Requis (**MCR**, pour *Minimum Capital Requirement*). Le SCR peut être calculé de deux façon différentes : soit par l'approche standard définie par la directive, soit par des modèles internes spécifiques à la compagnie. Seules les compagnies d'assurance les plus imposantes ont développé un modèle interne. Le SCR vise à garantir que les assureurs disposent de fonds suffisants pour faire face à des chocs financiers majeurs sur une période d'un an avec une probabilité de 99,5%, et est défini mathématiquement par la formule (2.2)*.

$$SCR = FP_0 - q_{0,5\%}(DF(1) \times FP_1). \quad (2.2)$$

Autrement dit, le SCR est conçu pour couvrir tous, sauf les pires, des scénarios de risque. D'autre part, le MCR représente un seuil minimal en deçà duquel les capitaux propres d'une compagnie ne devraient jamais descendre. Il est conçu comme une alerte ultime, un repère déclenchant une intervention réglementaire immédiate si atteint. Ensemble, le SCR et le MCR forment un cadre rigoureux qui vise à garantir la solvabilité des compagnies d'assurance, tout en offrant une certaine flexibilité dans la manière dont elles gèrent et allouent leurs capitaux.

Le calcul de ces 2 indicateurs nécessite d'avoir un modèle ALM capable de prendre en compte les risques internes et externes à la compagnie d'assurance. Le modèle ALM, permettant de projeter le bilan et calculer le *best-estimate* de la compagnie, doit être ainsi correctement calibré, tout en respectant plusieurs principes fondamentaux :

- **L'adéquation des risques** : Les actifs doivent être investis de manière à refléter la nature et la durée des obligations d'assurance. Ce principe garantit que les actifs sont suffisants et disponibles lorsque les sinistres ou les obligations sont dus.
- **Diversification des investissements** : Le modèle ALM doit favoriser la diversification des actifs pour éviter une concentration excessive sur un type d'actif ou un marché particulier. Il doit respecter des cibles d'allocations prédéfinies pour maintenir une structure d'actifs décidée pour chaque pas de temps.
- **Qualité des actifs** : La solvabilité repose sur la qualité des actifs détenus. Les actifs de moindre qualité, tels que ceux à haut risque de défaut (lorsque ce dernier est modélisé), doivent être ajustés en conséquence pour refléter leur risque intrinsèque.
- **Utilisation d'hypothèses prudentes** : Les modèles ALM doivent être basés sur des hypothèses prudentes pour s'assurer que, même dans des scénarios adverses, une compagnie d'assurance puisse répondre à ses obligations.
- **Réévaluation périodique** : Les modèles ALM doivent être régulièrement revus et mis à jour pour s'assurer qu'ils restent pertinents face aux évolutions du marché et des risques associés.

* $DF(1)$ pour *Discount Factor*, le facteur d'actualisation à 1 an ; FP les fonds propres (respectivement à l'année de calcul et projeté sur 1 an)

Ces principes soulignent l'importance d'une gestion actif-passif robuste pour assurer la solvabilité et la stabilité financière des compagnies d'assurance en Europe. Ils encouragent également une approche proactive de la gestion des risques, essentielle à la pérennité de l'industrie.

Principe de Market-Consistency

Sous **solvabilité II**, la "market consistency" (ou consistance avec le marché) fait référence à l'approche qui doit être utilisée pour évaluer les actifs et les passifs d'une compagnie d'assurance, en utilisant des valeurs de marché actuelles ou des techniques de valorisation basées sur des transactions observables sur le marché.

Le principe de *market consistency* vise à s'assurer que la valorisation des actifs et des passifs est réalisée de manière réaliste et reflète fidèlement les conditions du marché en temps réel. Cela permet d'obtenir une image plus précise de la santé financière d'une compagnie d'assurance et de ses capacités à faire face à ses obligations en cas de besoin.

Pour respecter ce principe clé, les pratiques suivantes doivent être respectées par les assureurs :

- **Valorisation à la juste valeur et utilisation des données de marché** : Les actifs et les passifs doivent être évalués à la juste valeur. La **juste valeur** est définie par **IFRS 13** comme « le prix qui serait reçu pour la vente d'un actif ou payé pour le transfert d'un passif lors d'une transaction normale entre des intervenants du marché à la date d'évaluation ». Lorsque les valeurs de marché réelles ne sont pas disponibles, des techniques de valorisation **basées sur des données de marché** observables peuvent être utilisées pour estimer la juste valeur des actifs et des passifs.
- **Actualisation des flux de trésorerie** : Les flux de trésorerie futurs associés aux passifs doivent être actualisés en utilisant des taux d'intérêt de marché appropriés pour refléter leur valeur actuelle.
- **Transparence et cohérence** : Les compagnies d'assurance doivent fournir des informations transparentes sur leurs méthodes de valorisation et s'assurer que celles-ci sont cohérentes et conformes aux principes de *market consistency* énoncé par les autorités de contrôle prudentiel.

L'approche de *market consistency* est essentielle pour garantir que les compagnies d'assurance évaluent leurs engagements de manière réaliste et prudente, évitant ainsi des distorsions potentielles dans leur situation financière. Cela permet également aux autorités de régulation de mieux comprendre et évaluer la santé financière des assureurs, contribuant ainsi à renforcer la stabilité du secteur de l'assurance dans son ensemble.

La méthode de Monte-Carlo

Pour calculer le *best-estimate* et les autres indicateurs relatifs aux engagements de l'assureur et à sa solvabilité, il est essentiel de se placer dans un cadre stochastique. Pour les contrats d'assurance vie en fond euro, la présence d'options asymétriques se déclenchant en fonction des performances financières de l'assureur fait qu'il est impossible de capter toutes les situations possibles en utilisant une simple projection déterministe. Une approche par Monte-Carlo permet en revanche de solutionner ce problème. Pour obtenir une évaluation fiable du *best-estimate* et de la solvabilité de l'assureur, on fait alors appel à un **GSE** (Générateur de Scénarios Economiques) qui, comme son nom l'indique, projette des indices économiques qui seront utilisés en entrée du modèle ALM. Parmi les indicateurs économiques à considérer, on retrouve essentiellement des projections de taux, des indices actions et immobiliers, ou encore de l'inflation.

Les GSE les plus complexes peuvent projeter des tables de scénarios plus précises et riches, mais nécessitent une calibration plus lourde qui allonge fortement le temps de génération desdites tables.

Chaque table de GSE est traitée individuellement par le modèle ALM, qui se charge de calculer une valeur de *best-estimate*. Enfin, la moyenne arithmétique des différents BE permet d'obtenir le BE stochastique (formule 2.3)

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N BE_k. \quad (2.3)$$

Si le GSE est correctement calibré et le modèle ALM correctement construit, ce BE stochastique respecte les conditions de *market-consistency* exigé par solvabilité II, et permet de garantir une évaluation correcte du bilan de l'assureur.

2.2 Le générateur de scénarios économiques

La première étape de construction de l'outil de projection a été de développer le générateur de scénarios économiques. Des revues techniques de l'ACPR (ACPR, 2020) et de l'Institut des actuaires (INSTITUT DES ACTUAIRES, 2018a), développant les bonnes pratiques à adopter lors de la construction des GSE, ont servis de référence. Ces documents présentent les avantages et les inconvénients des différents modèles de diffusion qu'il est possible d'utiliser pour projeter les indices nécessaires au fonctionnement du modèle ALM. Une attention particulière est accordée au choix du modèle de taux.

Remarque 1 Les assureurs font souvent appel à des entreprises spécialisées tel que *Moody's* pour obtenir des tables de scénarios économiques calibrées sur les données de marchés au moment de la clôture des bilans et des calculs réglementaires de SCR et MCR.

Remarque 2 Le GSE a été construit en dernier, après le modèle ALM. En effet, la diffusion de tables devait être possible avec les outils déjà développés au sein du cabinet de conseil. Néanmoins, la mise à jour des versions de Python et de ses *packages* sur la plateforme principale de développement interne a rendu inutilisable la calibration des modèles. Après plusieurs essais de correction des outils, il a été décidé de totalement recréer un GSE à partir de zéro.

2.2.1 Le modèle de taux

Le modèle de taux est au cœur du générateur de scénarios économiques. Dans un **univers risque neutre*** (RN), les autres classes d'actifs dépendent du processus de taux stochastique. Il projette les courbes de taux tout au long de l'horizon de projection, ce qui permet notamment de pouvoir déterminer le prix des obligations en portefeuille. Étant donné que les obligations représentent le poste d'investissement le plus important au bilan de l'assureur, le choix du modèle de taux ainsi que sa calibration doit être faite de manière rigoureuse.

Des rappels de calcul stochastique sont disponibles en annexe A.1.

Premier choix de modèle

L'étude nécessite un modèle de taux capable de reproduire la courbe de taux initiale, et pouvant être calibré facilement. En effet, pour l'analyse des déformations de la courbe des taux, il est souhaitable

*L'**univers risque neutre**, en finance, est l'univers qui rend le processus de prix actualisé martingale. Il fait référence à un cadre conceptuel où les investisseurs n'ont pas de préférences pour le risque et où les prix des actifs sont déterminés en supposant que les rendements futurs sont actualisés au taux sans risque.

de pouvoir générer des courbes de profils différents, calibrer le GSE en prenant cette courbe comme nouvelle hypothèse de marché, puis exporter un nombre suffisant de tables pour le calcul d'un *best-estimate* stochastique. Si 10 profils de courbes doivent être testés, par exemple, alors il faut calibrer et générer des tables à partir du GSE 10 fois.

Au départ, l'utilisation du modèle LMM+ (Libor Market Model +) a été considérée pour l'analyse. Le modèle LMM est un outil financier conçu pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt interbancaires à court terme, en particulier les taux LIBOR*. Il se base sur la dynamique des taux *forward* pour représenter la structure par terme des taux d'intérêt. Le "+" dans LMM+ fait référence à l'intégration de facteurs supplémentaires pour mieux capturer les dynamiques du marché, notamment la volatilité et la courbe des taux. Cette extension permet une calibration plus précise aux données du marché, offrant une meilleure adéquation avec les prix observés des instruments dérivés. Il est couramment employé en assurance en raison de ses caractéristiques souhaitables. Il permet une reproduction précise de la courbe des taux initiale, offre la flexibilité de traiter avec des taux négatifs et est capable de reproduire le *smile* de volatilité, ce qui en fait un choix attractif pour la modélisation financière. Pour le LMM+, le temps de calibration s'est avéré trop long (30 minutes environ), en raison de sa complexité mathématique et numérique élevée. Il faut par ailleurs ajouter à ces 30 minutes le temps de génération des tables, et le temps de calcul du BE par le modèle ALM.

Il a été finalement décidé de l'écartier de l'étude et des modèles de taux courts ont été considérés, plus simples à implémenter, et beaucoup plus rapides à calibrer.

Choix n°2 : le modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek est un modèle de taux court. Il est un des premiers modèles à avoir été développé pour décrire l'évolution des taux d'intérêt au fil du temps et fut proposé par Oldrich Vasicek en 1977 (VAŠÍČEK, 1977). L'équation de diffusion du modèle est décrite par l'équation (2.4)

$$dr_t = a(b - r_t).dt + \sigma.dW_t, \quad (2.4)$$

avec :

- r_t le taux d'intérêt court à l'instant t .
- a un paramètre de vitesse de retour à la moyenne.
- b la moyenne à long terme vers laquelle le taux d'intérêt tend.
- σ la volatilité du taux d'intérêt.
- dW_t un mouvement brownien, sous \mathbb{Q} .

Le modèle de Vasicek comprend de nombreux avantages.

- Ses paramètres sont aisément interprétables.
- Sa calibration est simple et rapide.
- Il permet d'obtenir des taux négatifs. Cet aspect a longtemps été considéré comme indésirable, car les taux avaient toujours été strictement positifs avant la fin des années 2010. Selon l'objectif de reproduction visé, l'inclusion ou l'exclusion de taux négatifs dans un modèle de taux peut être souhaitée ou non.

*Le LIBOR (London Interbank Offered Rate) est le taux d'intérêt moyen auquel les banques se prêtent des fonds non garantis à court terme entre elles sur le marché monétaire de Londres. Il sert de référence pour de nombreux contrats financiers et est publié pour différentes échéances et devises, basé sur les soumissions quotidiennes de banques de premier plan.

- Il existe une **solution exacte à l'EDS** (2.4), donné par la formule

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} .dW_u,$$

avec r_0 le taux d'intérêt à l'instant initial $t = 0$.

- Il existe une **formule fermée pour le calcul des prix zéro-coupons**. Considérons un bon zéro-coupon qui expire à l'instant T . Le prix de ce bon à l'instant t est donné par

$$P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Dans le modèle de Vasicek, ce prix a une forme analytique

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t},$$

avec

$$A(t, T) = \exp \left[\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2 \right],$$

et

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Ce modèle de taux s'est avéré être très simple à mettre en place, mais il ne répondait pas aux exigences désirées. Sa lacune principale est qu'il ne permet pas de reproduire la courbe des taux initiale. Il a ainsi été laissé de côté au profit d'un modèle très similaire, mais répondant à ce problème : le modèle de **Hull-White à 1 facteur (HW1)**.

Choix final : le modèle de Hull White à 1 facteur (HW1)

Le modèle de Hull-White à un facteur, introduit par John Hull et Alan White dans leur article de 1990 "*Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*" (HULL et WHITE, 1990), est une avancée significative dans la modélisation des taux d'intérêt. Cette formulation vise à généraliser le modèle de Vasicek en permettant une plus grande flexibilité dans la description de la dynamique des taux d'intérêt.

L'évolution du taux d'intérêt instantané selon Hull-White est définie par l'équation différentielle stochastique (2.5)

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t).dt + \sigma.dW_t, \quad (2.5)$$

avec :

- r_t le taux d'intérêt à l'instant t .
- $\theta(t)$ une fonction déterministe du temps.
- a un paramètre positif représentant la vitesse de retour à la moyenne.
- σ la volatilité du taux d'intérêt.
- dW_t un incrément de mouvement brownien, sous \mathbb{Q} .

Dans cette formulation, le paramètre a décrit la vitesse à laquelle le taux d'intérêt se réajuste en direction de la tendance imposée par $\theta(t)$, et σ mesure l'écart-type des variations inattendues du taux d'intérêt. La fonction $\theta(t)$, quant à elle, est définie de manière à capturer la tendance à long terme des taux, permettant ainsi au modèle de Hull-White de **s'adapter plus précisément à une structure par terme des taux d'intérêt donnée**.

En définissant $\theta(t)$ par la fonction (2.6), on réussit effectivement à intégrer au modèle de taux toute l'information de la courbe de marché initiale, tout en respectant les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage, essentielles pour une diffusion sous probabilité risque neutre.

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial t} + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}), \quad (2.6)$$

avec $f^M(t, T) = -\frac{\partial \ln P^M(t, T)}{\partial T}$ le taux forward instantané du marché en t et de maturité T (et respectivement $P^M(t, T)$ le prix du zéro-coupon de marché en t et de maturité T).

La solution de l'EDS (2.5), à la manière du modèle de Vasicek, se retrouve et prend, pour $t > s$, la forme

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} .dW_u, \quad (2.7)$$

avec $\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$.

Le processus r_t , conditionnellement à l'information au temps s , \mathcal{F}_s , est donc gaussien. Enfin, le modèle Hull-White offre également une formule analytique pour le prix des zéro-coupons. La forme du prix du zéro-coupon $P(0, T)$ est semblable à celle donnée précédemment pour le modèle de Vasicek, avec

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t},$$

où

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left[B(t, T) f^m(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T)^2 \right],$$

et

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Calibration du modèle de taux

Le modèle choisi a finalement été le modèle Hull White à 1 facteur. Pour la calibration, 2 éléments principaux sont nécessaires :

- Une courbe de taux initiale : la courbe des taux EIOPA au 31/12/2022 pour l'étude préliminaire.
- Une matrice de volatilité de *swaptions* (à même date que la courbe), pour différentes maturités et différents ténors.

Le deuxième point est crucial dans la calibration du modèle. En effet, peu importe la courbe de taux initiale, et peu importe les paramètres a et σ , l'information contenue dans la fonction $\theta(t)$ permettra de reproduire la structure par terme des taux. Cependant, la courbe EIOPA ne contient pas d'information de volatilité. C'est grâce aux données de marché qu'il est ainsi possible de calibrer correctement la variance des trajectoires de taux. Pour le modèle de Hull-White, les *swaptions* sont les instruments qui se prêtent le mieux à cette étape.

Étape 1 : prix de marché

La première étape de calibration du HW1 consiste à calculer les prix de marché des instruments qui serviront à optimiser les paramètres. Pour ce faire, une matrice de volatilité log-normale (volatilité de Black) a été récupérée sur *Bloomberg*, pour des *swaptions* ATM* au 31/12/2022.

*ATM : At The Money.

Expir.\Tenor	1Yr	2Yr	3Yr	4Yr	5Yr	6Yr	7Yr	8Yr	9Yr	10Yr	15Yr	20Yr	25Yr	30Yr
1Mo	27,91	33,14	34,56	36,51	37,40	37,27	37,20	36,75	36,41	36,14	36,13	38,20	40,99	43,43
2Mo	28,90	34,31	36,88	37,88	38,48	38,54	38,39	38,22	38,06	37,99	37,74	40,23	43,50	45,93
3Mo	29,23	34,64	37,24	38,38	39,08	39,10	38,96	38,87	38,71	38,69	38,55	40,58	43,90	46,66
6Mo	30,82	35,21	37,17	37,83	38,23	38,25	38,17	38,00	37,96	37,90	37,67	39,36	42,71	45,50
9Mo	32,78	36,13	37,73	38,23	38,59	38,69	38,57	38,34	38,32	37,71	37,93	39,40	42,53	45,13
1Yr	34,44	37,75	38,85	38,94	39,13	39,13	39,00	38,74	38,42	38,27	38,09	39,59	42,37	45,19
18Mo	37,63	38,76	39,32	39,21	39,27	39,05	38,70	38,39	37,89	37,57	37,79	39,66	42,45	45,12
2Yr	39,56	39,46	39,18	39,10	39,02	38,63	38,24	37,80	37,45	37,18	37,53	39,65	42,32	44,96
3Yr	38,76	38,20	37,98	37,71	37,25	36,79	36,21	35,91	35,66	35,74	36,47	38,72	41,15	43,51
4Yr	37,51	37,32	36,78	36,01	35,27	34,76	34,43	34,16	34,30	34,10	35,14	37,29	39,73	41,78
5Yr	37,33	36,86	35,81	34,62	33,72	33,29	32,90	32,91	32,85	32,73	34,20	36,42	38,59	40,45
7Yr	34,10	34,17	32,87	32,00	31,20	31,19	31,15	31,04	31,56	32,09	33,67	35,88	37,87	39,47
10Yr	30,50	32,43	32,31	31,83	31,32	32,33	32,92	33,32	33,35	33,54	35,52	37,41	39,39	40,89
15Yr	43,96	48,98	47,16	45,73	44,01	45,22	45,23	45,47	44,91	45,15	45,22	46,85	48,08	49,92
20Yr	65,40	100,64	86,62	77,87	71,05	70,67	69,44	67,56	65,21	63,32	58,29	59,04	61,16	62,95
25Yr											83,26	84,99	91,09	125,53

TABLE 2.1 : Volatilités log-normales de *swaptions* contre EURIBOR6M au 31/12/2022 (en %).

En particulier, il a été décidé d'utiliser les instruments pour lesquels les échéances des *swaps* interviennent entre 7 et 11 ans (en vert sur le tableau 2.1). Ce choix a été fait en correspondance avec la durée moyenne de l'actif initial (développé dans la prochaine section) et correspond aussi à l'horizon de réinvestissement obligataire lors des rééquilibrages de l'actif du modèle ALM.

En plus des volatilités log-normales, les *strikes* ATM des instruments ont été récupérés, pour évaluer leurs prix le plus précisément possible. Les *swaptions* payeuses sont des *call** sur *swap*. Elles donnent à leur détenteur la possibilité d'entrer dans des *swaps* payeurs de taux fixe et receveur de taux variable, selon un échéancier (T_0, T_1, \dots, T_n) , avec T_0 la date de début, et T_n la date de fin.

Soit K le *strike* du *swap*, alors on définit en temps t la valeur de la branche fixe et de la branche variable, respectivement par

$$BF(t) = K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P(t, T_j),$$

et

$$BV(t) = P(t, T_0) - P(t, T_n).$$

On définit aussi le taux *swap* valorisé en temps t , S_t , comme le taux fixe qu'il faudrait choisir pour obtenir l'égalité entre la branche fixe et la branche variable.

$$S_t = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P(t, T_j)}.$$

Calculons maintenant le prix de la *swaption*, en utilisant les notations utilisées précédemment. Soit une *swaption* de maturité $T = T_0$ (date de fin de l'option), on définit par π_t son prix en $t < T$:

*Un *call* est un contrat financier qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter un actif sous-jacent à un prix convenu (prix d'exercice) avant une date d'expiration donnée; le *payoff* d'un *call* à l'expiration est donné par $\max(0, \text{Prix du Sous-Jacent} - \text{Prix d'Exercice})$.

$$\begin{aligned}
\pi_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s \cdot ds} (BV(T) - BF(T))_+ | \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s \cdot ds} \left(\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P(T, T_j) \right) (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P(t, T_j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

Le passage de la ligne 2 à la ligne 3 s'effectue par changement de numéraire. En effet, la mesure $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}$ est associée au numéraire $N_t = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P(t, T_j)$, et permet de rendre le taux *swap* martingale. On reconnaît finalement une somme de *payoffs* de *calls*, et avec la formule de Black Scholes, on peut déterminer le prix de la *swaption* en $t = 0$ avec la relation (2.8)

$$\pi_0 = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P(0, T_j) \times Call^{BS}(S_0, 0, K, T, \sigma^{imp}), \quad (2.8)$$

avec

$$Call^{BS}(X, r, K, T - t, \sigma) = X\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (2.9)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln \frac{X}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Finalement, pour chaque maturité de *swaption* T_0 et chaque ténor $T_n - T_0$, on détermine le prix de l'instrument en remplaçant σ^{imp} et K respectivement par la volatilité et le strike ATM récupérés de Bloomberg.

Etape 2 : prix de modèle

Le modèle de Hull White présente l'avantage qu'il existe une formule fermée permettant d'approximer le prix des *swaptions* payeuses. Il est effectivement possible de voir la *swaption* comme une somme de *puts* européens sur des zéro-coupons selon la méthode présentée par GURRIERI et al. (2009).

Soit un put européen de prix déterminé en t , pour une maturité T_m , de *strike* K et dont le sous-jacent est un zéro-coupon de maturité T_{sj} , alors son prix est

$$PZC(t, T_m, T_{sj}, K) = KP(t, T_m)\Phi(d_+) - P(t, T_{sj})\Phi(d_-), \quad (2.10)$$

avec :

$$d_{\pm} = \frac{\ln \left(\frac{P(t, T_m)}{P(t, T_{sj})} K \right)}{\sqrt{V(t, T_m, T_{sj})}} \pm \sqrt{V(t, T_m, T_{sj})},$$

et

$$V(t, T_m, T_{sj}) = \frac{\sigma_{HW}^2}{2a_{HW}} \left(1 - e^{-2a_{HW}(T_m - t)} \right) \times B(T_m, T_{sj})^2.$$

On a alors le prix de la *swaption* en $t = 0$, de maturité T_0 , ténor $T_n - T_0$ et *strike* K avec la formule (2.11)

$$PSWHW(0, T_0, T_n, K) = \sum_{i=1}^n [K(T_i - T_{i-1})PZC(0, T_0, T_i, Y_i)] + PZC(0, T_0, T_n, Y_n), \quad (2.11)$$

avec

$$Y_i = A(T_0, T_i) \times e^{-B(T_0, T_i)r^*},$$

tel que r^* vérifie la condition

$$\sum_{i=1}^n [K(T_i - T_{i-1})Y_i] + Y_n = 1.$$

Etape 3 : Optimisation des paramètres

Avec la formule 2.11, il est possible de calculer les prix des *swaptions* pour les mêmes maturités et ténors que les instruments récupérés sur le marché. Les prix du modèle dépendent évidemment des paramètres a et σ , on procède alors à une optimisation numérique de ces paramètres pour limiter l'écart entre les prix théoriques et ceux modélisés.

Python propose un package très complet permettant d'effectuer ce genre d'opération : *scipy* et en particulier *scipy.optimize*. L'écart relatif entre les prix marché (*market*) et les prix modèle (*model*) a été minimisé avec la fonction

$$OBJ(a, \sigma) = \sum_{i=1}^{\text{nb instruments}} \left(\frac{P_i^{\text{model}(a, \sigma)} - P_i^{\text{market}}}{P_i^{\text{market}}} \right)^2.$$

L'optimisation sur la courbe EIOPA au 31/12/2022 et les volatilités présentées dans le tableau 2.1 amène aux paramètres du tableau 2.2.

Paramètre	Valeur
a	4,7%
σ	1,1%

TABLE 2.2 : Résultats de calibration du modèle HW1 au 31/12/2022

2.2.2 Evolution des indices action et immobilier

Maintenant le modèle de taux calibré et prêt à diffuser, les évolutions des indices action et immobilier doivent être ajoutées au sein du GSE. L'évolution de ces indices a été réalisée en suivant des processus de Black-Scholes. Sous probabilité historique \mathbb{P} , l'EDS de Black-Scholes est

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t,$$

avec :

- X_t la valeur de l'indice action.
- μ le *drift*, ou moyenne d'évolution log-normale de l'indice.
- σ la volatilité log-normale du processus.

On dit que le processus de Black Scholes $(X_t)_t$ a une **dynamique log-normale**. Sous probabilité risqué neutre \mathbb{Q} , on remplace simplement μ par le taux sans risque r pour obtenir

$$\frac{dX_t}{X_t} = r \cdot dt + \sigma \cdot dW_t.$$

Ce changement de mesure s'effectue grâce au théorème de **Girsanov**, et est disponible en annexe (A.4.4).

Dans un GSE cependant, le taux sans risque n'est pas constant : il évolue à chaque pas de temps en fonction de la diffusion réalisée au sein du modèle de taux. L'EDS du processus stochastique d'action ou d'immobilier prend alors la forme

$$\frac{dX_t}{X_t} = r_t \cdot dt + \sigma \cdot dW_t.$$

La solution de cette EDS se retrouve aisément, et permettra de diffuser directement les indices, sans passer par un schéma de diffusion (Euler par exemple).

Commençons par poser $Y_t = f(t, X_t) = \ln(X_t)$. Alors on peut appliquer la formule d'Itô (A.3) pour différencier le processus $(Y)_t$.

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot d\langle X \rangle_t \\ &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot dt \\ &= r_t \cdot dt + \sigma \cdot dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot dt \\ &= \left(r_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t. \end{aligned}$$

En intégrant de 0 à t :

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \sigma \int_0^t dW_s.$$

En réarrangeant, on a :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \sigma \int_0^t dW_s.$$

Rappelons que $Y_t = \ln(X_t)$ et $Y_0 = \ln(X_0)$. En appliquant l'exponentielle des deux côtés de l'équation, on a

$$X_t = X_0 \exp \left(\int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \sigma \int_0^t dW_s \right),$$

ou encore

$$X_t = X_0 \exp \left(\int_0^t r_s \cdot ds - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t \right). \quad (2.12)$$

L'équation 2.12 permet ainsi de diffuser les indices action et immobilier. Il suffit maintenant de calibrer les paramètres de volatilité pour chaque classe d'actif.

Détermination des volatilités

Pour respecter les conditions de risque-neutralité du processus de diffusion, il est courant de déterminer les volatilités des classes d'actifs à partir des prix du marché en utilisant la volatilité implicite des options. Cette calibration est effectuée en inversant la formule de Black-Scholes (formule 2.9). Pour un prix d'option observé sur le marché, on recherche la volatilité qui, une fois insérée dans le modèle, donne ce prix.

Pour la volatilité "action", ce calibrage a pu être réalisé au 31/12/2022, en calibrant la volatilité sur des options européennes portant sur le cours de l'EuroStoxx 50 (données Bloomberg). Néanmoins, cette étape n'a pas été réalisée pour l'immobilier, par manque de données de marché pertinentes. Au lieu de cela, une volatilité en accord avec les normes du marché a été choisie, sur la base d'avis d'experts.

Paramètre	Valeur
σ_{action}	15,8%
σ_{immo}	6,7%

TABLE 2.3 : Paramètre de volatilités des diffusions action et immobilier au 31/12/2022

2.2.3 Etudes de corrélation entre les classes d'actifs

Déterminer les corrélations entre différentes classes d'actifs est crucial pour la gestion des risques, l'allocation d'actifs, et la modélisation des scénarios économiques. Les corrélations sont d'ailleurs souvent utilisées pour estimer la diversification d'un portefeuille et prévoir son comportement face à des conditions de marché spécifiques.

La méthode employée pour déterminer la matrice de corrélation est basée sur des **données historiques pour la période allant du 1er janvier 2018 au 1er janvier 2023**. Les indices boursiers et immobiliers ont été obtenus de **Yahoo Finance**, tandis que les données pour le taux d'intérêt ont été téléchargées directement depuis le site de la **Banque centrale européenne**. Les indices utilisés sont les suivants :

- **Euro Stoxx 50 (STOXX50E)** : Il représente les performances des 50 principales entreprises cotées dans la zone euro.
- **iShares European Property Yield ETF (IPRP.AS)** : Utilisé comme une représentation du marché immobilier européen, il permet de suivre les performances d'entreprises européennes opérant dans le secteur immobilier.
- **Euro Area 1-year Government Bond Yield** : Le rendement des obligations gouvernementales à 1 an de la zone euro pour des obligations notées triple A.

Une fois les données collectées, elles ont été transformées pour calculer des rendements. Pour les indices qui suivent une diffusion de Black-Scholes, comme les **actions et l'immobilier**, les **rendements logarithmiques** ont été utilisés en raison de l'hypothèse de log-normalité. Pour le taux d'intérêt, qui est supposé suivre une distribution normale dans le modèle HW1, les **rendements simples** ont été utilisés.

Enfin, la matrice de corrélation a été déterminée en utilisant la fonction `.corr()` de la bibliothèque 'pandas' en Python. La matrice symétrique définie positive du tableau 2.4 est ainsi obtenue.

	Taux	Action	Immo
Taux	100,00	-3,07	-3,97
Action	-3,07	100,00	69,09
Immo	-3,97	69,09	100,00

TABLE 2.4 : Matrice des corrélations implémentée dans le GSE (en %)

Par la suite, pour pouvoir simuler des mouvements Browniens aléatoires corrélés, cette matrice 3x3 doit être décomposée en matrice triangulaire. La décomposition de **Cholesky** permet de faire une telle transformation sur une matrice symétrique définie positive.

Soit R une matrice de corrélation. La décomposition de Cholesky donne une matrice L triangulaire inférieure telle que

$$R = L \times L^T.$$

Pour obtenir des mouvements browniens simulés, on génère d'abord pour un pas de temps t ,

$$W_t = (W_t^T, W_t^A, W_t^I)',$$

un vecteur de 3 aléas indépendants et identiquement distribués. On multiplie ensuite ce vecteur par la matrice triangulaire déterminée précédemment par la décomposition de Cholesky, pour obtenir \tilde{W}_t le vecteur de browniens corrélés.

$$\tilde{W}_t = (\tilde{W}_t^T, \tilde{W}_t^A, \tilde{W}_t^I)' = L \times W_t.$$

2.2.4 Validation des tables GSE

Pour respecter les conditions de *Market Consistency* imposées par l'EIOPA, le GSE doit valider un certain nombre de tests. Le document d'orientation de l'Institut des Actuaire sur les pratiques à respecter lors de la construction des GSE (INSTITUT DES ACTUAIRES, 2018a) mentionne en particulier les tests de **martingalité** et ceux de cohérence avec le marché.

Validation du modèle de taux

Un des premiers tests à effectuer pour valider les taux est celui de **martingalité du déflateur**. Si la calibration et la diffusion se sont déroulées convenablement, alors la moyenne des déflateurs de tous les scénarios de taux devrait retomber sur les prix des zéro-coupons de la courbe EIOPA initiale.

Pour un scénario k , le déflateur se calcule de la manière suivante :

$$DF^k(0) = 1,$$

et

$$DF^k(t+1) = DF^k(t) \times \frac{1}{1 + R^k(t, t+1)}.$$

Le prix des ZC de la courbe EIOPA se retrouve comme suit :

$$P(0, T) = \frac{1}{(1 + R(0, T))^T}.$$

La figure 2.2 donne l'écart entre la moyenne des courbes $(DF^k(t))_{t \in [0, 50]}$ et $(P(0, T))_{T \in [0, 50]}$. On observe que l'écart maximum entre le prix réel et le prix simulé atteint -2,5% à 48 ans. Cette erreur découle principalement du caractère stochastique des tables générées.

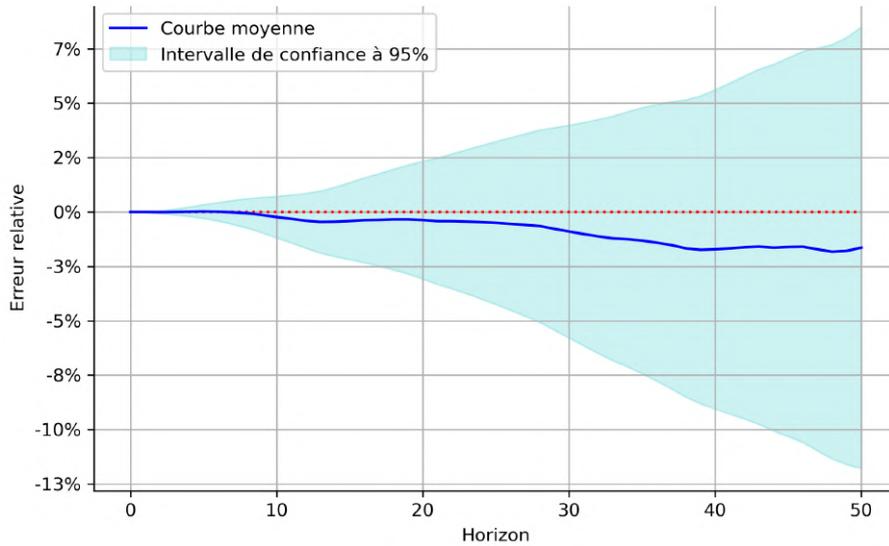


FIGURE 2.2 : Ecart relatif entre le déflateur moyen issu du GSE par rapport à la courbe de prix ZC $P(0, T)$ issue de la courbe de taux ZC EIOPA initiale.

Il est également possible de retransformer les prix ZC en taux, pour obtenir la figure 2.3. En rouge, on reconnaît alors la structure par terme des taux de l'EIOPA, contre la courbe reconstruite à partir des taux des tables GSE, en bleu.

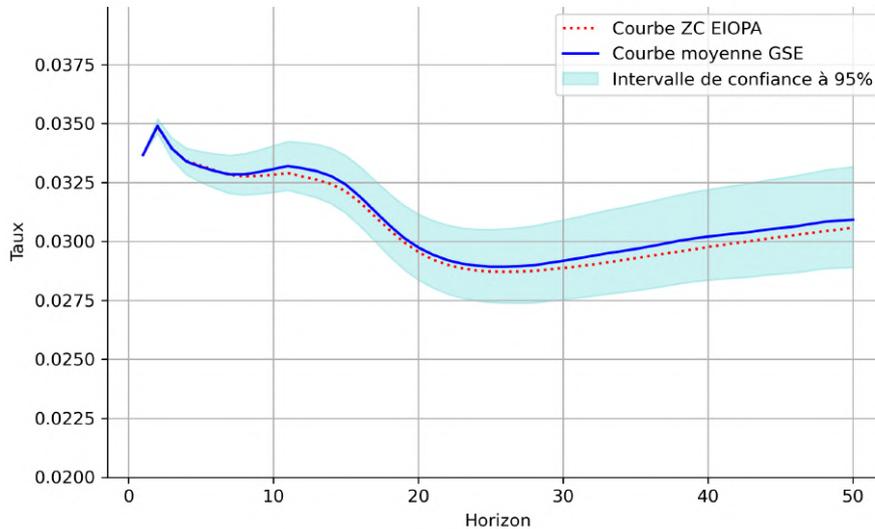


FIGURE 2.3 : Courbe ZC issue des déflateurs du GSE contre celle de l'EIOPA.

Les graphiques 2.2 et 2.3 permettent de valider la calibration du modèle de taux sur la courbe EIOPA donnée en entrée, et la diffusion du modèle. Par ailleurs, les tests de cohérence avec le marché ont été effectués pour recalculer le prix des *swaptions* par Monte-Carlo. Les écarts de prix ont été jugés non significatifs.

La diffusion des taux a ainsi été calibrée.

Validation des projections action et immobilier

Pour l'action et l'immobilier, des tests de martingalité sont effectués.

Pour une table k , on calcule le prix actualisé en t de l'indice action ou immobilier S :

$$\tilde{S}_t^k = DF^k(t) \times S_t^k.$$

On construit alors la figure 2.4 en prenant, pour chaque pas de temps t , la moyenne des S_t^k .

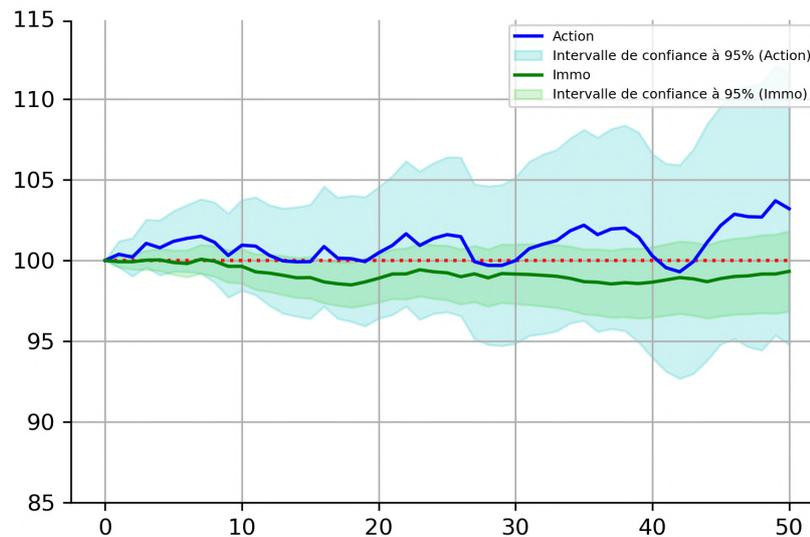


FIGURE 2.4 : Tests de martingalité des indices action et immobilier.

La figure 2.4 montre que les prix actualisés moyens des deux indices restent autour de 100, la valeur initiale : il n'y a pas de création de valeur, les écarts par rapport au prix central étant une nouvelle fois dus au caractère stochastique des diffusions.

Conclusion Les tests exécutés sur les tables de scénarios économiques permettent de valider la calibration et l'aspect risque neutre des diffusions réalisées. On revient bien, en moyenne, sur la courbe EIOPA pour les projections de taux, et les processus actions et immobiliers sont bien martingales. **Il est ainsi possible de valider le GSE.**

2.3 Le modèle ALM : la gestion actif-passif

La fonction et l'importance des modèles ALM chez les assureurs vie a déjà été présentée précédemment. Cette section vise à présenter la structure générale du modèle qui a été développé entièrement pendant la rédaction de ce mémoire.

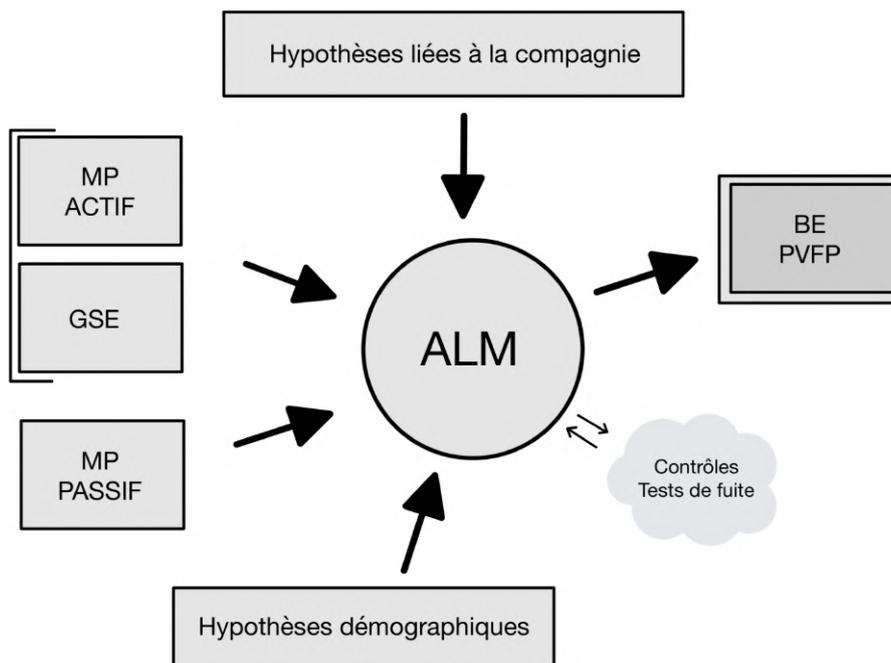


FIGURE 2.5 : Structure générale des outils développés.

Le modèle projette :

- L'actif (obligations, actions, immobiliers, liquidités)
- Les provisions mathématiques (PM)
- La réserve de capitalisation (RC)
- La provision pour participation aux bénéfiques (PPB / PPE)

Remarque Les fonds propres n'ont pas été modélisés.

2.3.1 Déroulé de la projection au sein du modèle ALM

Les paramètres généraux du modèle sont récupérés d'un fichier de configuration Microsoft Excel. Les *model points* de l'actif et du passif sont eux aussi lus à partir d'un fichier .xlsx.

Une fois les entrées données au modèle, des **tests de cohérences** sont effectués directement en amont pour vérifier que les paramètres ne sont pas anormaux. Par exemple, l'Excel de paramétrage notifie à l'utilisateur si le bilan initial est déséquilibré, ou encore si les cibles d'allocation d'actifs ne somment pas à 100%. Ces quelques vérifications permettent d'éviter des erreurs de saisies initiales, qui fausseraient tous les résultats.

Le modèle ALM à proprement parler a été développé sous forme de classe en Python. La classe se compose d'une multitude de fonctions, qui permettent de faire avancer petit à petit la projection au cours d'une année. Une boucle permet ensuite d'incrémenter le temps et de recommencer le processus annuel jusqu'à l'horizon de projection.

Les différents blocs du modèle et hypothèses générales

Le schéma 2.8 présente les différents blocs (i.e. les différentes fonctions) du modèle ALM.

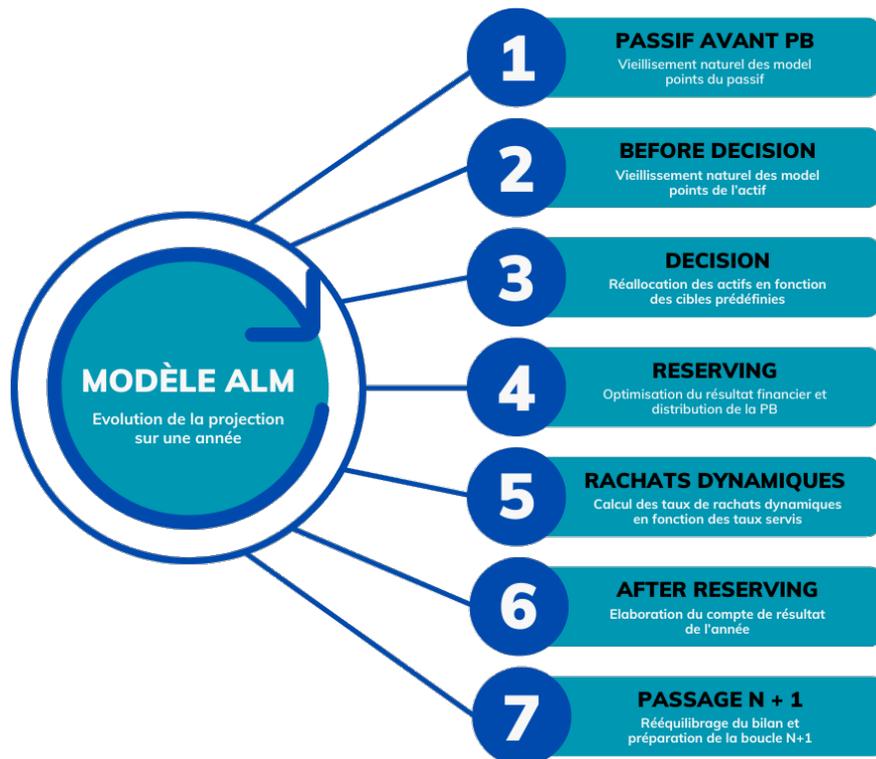


FIGURE 2.6 : Structure de la projection ALM (sur 1 année).

En plus de ces différentes étapes, le modèle reçoit des hypothèses de projection :

- Le nombre de scénario à réaliser (si la liaison avec le GSE est activée).
- La durée de projection désirée.
- Le montant initial de la réserve de capitalisation.
- L'intervalle de maturités pour le réinvestissement obligataire.
- Le taux d'inflation annuel des frais.
- Le taux de frais financier (sur garde et produits).
- Les taux de dividende et loyer.
- Des contraintes sur le niveau de PPE et de PMVL minimum à maintenir en portefeuille.
- Les cibles et corridors concernant le portefeuille d'actif.
- Le taux de partage des produits financier en fin de projection.

Ces hypothèses sont configurables dans le fichier Excel d'*input*, et est disponible en annexe (A.1 et A.2).

Initialisation du modèle sur un scénario

L'initialisation du modèle consiste simplement à importer les données d'actif, de passif et la table de scénario qui sera utilisée pour la projection des courbes de taux, ainsi que des indices actions et immobilier.

Risque neutralisation des obligations

Le modèle développé ne prend pas en compte de risque de crédit* et **fait l'hypothèse forte que l'ensemble du portefeuille obligataire est composé d'obligations souveraines AAA**. Chaque obligation est caractérisée par sa valeur de marché (VM), sa valeur comptable (VNC), son taux de coupon et sa maturité. Ces informations, combinées à la courbe de taux initiale, permettent de recalculer les prix réels des obligations.

Dans la plupart des cas, le prix que l'on détermine n'est pas égal à la valeur de marché du titre en portefeuille, notamment en raison de l'existence d'un risque de *spread* sur certains de ces titres. Dans notre modèle, cependant, nous souhaitons annuler ce risque de *spread* afin de considérer que chaque obligation est alignée sur le taux sans risque : c'est la **risque neutralisation des obligations**.

Considérons par exemple une obligation du portefeuille initial dont les caractéristiques sont données dans le tableau 2.5.

VM	VNC	Nominal	Maturité	Taux de coupon
920,00 €	1 000,00 €	1 000,00 €	8 ans	2%

TABLE 2.5 : Exemple d'une obligation en portefeuille.

Admettons en plus que la courbe des taux est constante et égale à 3,5%. Alors le prix réel de l'obligation est donné par la formule (2.13) :

$$896,89\text{€} = \sum_{t=1}^8 \frac{1000 \times 2\%}{(1 + 3,5\%)^t} + \frac{1000 \times (1 + 2\%)}{(1 + 3,5\%)^8}. \quad (2.13)$$

Pour s'assurer de retomber sur la valeur de marché du portefeuille, il faut donc multiplier les flux de l'obligation par un coefficient de risque neutralisation $k = \frac{VM_{\text{portefeuille}}}{\text{Prix réel}}$. Dans l'exemple précédent, $k = \frac{920,00}{896,89} \simeq 1,03$. En multipliant le nominal de l'obligation par ce coefficient, on obtient bien la valeur de marché de l'obligation : 920€ (2.14).

$$920\text{€} = \sum_{t=1}^8 \frac{1000 \times \mathbf{1,03} \times 2\%}{(1 + 3,5\%)^t} + \frac{1000 \times \mathbf{1,03} \times (1 + 2\%)}{(1 + 3,5\%)^8}. \quad (2.14)$$

Cet ajustement est réalisé pour chaque obligation du portefeuille, et assure la neutralité de la totalité de l'actif.

Remarque Lors de l'étape de risque neutralisation, on modifie le nominal de l'obligation. On crée alors mécaniquement un écart entre la VNC et le nominal. Il est donc nécessaire d'enregistrer des amortissements sur ces obligations pour s'assurer que les flux s'enroulent bien d'année en année.

Évolution du passif avant versement de participation aux bénéfices

La première étape du modèle est de récupérer le passif en début de période et de le faire vieillir naturellement en calculant, pour chaque *model point*, les éléments suivant :

*Le risque de crédit, également appelé risque de défaut, fait référence à la probabilité que l'émetteur d'une obligation ne parvienne pas à rembourser le principal et les intérêts aux investisseurs conformément aux termes de l'obligation. En d'autres termes, c'est le risque que l'émetteur fasse défaut sur ses paiements. Les émetteurs d'obligations avec une notation de crédit inférieure ont généralement un risque de crédit plus élevé, car ils sont considérés comme moins susceptibles de respecter leurs obligations de paiement.

1. **Les taux de décès**, en fonction de la **table de mortalité TH-TF 002**.
2. **Les taux de rachats structurels**, suivant la fonction de la figure 2.7. Ces taux de rachats présentent 2 pics particuliers : le premier à 4 ans d'ancienneté et le second à 8 ans d'ancienneté. Ces deux dates représentent les moments à partir desquels la fiscalité de rachat devient plus avantageuse pour l'assuré.

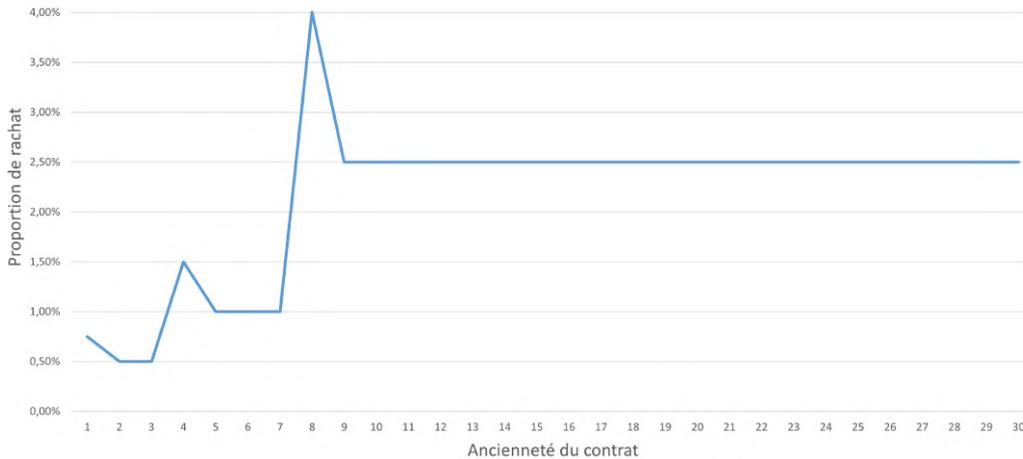


FIGURE 2.7 : Pourcentage de rachats (par rapport à la PM d'ouverture) en fonction de l'ancienneté du contrat.

A ce taux est ajouté le taux de rachat conjoncturel, pour obtenir le taux de rachat total :

Taux de rachat total = $\max \{0, \min \{1, \text{Taux de rachat structurel} + \text{Taux de rachat conjoncturel}\}\}$.

3. **Les intérêts techniques** : ils sont calculés annuellement sur base de la PM d'ouverture.

$$IT = PM_{01/01} \times \text{TMG}.$$

4. **Le montant des chargements et des frais sur encours.**

Les chargements viennent en réduction des PM des assurés pour rémunérer l'assureur :

$$\text{Chargements sur encours} = PM_{01/01} \times \text{Taux de chargement sur encours}.$$

Les frais correspondent aux coûts de gestion des contrats, et sont payés par l'assureur :

$$\text{Frais sur encours} = PM_{01/01} \times \text{Taux de frais sur encours}.$$

5. **Le montant total des prestations de sortie.**

Les prestations nettes sont égales aux rachats et décès, augmentés des intérêts techniques accumulés sur l'année et réduites de la part de chargements correspondant. L'hypothèse est qu'elles sont versées en fin d'année.

$$\text{Prestations brutes} = \text{Rachats} + \text{Décès}.$$

$$\text{Prestations nettes} = \text{Prestations brutes} \times (1 + \text{TMG}) \times (1 - \text{Taux de chargement}).$$

A la fin de cette étape, les montants des prestations et des frais sont connus, ainsi que le montant des PM restantes en portefeuille, avant versement de participation aux bénéfices :

$$PM_{31/12}^{\text{Avant PB}} = PM_{01/01} + \text{Intérêts techniques} \\ - \text{Prestations nettes} - \text{Chargements sur encours}.$$

Vieillessement de l'actif au cours de l'année

L'actif évolue de son côté en fonction des hypothèses de la table du GSE.

1. Chaque année, les **coupons** des obligations viennent alimenter l'assiette de produits financiers. Les prix des obligations sont recalculés avec la nouvelle courbe de taux sans risque issue du GSE. Soit une obligation de nominal N , taux de coupon τ et de maturité T , et une courbe de taux sans risque (r_1, \dots, r_{50}) , alors

$$VM = \sum_{t=1}^T \frac{\tau \times N}{(1 + r_t)^t} + \frac{N}{(1 + r_T)^T}. \quad (2.15)$$

Par ailleurs, si l'obligation arrive à maturité, le nominal est récupéré en liquidités qui seront réinvesties dans l'étape suivante.

2. Les actions et immobiliers évoluent suivant leurs scénarios respectifs. Le modèle commence par calculer les nouveaux prix de marché de chaque *model point* d'action et d'immobilier, puis les **dividendes** et les **loyers** sont récupérés et ajoutés à l'assiette de produits financiers.

Par exemple, on peut considérer une action valant 100€ au 31/12/2022. Elle prend 15% de valeur sur l'année 2023, et vaut donc 115€ le 31/12/2023. Admettons que l'on récupère un coupon de 3%, soit 3,45€; alors le prix de l'action après toutes opérations du modèle est 111.55€. Cet exemple est illustré dans la figure 2.8.

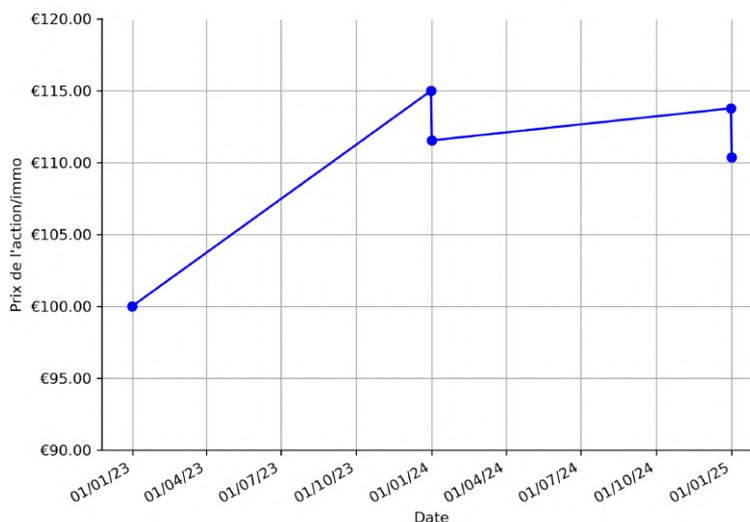


FIGURE 2.8 : Exemple d'évolution d'une action entre 2022 et 2024, avec tombées de dividendes.

3. Le cash est revalorisé au taux sans risque. Le rendement associé alimente lui-aussi l'assiette de produits financiers.
4. Les frais financiers sont calculés sur la valeur de marché des actifs en garde et sur les produits financiers.

Mécanisme de rééquilibrage de l'actif

Une fois le **solde de trésorerie*** déterminé, on l'ajoute aux liquidités de l'assureur. **Si ce solde est positif**, alors la part des liquidités augmente. Il faut alors rééquilibrer le portefeuille en achetant les actifs manquants. Inversement, si **le solde de trésorerie est négatif**, alors il faut vendre une partie des autres classes d'actifs pour se remettre dans une position normale.

Pour assurer une certaine stabilité au niveau du portefeuille, il est décidé de **définir les cibles d'allocation en valeur comptable**. En effet, en basant les objectifs d'allocation sur les valeurs de marché des actifs, le mécanisme serait fortement exposé aux scénarios instables en environnement stochastique. L'algorithme serait amené à effectuer des mouvements répétés entre les achats et les ventes, car les prix des actifs, donc les cibles, seraient fortement sensibles à ces scénarios.

Lors de l'initialisation du modèle, des cibles d'allocation et des corridors (voir A.2) sont définis. La première étape de l'algorithme est de calculer les pourcentages initiaux de chaque classe d'actifs. Pour l'action, on aurait $\text{Part}_{\text{action}} = \frac{VNC_{\text{action}}}{VNC_{\text{total}}}$.

L'algorithme compare ensuite cette valeur à l'intervalle autorisé : [cible – corridor; cible + corridor]. Si les bornes sont déjà respectées pour chaque type d'actifs, alors aucune réallocation n'est nécessaire, et le portefeuille est conservé tel qu'il est.

Si en revanche, l'une des cibles n'est pas atteinte, le rééquilibrage s'effectue dans l'ordre suivant :

1. Achat / Vente d'obligations

En cas de vente, l'impact de plus-value ou de moins-value est reporté en réserve de capitalisation. Si la réserve de capitalisation est vide et qu'il est encore nécessaire de vendre des titres en moins-value latente, on impute ce montant à l'assiette de produits financiers distribuables.

Si à l'inverse on a besoin de nouvelles obligations, on les achète **au pair**, c'est-à-dire à un prix d'achat égal au nominal. Cela permet de **s'affranchir de manipuler des amortissements** pour ces nouveaux titres obligataires.

Le taux d'une obligation au pair dépend des conditions économiques du moment. Soit une courbe des taux (r_1, \dots, r_{50}) , alors le taux de coupon τ de la nouvelle obligation doit respecter l'équation

$$1 = \sum_{t=1}^T \frac{\tau}{(1+r_t)^t} + \frac{1}{(1+r_T)^T}, \quad (2.16)$$

ou encore,

$$\tau = \frac{1 - \frac{1}{(1+r_T)^T}}{\sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+r_t)^t}}.$$

La maturité T des nouvelles obligations a été fixée dans les hypothèses de projection, et choisie pour correspondre à la durée moyenne du portefeuille initial.

2. Achat / Vente d'actions

Le modèle vend en priorité les actions dont le taux de plus ou moins-value latente est le plus faible possible, en valeur absolue. Cela permet de minimiser l'impact de la vente sur l'assiette de résultat financier distribuable.

Les achats sont effectués au cours du marché.

3. Achat / Vente d'immobilier

Les ventes et achats d'actifs immobilier se font de manière similaire aux opérations faites pour les actions.

*Le solde de trésorerie est défini comme la différence entre tous les flux entrants (coupons, nominaux, dividendes, rendements des liquidités) et tous les flux sortants (prestations nettes et frais).

Remarque. Les nouvelles lignes d'actifs ne se fusionnent pas avec les anciennes. Si le modèle achète une nouvelle action, par exemple, alors sa valeur comptable (et de marché) n'est pas ajouté à une ligne d'action existante (et pareillement pour les obligations et l'immobilier). Cette architecture permet de conserver des actifs de même classe à plusieurs niveaux de plus ou moins-value, et sera utile dans l'algorithme de participation aux bénéfices présenté ensuite.

Gestion de la participation aux bénéfices financière

La distribution de participation aux bénéfices et la gestion de la PPB ont été une étape délicate à mettre en place au sein du modèle. L'objectif de cette fonction est de simuler la manière dont l'assureur va piloter ses rendements financiers pour augmenter ou diminuer le montant de participation contractuelle qu'il devra verser. Pour la mise en place de cette partie au sein du modèle, nous nous sommes basés principalement sur le document de l'institut des actuaires *Groupe de travail « Best Estimate Liabilities Vie »* (INSTITUT DES ACTUAIRES, 2023), et en particulier le chapitre 10.

Dans un premier temps, le modèle se charge de calculer, pour chaque *model point* de passif, le montant du taux de revalorisation attendu par les assurés. Ce taux dépend de :

- La moyenne des taux de revalorisation des 3 années précédentes.
- Un taux de marché à court terme, le taux à 1 an : r_1 .
- Un taux de marché à moyen terme, le taux à 10 ans : r_{10} .

Des poids (α, β, γ) sont par ailleurs ajoutés à ces taux pour obtenir :

$$\begin{aligned} \text{Taux attendu} = \max(\text{TMG}; \\ \alpha \times \text{Taux moyen des 3 dernières années} \\ + \beta \times r_1 \\ + \gamma \times r_{10}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ensuite, l'arbre de décision 2.9 permet de déterminer le montant de revalorisation de chaque *model point*. Il est important de préciser que **l'ensemble des opérations décrites ci-dessous s'effectue en manipulant des montants**, et non des taux. Les montants théoriques, les montants cibles ainsi que ceux de participation sont donc agrégés et manipulés comme tel. L'arbre se compose de deux branches principales qui se rejoignent à la fin :

- La branche de gauche, ou **branche favorable**, intervient si le résultat financier de l'assureur est suffisant pour payer les taux garantis, à la fois sur les prestations de sortie et sur les provisions toujours en portefeuille.

Comme les produits financiers sont supérieurs aux TMG, alors on calcule le montant de la participation aux bénéfices, tel que

$$PB = \max \{ \text{Produits financiers nets} \times \text{Taux PB moyen} - \text{TMG}; 0 \};$$

où

- *Taux PB moyen*, est le taux de participation contractuel moyen des *model points* de passifs (au prorata des PM en portefeuille);
- *TMG*, est le montant total d'intérêts techniques à verser (prestations comprises).

On calcule ce montant de participation aux bénéfices sur l'ensemble des produits financiers réalisés, en considérant donc qu'il n'existe **qu'un seul pool d'actifs**.

L'étape qui suit vise à **calculer les cibles de revalorisation**. L'assureur détermine en amont un **taux théorique** de revalorisation qu'il veut appliquer sur les contrats en portefeuille :

$$\text{Taux théorique} = \max \{TMG; \text{Taux PB}_{\text{pool}} \times \text{Produits financiers}\}.$$

Ce taux est challengé au taux attendu par les assurés défini précédemment, pour définir le taux cible :

$$\text{Taux cible} = \max \{ \text{Taux théorique}; \text{Taux attendu} \}.$$

S'en suit la récupération de la PPE à libérer car elle a été provisionnée il y a 8 ans* (PPE_0). Avec cet ajout, le montant de revalorisation total peut ne pas atteindre la cible, ou bien la dépasser. C'est pourquoi le modèle essaiera de s'en rapprocher, à l'aide de **réalisation de plus-values latentes** (pour augmenter le résultat si la cible n'est pas atteinte) **ou de moins-values latentes** (pour diminuer le résultat si la cible est dépassée) sur les actifs R343-10.

Cette étape modifie le montant de PB contractuelle total à verser aux assurés, les cibles sont donc recalculées. Par ailleurs, l'ensemble de la PB réalisée sur l'année est placée en PPB (de nouvelle génération), quitte à la récupérer ensuite pour payer les revalorisations cibles. Cela permet notamment de régénérer la PPB et éviter d'être contraint de libérer celle qui atteindrait 8 ans de maturité.

Après toutes ces étapes, les deux branches se rejoignent.

- La branche de droite, ou **branche défavorable**, est activée s'il n'y a pas assez de produits financiers pour payer les intérêts techniques.

Il y a alors 2 possibilités : soit réaliser des plus-values latentes sur les actifs R343-10, pour augmenter le résultat financier et pouvoir payer les intérêts techniques. S'il n'y a pas assez de plus-values latentes, l'assureur est forcé de réduire son résultat et consomme potentiellement ses fonds propres pour respecter ses engagements.

Aucune participation aux bénéfices n'est calculée dans cette branche, les cibles sont quant-à-elle déterminées de manière similaire à la branche gauche. On reprend également la PPE_0 .

Une fois les 2 branches de l'arbre réunies, l'algorithme regarde dans un premier temps s'il est nécessaire de reprendre de la PPB pour atteindre les cibles, ou si le stock déjà libéré est suffisant. Dans le premier cas ("Non"), on reprend successivement la PPB de la plus ancienne à la plus récente (PPE_1 , puis PPE_2 et ainsi de suite) jusqu'à atteindre l'objectif. On a alors soit exactement de quoi payer les cibles, soit moins. Dans ce second cas, après avoir payé les TMG, il reste une partie des produits financiers à distribuer, mais pas assez pour atteindre toutes les cibles. On distribue alors cette partie restante **au prorata des provisions mathématiques, pondéré par les taux de PB contractuelle**. Cela permet de mieux revaloriser les *model points* dont la participation est censée être plus élevée, tout en contournant le fait qu'il n'ait pas été possible de calculer ces montants ligne à ligne avec un seul *pool* d'actifs.

Les rachats dynamiques

Lorsque la revalorisation finale a été effectuée à l'étape précédente, on peut calculer le taux de rachat conjoncturel pour chaque *model point*. Il dépend effectivement de la satisfaction de l'assuré par rapport au taux qu'il attendait. L'ACPR, dans son rapport *Orientations Nationales Complémentaires*

*La provision pour participation aux bénéfices permet à l'assureur de conserver une partie de la participation en stock pour la redistribuer plus tard. C'est une provision qui permet notamment de lisser la manière dont sont effectuées les revalorisations des contrats des assurés. Son cycle de vie est de 8 années : le montant provisionné en année 0 doit être complètement libéré en année 8 ou avant.

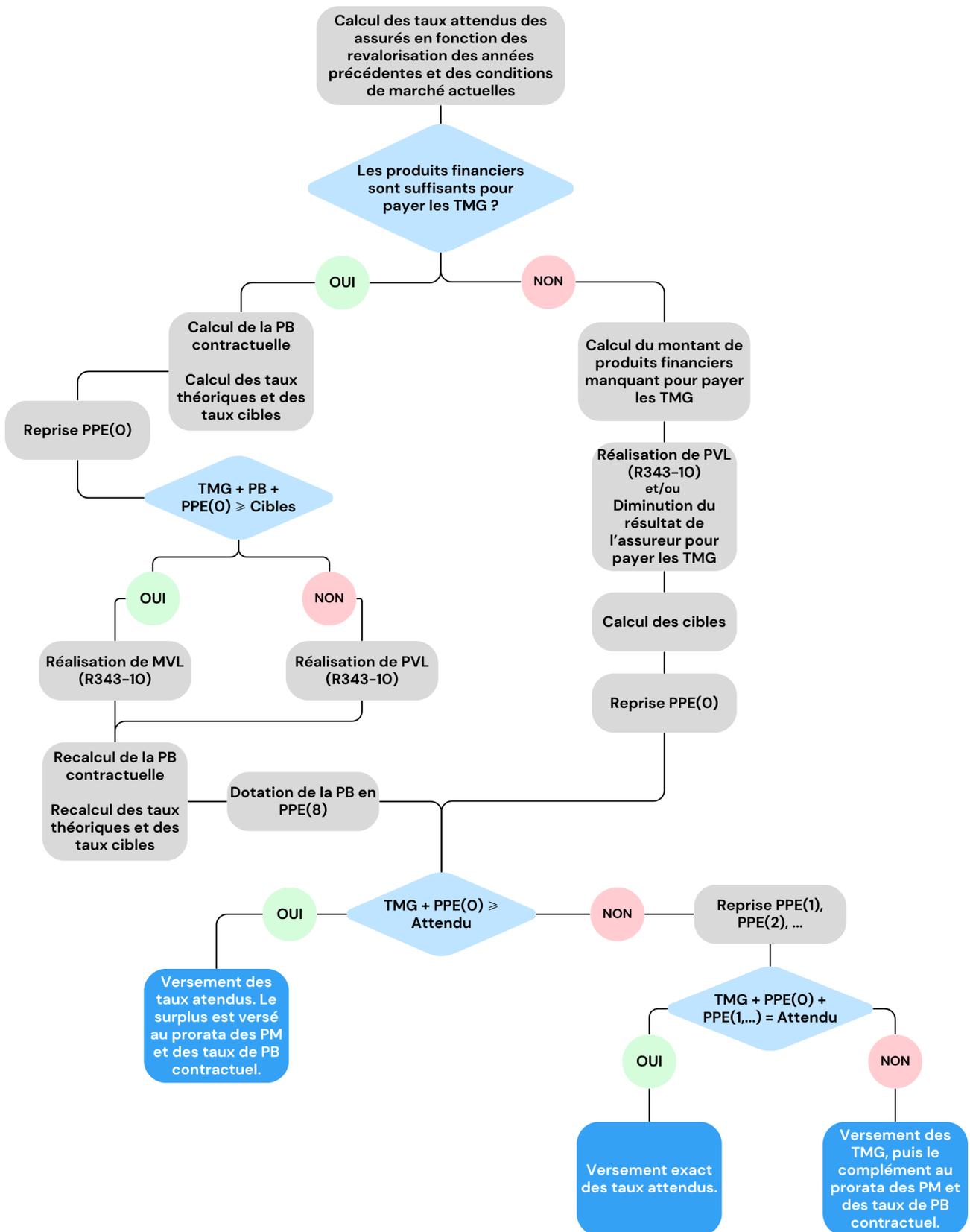


FIGURE 2.9 : Développement de l’algorithme de distribution de participation aux bénéfices.

aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II (ACPR, 2013), mentionne la forme de la fonction à utiliser par défaut pour calculer ces taux. Cette formule ainsi que les intervalles de paramètres sont disponibles dans le tableau 2.6.

$$RC(R) = \begin{cases} RC_{\max} & \text{si } R - TA < \alpha \\ RC_{\max} \frac{(R - TA - \beta)}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < R - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < R - TA < \gamma \\ RC_{\min} \frac{(R - TA - \gamma)}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < R - TA < \delta \\ RC_{\min} & \text{si } R - TA > \delta \end{cases}$$

	α	β	γ	δ	RC_{\min}	RC_{\max}
Plafond max	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
Plafond min	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

TABLE 2.6 : Tableau de paramétrage possible de la fonction de rachats structurels.

Ce taux de rachat sera appliqué sur l'année suivante, et combiné au taux structurel.

Consolidation des résultats de l'année en cours et passage à l'année suivante

La dernière étape d'une boucle annuelle est d'agrèger les flux émanant des différents *model points* et construire un compte de résultat. Les données sauvegardées à cette étape serviront à calculer le BE et la PVFP en fin de projection.

Le résultat peut être positif comme négatif, et vient ainsi augmenter ou réduire les fonds propres de l'assureur. Étant donné qu'ils n'ont pas été modélisés, il faut à la fin de chaque boucle s'assurer de retirer le résultat et de rééquilibrer le bilan.

- Si le résultat est positif, on le soustrait du passif et on enlève du cash à l'actif. Ce cas est illustré par le graphique 2.10.
- Inversement, si le résultat est négatif, on vient ajouter du cash à l'actif.

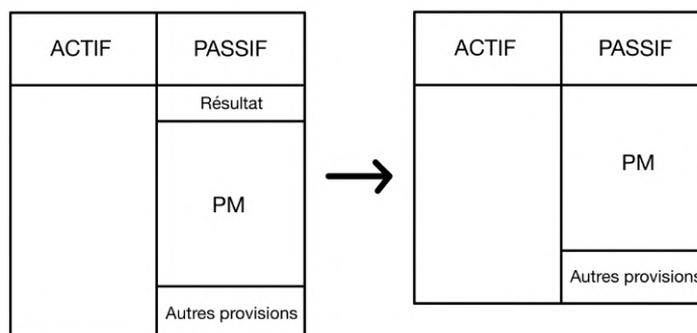


FIGURE 2.10 : Réduction du bilan en fin de projection, si le résultat est positif.

Hypothèses de fin de projection

La fin de projection intervient après le départ ou décès de tous les assurés, ou si la date limite de projection est atteinte. Le modèle se charge alors de **vendre la totalité du portefeuille d'actifs** et de distribuer le contenu des diverses provisions aux assurés ou à l'assureur :

- La PPB revient entièrement aux assurés ;
- La RC revient entièrement à l'assureur ;
- Si des plus-values sont réalisées lors de la liquidation du portefeuille, au minimum 85% sont distribués aux assurés. Le taux de partage est configurable par l'utilisateur.

2.3.2 Construction d'un assureur fictif

Nous présentons ici l'entreprise type que nous avons construite grâce à des statistiques internes pour être cohérent avec la réalité des assureurs vie en 2022.

L'actif

L'actif se compose d'obligations d'état de maturité allant de 1 an à 30 ans dont le taux de coupon moyen est 1,82%. En raison de la remontée des taux, la valeur de marché des obligations a fortement diminuée. C'est pourquoi **l'ensemble du portefeuille obligataire est en moins-value de 15%**. Par ailleurs, la **duration initiale du portefeuille obligataire est de 8,73 ans**.

L'ensemble des statistiques générales de l'actif se trouvent dans le tableau 2.7.

Classe d'actif	Part du portefeuille (VNC)	VNC	VM	Plus ou moins value latente
Obligation	73,5 %	8 085 000 000	6 864 220 703	- 15,1 %
Action	16,7 %	1 837 000 000	1 866 127 473	1,6 %
Immobilier	7,4 %	814 000 000	1 015 543 330	24,8 %
Liquidités / Cash	2,4 %	264 000 000	264 000 000	0,0 %
TOTAL	100 %	11 000 000 000	10 009 891 506	- 9,0 %

TABLE 2.7 : Statistiques de l'actif (les montants sont en euros).

Le passif

Le passif se compose de 15 *model points*. Ils ont été construits à partir de statistiques internes au cabinet sur l'année 2022, dans le but d'avoir une représentation proche mais très simplifiée de la réalité des assureurs vie français.

Avoir un nombre limité de *model points* facilite l'analyse, et permet d'avoir un temps d'exécution raisonnable du modèle.

Les provisions mathématiques représentent la majorité du passif, avec **10,4 milliards d'euros**. Les *model points* des PM se trouvent dans le tableau ci-dessous (2.8).

ID	Anc.	Age	PM	TMG	Taux PB	Taux chargement	Taux frais
1	9	20	1 103 765 487	0,00%	95,60%	0,84%	0,33%
2	10	30	107 359 317	0,02%	93,90%	0,74%	0,24%
3	12	39	151 671 245	0,01%	94,80%	0,72%	0,29%
4	10	43	165 367 775	0,06%	94,80%	0,83%	0,30%
5	12	50	356 709 773	0,08%	91,60%	0,71%	0,36%
6	13	58	570 485 573	0,05%	94,00%	0,77%	0,36%
7	17	60	673 379 002	0,27%	90,80%	0,80%	0,30%
8	15	69	991 521 375	0,16%	92,20%	0,76%	0,29%
9	17	70	1 106 608 475	0,34%	88,40%	0,80%	0,22%
10	18	78	1 051 254 216	0,30%	87,20%	0,73%	0,24%
11	20	80	1 330 473 374	0,51%	88,20%	0,73%	0,22%
12	24	85	640 377 734	0,77%	87,40%	0,71%	0,28%
13	24	90	1 101 290 357	0,79%	86,80%	0,77%	0,33%
14	29	95	404 160 265	1,57%	85,50%	0,82%	0,28%
15	28	100	645 576 032	1,09%	86,10%	0,83%	0,29%

TABLE 2.8 : *Model point* de passif utilisé lors des projections ALM.

Par ailleurs, la **PPE est répartie sur 8 années**, comme présenté dans le tableau 2.9, et atteint un total de **450 millions d'euros**.

Génération (temps restant avant libération forcée)	Montant en €
1	56 608 161
2	43 977 737
3	39 358 104
4	39 133 049
5	84 360 237
6	12 808 837
7	67 758 744
8	105 995 132

TABLE 2.9 : Stock de PPE répartie sur 8 ans.

Le montant de la **réserve de capitalisation s'élève à 150 millions d'euros**.

2.3.3 Résultats et validation du modèle

Pour tester le modèle et sa projection, il est nécessaire de vérifier en amont l'absence de fuites. Elles correspondent à des flux qui sortiraient ou entreraient lors de la projection, suite à une mauvaise manipulation des données, ou des erreurs de calcul.

Ensuite, les tables de GSE générées et validées précédemment ont été récupérées et données en entrée du modèle ALM. La limite pour les tests de convergence était fixée aux 2000 premières tables.

Par ailleurs, les mêmes paramètres de modèle que ceux utilisés dans le tableau de configuration disponible en annexe A.1 ont été utilisés.

Résultats sur scénario déterministe

Pour valider son fonctionnement général, la table déterministe correspondant à la courbe des taux EIOPA au 31/12/2022 a été donnée au modèle. Cette table, appelée **scénario central**, correspond à la situation dans laquelle les courbes de taux futures seraient induites par la courbe de taux initiale et les indices actions et immobiliers suivraient exactement le taux à 1 an, chaque année.

Ce scénario ne présente aucun aspect aléatoire : les indices actualisés de l'action et de l'immobilier sont donc constants et égal à 100 (valeur initiale) et les déflateurs retransformés en taux se superposent parfaitement avec la courbe EIOPA.

Best Estimate	9 345 443 018 €
Present Value of Future Profit	664 448 488 €
Valeur de marché initiale	10 009 891 506 €
Ecart de convergence	0 €
Ecart de convergence (%)	0 %

TABLE 2.10 : Calculs du BE et de la PVFP sur le scénario central (déterministe).

L'écart de convergence se calcule comme tel :

$$\text{Ecart convergence} = VM_0 - (BE + PFVP).$$

Sur le scénario déterministe, cet écart est bien nul, montrant que le modèle tourne sans fuite :

- Les flux ne se perdent pas dans le modèle et le compte de résultat n'oublie aucun élément ;
- Les opérations d'achat/vente ne créent pas de valeur, et n'en détruisent pas non plus ;
- Le mécanisme de fin de période (réduction ou augmentation de l'actif en fonction du signe du résultat) rééquilibre correctement le bilan avant de passer à l'année suivante ;
- La fin de projection, avec vente totale des actifs et distribution des provisions restantes fonctionne aussi correctement ;
- Le déflateur de la table est bien calculé : la somme des flux actualisés du passif et des flux actualisé du résultat est égale à la valeur de marché initiale du portefeuille d'actif.

Tous ces points sont par ailleurs vérifiés au sein du modèle tout au long de la projection. Des indicateurs de bon fonctionnement du modèle sont récupérables par l'utilisateur sur chaque année de développement (équilibre du bilan, cible d'allocations atteinte, activation des rachats, etc.).

Convergence du modèle ALM

Afin d'observer la convergence du *best-estimate* stochastique, les tables du GSE ont été distribuées au modèle une à une, pour obtenir un BE et une PVFP par scénario. Les graphiques 2.11, 2.12 et 2.13 sont ainsi obtenus.

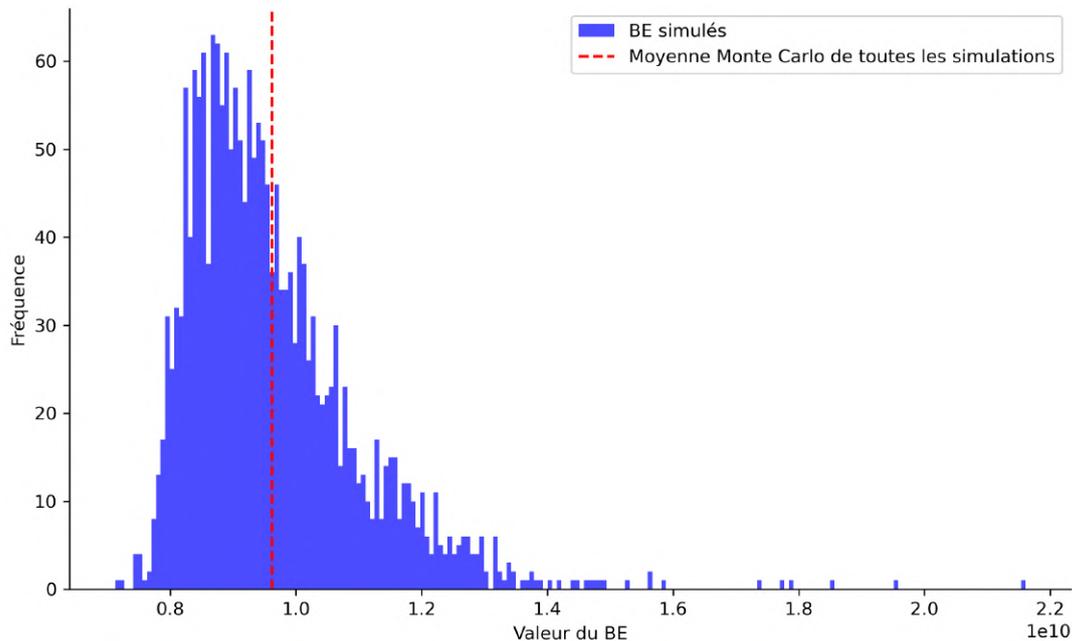


FIGURE 2.11 : Distribution du *best-estimate* pour 2000 scénarios stochastiques.

La figure 2.11 montre une distribution asymétrique du *best-estimate*, avec une queue plus lourde vers la droite (le coefficient d'asymétrie est positif). Les *best-estimates* les plus élevés résultent de conditions économiques très défavorables pour l'assureur, par exemple :

- Une chute extrême des taux et des indices action et immobilier, entraînant des difficultés de refinancement et de paiement des engagements ;
- Des forts rachats suite à une hausse des taux, entraînant la perte de valeur des obligations et l'épuisement de la réserve de capitalisation lors de leurs ventes en moins-value ;
- Des conditions instables alternant entre les deux phénomènes ci-dessus.

Le graphique 2.12 montre la vitesse de convergence du *best-estimate* vers sa valeur finale (voir le tableau 2.10 pour les résultats stochastiques). La zone grisée correspond à l'intervalle de confiance Monte-Carlo à 95%.

Remarque La vitesse de convergence de l'intervalle de confiance s'effectue en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où n est le nombre de simulations effectuées. Il serait possible d'accélérer cette convergence avec des techniques de réduction de variance telles que l'échantillonnage préférentiel ou les variables antithétiques, par exemple. Elles n'ont pas été appliquées ici.

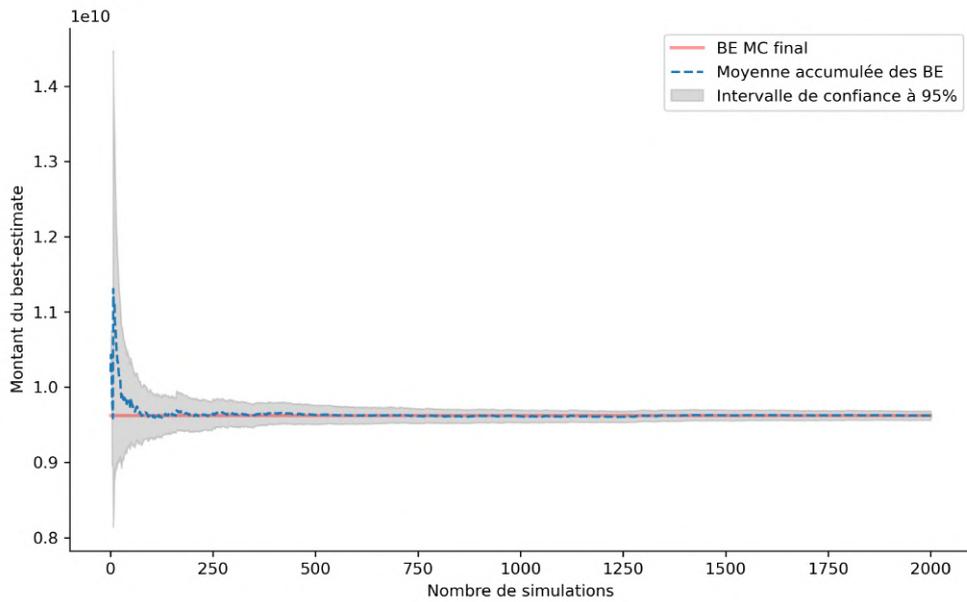
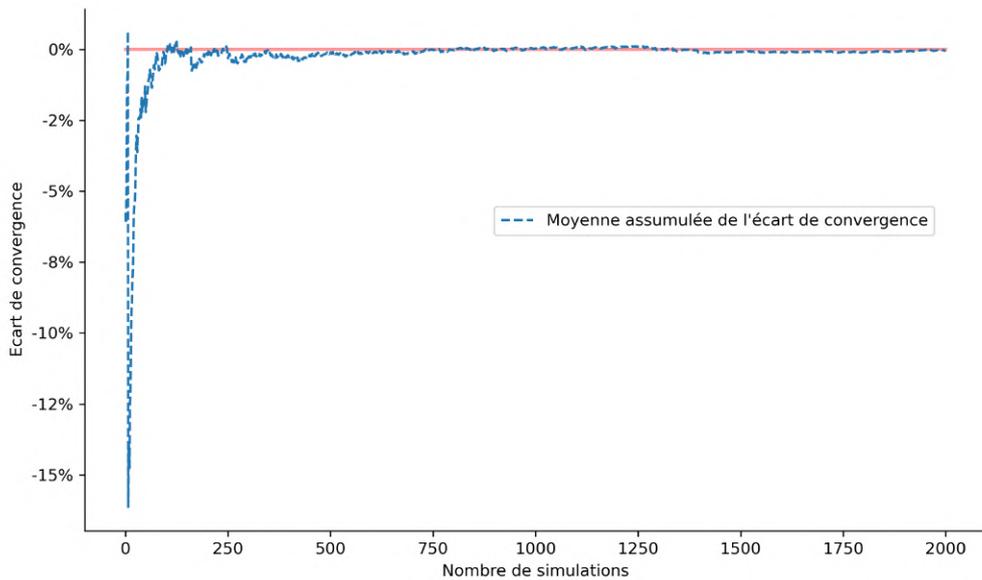
FIGURE 2.12 : Convergence du *Best-Estimate*.

FIGURE 2.13 : Evolution de l'écart de convergence.

Enfin, le graphique 1.2.2 montre l'évolution du pourcentage d'écart de convergence en fonction du nombre de scénarios stochastiques réalisés.

Les résultats semblent se stabiliser vers 800 simulations. En en retenant 1000, on estime que la

convergence est suffisante.

Résultats stochastiques

Les résultats stochastiques du modèle ALM sont disponibles dans le tableau 2.11.

Best Estimate	9 623 657 173 €
Present Value of Future Profit	390 603 303 €
Valeur de marché initiale	10 009 891 506 €
Écart de convergence	- 4 368 970 €
Écart de convergence (%)	- 0,04 %

TABLE 2.11 : Calculs du BE et de la PVFP sur les 2000 scénarios stochastiques.

L'écart de convergence est de 0,04%, ce qui est faible et permet de valider une nouvelle fois l'absence de fuites du modèle et le bon fonctionnement des tables GSE, dont leur risque neutralité. Il est réparti au prorata du BE et de la PVFP.

La différence entre le *best-estimate* stochastique et central permet de déterminer le coût des garanties et options. Elles sont ici de **279 millions d'euros**.

Conclusion

Au vu des résultats présentés dans les tableaux 2.10 et 2.11, il est possible de confirmer l'absence de fuite du modèle ALM et son bon comportement en environnement stochastique. Par ailleurs, avec 1000 simulations, une assez bonne précision des résultats est atteinte.

2.4 Les limites des modèles

Une modélisation est et restera toujours **une simplification de la réalité**. Les modèles sont conçus pour capturer l'essence des phénomènes étudiés, en éliminant les détails jugés non pertinents pour l'objectif visé. Cette simplification peut parfois entraîner des omissions ou des approximations qui peuvent affecter la précision des résultats.

Cette section arpente les limites des outils développés ainsi que les opportunités envisageables pour les améliorer.

2.4.1 Limites relatives au GSE

Le GSE mis en place repose sur des modèles relativement simples. La modélisation des taux s'appuie sur un modèle Hull-White à un facteur, et pour les actions et les immobiliers, le modèle Black-Scholes avec volatilité constante (BSCV*) a été retenu.

Bien que ces modèles soient largement reconnus et utilisés dans l'industrie pour leur simplicité et leur efficacité, ils présentent certaines limites. Le modèle Hull-White à un facteur, par exemple, ne capture qu'un seul facteur d'évolution des taux d'intérêt, ce qui peut ne pas refléter la complexité des mouvements réels des taux. De même, le modèle Black-Scholes avec volatilité constante suppose que la volatilité est la même quelle que soit la période, ce qui n'est pas toujours réaliste.

*Black Scholes with Constant Volatility.

Des modèles plus sophistiqués, tels que le Libor Market Model Plus (LMM+) pour les taux, ou le Black-Scholes avec volatilité déterministe (BSDV*), pourraient offrir une meilleure précision. Ces modèles permettent de capturer davantage de nuances et d'aléas, rendant ainsi les scénarios générés plus proches de la réalité économique, mais sont plus compliqués à mettre en place et à calibrer.

De plus, l'introduction de corrélations déterministes entre les classes d'actifs pourrait améliorer la précision des scénarios, en tenant compte des évolutions d'interactions entre différents actifs au cours du temps. Par exemple, en période de crise, certains actifs peuvent être plus corrélés que d'autres, et cette information pourrait être précieuse pour la modélisation.

Pour améliorer davantage le GSE, on pourrait donc envisager :

- L'intégration de plusieurs facteurs dans les modèles, permettant de capturer davantage de dynamiques de marché.
- L'utilisation de modèles de volatilité déterministe ou stochastique, qui permettent de modéliser des changements de volatilité au fil du temps.
- L'ajout de mécanismes de sauts ou de chocs extrêmes, pour modéliser des événements rares mais importants.
- L'ajout de nouveaux indices, par exemple l'inflation.
- L'ajout de dividendes et loyers stochastiques avec les évolutions des indices action et immobilier.

Bien que le GSE actuel offre une base solide pour la modélisation, il existe donc des axes d'amélioration pour le rendre plus robuste et plus précis.

2.4.2 Limites relatives au modèle ALM

Le modèle ALM développé pour ce mémoire présente des limites, principalement dues à des contraintes externes. Tout d'abord un temps non négligeable a été consacré à la compréhension des différentes problématiques associées à la gestion actif-passif. En second lieu la mise en place du modèle et de ses tests de résistance correspondants a nécessité plusieurs mois de travail, en plus du temps d'élaboration du GSE. Enfin, le matériel informatique disponible pour le faire fonctionner est resté limité, ne permettant ainsi pas d'alourdir indéfiniment sa complexité.

Voici un aperçu de certaines des limites et axes de développement possible :

- **Gestion des actifs** : Le modèle ne comporte qu'un seul *pool* d'actifs, ce qui complique la gestion de la participation aux bénéfices. Dans la réalité, les compagnies d'assurance peuvent avoir plusieurs *pools* d'actifs, chacun avec ses propres caractéristiques et stratégies de gestion.
- **Risque de crédit** : Le modèle ne prend pas en compte le risque de crédit. Par conséquent, les obligations sont évaluées en neutralisant le risque, ce qui ne reflète pas la réalité du marché où le risque de crédit a un impact significatif sur la valorisation et les rendements des obligations.
- **Cibles de portefeuille** : Dans le modèle actuel, les cibles de portefeuille sont fixes et constantes dans le temps. Une amélioration possible serait d'introduire une allocation semi-dynamique, avec des cibles déterministes évoluant en fonction du temps. Cela permettrait de mieux refléter les stratégies d'investissement adaptatives des compagnies d'assurance.

*Black Scholes with Deterministic Volatility.

- **Frais** : Le modèle pourrait bénéficier d'une diversification des frais. Actuellement, il ne prend pas en compte les différents types de frais associés à la gestion d'un portefeuille, tels que les frais de transaction ou les coûts fixes de l'assureur. L'intégration de ces frais donnerait une image plus complète des coûts associés à la gestion des actifs et des passifs.

Le modèle ALM développé offre une base solide pour la modélisation des actifs et des passifs, il existe cependant des opportunités d'amélioration et d'ajustement pour le rendre plus complet et précis.

Remarque Une extension du modèle fait l'objet d'un autre mémoire d'Actuariat, visant à intégrer des fonctions de rachats dynamiques plus précises, ajouter les fonds UC ainsi que les arbitrages entre les 2 supports d'épargne.

Conclusion du chapitre

La conception de ces outils s'est avérée être une étape déterminante pour l'avancement de notre recherche. Ces modèles offriront désormais la possibilité d'explorer en profondeur les conséquences des chocs de convexité sur la courbe des taux.

Le GSE a été développé de manière à ce qu'il puisse accueillir n'importe quelle courbe en entrée et être calibré au 31/12/2022. Après avoir déterminé une méthode pour définir et accentuer la convexité des taux, l'objectif sera d'introduire une courbe modifiée dans le GSE, de générer de nouvelles tables, et d'analyser les répercussions de cette nouvelle configuration sur le *best-estimate* et la valeur actualisée des profits futurs de l'assureur.

Au-delà de ces deux indicateurs, l'étude vise à évaluer les implications en termes de solvabilité et à analyser les étapes du processus de modélisation ALM qui entraînent des variations dans les résultats de l'assureur. L'objectif final de cette recherche consiste à mettre en évidence les facteurs de risque liés aux hypothèses, ainsi que les configurations de modélisation qui rendent l'assureur plus sensible au paramètre de convexité des taux. Cette démarche pourrait être bénéfique en aidant les assureurs à réviser leurs modèles et leurs hypothèses pour mieux faire face à un contexte de taux élevés et convexes.

Chapitre 3

Modélisation et analyse du risque de convexité des taux d'intérêt

Ce chapitre a pour objectif d'analyser les courbes de taux utilisées par les assureurs dans leurs projections ALM, ainsi que les courbes réglementaires de l'EIOPA. En particulier, il est souhaité de les déformer et de comprendre à quel point chacune des 3 déformations considérées influe sur le *best-estimate* de notre assureur fictif :

- Le **niveau**
- La **pente** (dérivée première)
- La **convexité** (dérivée seconde)

Il est supposé en amont que chaque type de déformation aura un impact particulier sur le *best-estimate* de l'assureur. Il est ainsi souhaité de pouvoir isoler les effets, et dans la mesure du possible chiffrer le montant des déformations appliquées sur notre courbe initiale : la courbe EIOPA au 31/12/2022. Rappelons que les courbes réglementaires avaient jusque très récemment toujours été croissantes avec le temps et concaves. Ce n'est que depuis 2022 que des inversions de courbes sont apparues. Ce phénomène s'observe très clairement sur la figure 3.1 : les courbes de fin 2022 et 2023 sont décroissantes et très élevées sur les maturités les plus courtes.

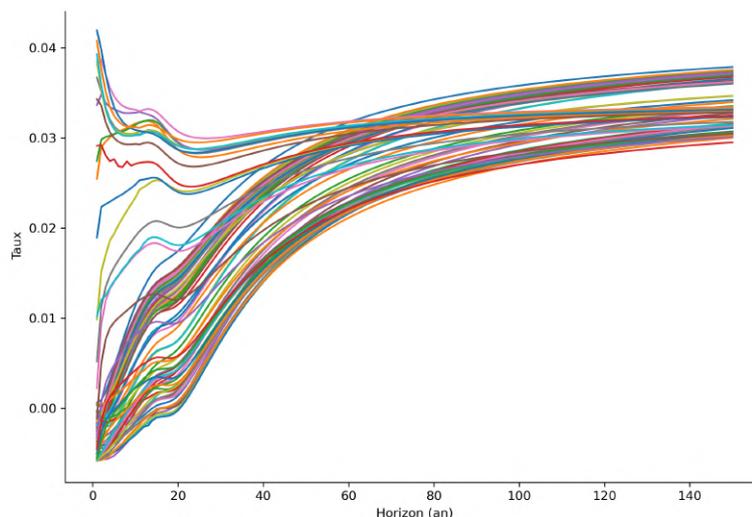


FIGURE 3.1 : Formes des courbes EIOPA depuis décembre 2015 (Source : EIOPA, [2023](#)).

3.1 Quantifier les déformations des courbes de taux

Quelques rappels Comme indiqué dans le premier chapitre (1.2.2), la courbe de l'EIOPA est une courbe de taux zéro-coupon, conçue pour refléter une estimation réaliste et prudente des mouvements futurs des taux d'intérêt. Sa construction est basée sur des données de marché observables, en particulier sur les rendements des obligations d'État de haute qualité et des *swaps* d'intérêt. Elle est caractérisée par 2 attributs, le LLP et le l'UFR, ainsi que la méthode d'interpolation et extrapolation de Smith-Wilson, présentée dans l'annexe A.7. Le choix des taux d'actualisation est fondamentaux car il influence directement le niveau des provisions techniques des assureurs et, par conséquent, leur solvabilité.

Dans cette section, ces contraintes seront ignorées pour proposer des déformations des courbes réglementaires.

3.1.1 Modèle de Nelson-Siegel et Svensson

Modèle de Nelson Siegel

Le modèle de Nelson-Siegel, introduit par Charles Nelson et Andrew Siegel en 1987 (NELSON et SIEGEL, 1987), est une formule paramétrique utilisée pour ajuster et interpoler les courbes de rendement. La courbe est décrite par trois facteurs principaux : le niveau, la pente et la courbure. La formule de Nelson-Siegel est donnée par

$$R(t) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t} \right), \quad (3.1)$$

où :

- $R(t)$ est le taux de rendement à maturité t ;
- β_1 capture le niveau de la courbe ;
- β_2 capture la pente de la courbe ;
- β_3 capture la courbure de la courbe ;
- λ est un paramètre qui détermine la vitesse de décroissance des effets des autres paramètres.

Modèle de Svensson

Le modèle de Svensson, introduit par Lars E.O. Svensson en 1994 (SVENSSON, 1994), est une extension du modèle de Nelson-Siegel. Il introduit un terme supplémentaire pour capturer une seconde bosse ou un second creux dans la courbe de rendement. Sa formule est

$$R(t) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 t} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t} \right) + \beta_4 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 t} - e^{-\lambda_2 t} \right), \quad (3.2)$$

où :

- Les paramètres β_1, β_2 , et β_3 sont les mêmes que dans le modèle Nelson-Siegel.
- β_4 capture la deuxième bosse ou creux.
- λ_1 et λ_2 sont des paramètres qui déterminent la vitesse de décroissance des effets des autres paramètres.

Ces deux modèles sont simples, mais font l'objet de nombreuses recherches, par exemple :

- En 1999, David Bolder et David Strélski utilisent les modèles de Nelson-Siegel et de Svensson pour analyser les taux de rendement zéro-coupon et les taux à terme au Canada. Ils comparent ces modèles avec ceux utilisés au même moment par la Banque du Canada pour évaluer leurs performances, tout en soulignant que certains problèmes d'estimation et de choix de données demeurent à explorer (BOLDER et STRELISKI, 1999).
- En 2018, ils font l'objet d'une étude par la BCE, qui explore les différentes manières de modéliser les courbes de taux et le choix le plus adapté pour les différentes banques nationales (NYMAND-ANDERSEN, 2018).
- Les modèles sont aussi utilisés pour essayer de prédire la forme future des courbes de taux. Cette méthode est présentée par ANNAERT et al. (2013) et utilise des séries temporelles pour étudier l'évolution probable des différents paramètres du modèle de Nelson-Siegel.

Application sur les courbes EIOPA

Les courbes réglementaires ont été approchées avec ces deux méthodes paramétriques. L'objectif est d'avoir un point de départ à la déformation des courbes, et l'avantage des modèles de Nelson-Siegel et de Svensson est qu'ils proposent une très bonne interprétabilité des paramètres.

La courbe d'intérêt manipulé depuis le début de ce mémoire est la courbe EIOPA au 31/12/2022. À l'aide de *packages Python (scipy)*, les paramètres ont été optimisés pour tenter d'approcher cette courbe avec le plus de précision possible.

Les figures 3.2 et 3.3 présentent respectivement les résultats obtenus sur le modèle de Nelson-Siegel et le modèle de Svensson avec les paramètres optimaux.

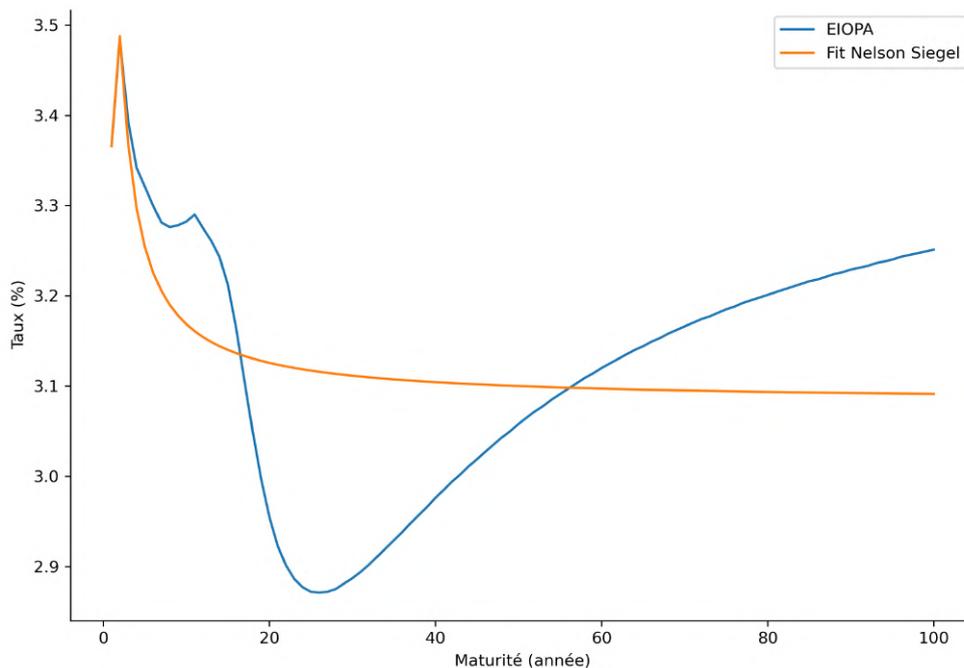


FIGURE 3.2 : Fit Nelson-Siegel de la courbe EIOPA 31/12/2022.

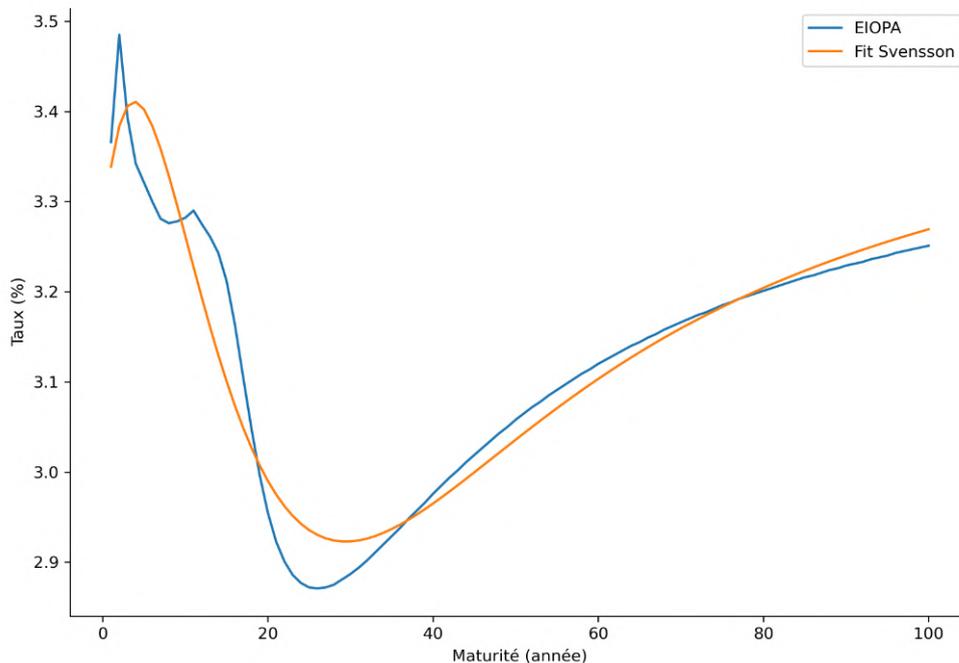


FIGURE 3.3 : Fit Svensson de la courbe EIOPA 31/12/2022.

Dès lors, on remarque que le modèle de Nelson-Siegel ignore totalement les variations de la courbe EIOPA. La courbe sortant du modèle respecte uniquement le pic initial à 2 ans, et est ensuite totalement désynchronisée de l'objectif.

Le modèle de Svensson offre une meilleure approximation de la courbe originale, mais ne parvient toujours pas à la reproduire de manière parfaitement fidèle. La bosse à 15 ans n'apparaît pas et le creux à 25 ans est légèrement décalé par rapport à la référence EIOPA.

Les résultats obtenus avec le modèle de Svensson sont prometteurs et fournissent tout de même une base solide pour les ajustements futurs des courbes. Cependant, il est recommandé d'explorer une nouvelle approche pour corriger les légers écarts observés avec la méthode actuelle.

3.1.2 ACP à trois facteurs sur courbes historiques de l'EIOPA

La seconde méthode envisagée est d'effectuer une analyse en composantes principales sur l'ensemble des courbes de l'EIOPA, à la manière de ce qui a été présenté par Moody's Analytics en 2014 (REDFERN et MCLEAN, 2014). Cette méthode est très largement répandue en assurance, car elle permet de définir une courbe en fonction d'un nombre choisi de paramètres. L'objectif est d'avoir trois facteurs que l'on assignera au niveau, à la pente et à la convexité de la courbe.

Analyse en Composantes Principales (ACP)

Introduction

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une méthode statistique de la famille des méthodes factorielles. Elle vise à représenter, sur un nombre réduit de dimensions (ou axes factoriels), un ensemble de données multidimensionnelles, tout en préservant le mieux possible les distances et les variances entre les données.

Fondements mathématiques

L'ACP repose sur des opérations linéaires d'algèbre, notamment le calcul de valeurs propres et de vecteurs propres (WOLD et al., 1987).

Considérons un ensemble de données constitué de n individus et p variables. Un individu correspondra dans notre cas à une courbe, et les variables aux différents points temporels définissant la courbe. On note X la matrice de taille $n \times p$ correspondante.

1. **Centrage des données.** On soustrait de chaque variable sa moyenne, ce qui revient à centrer les données autour de l'origine :

$$X_{\text{centré}} = X - \bar{X},$$

où \bar{X} est la moyenne de la matrice X .

2. **Calcul de la matrice de covariance.** Elle donne la structure de corrélation entre les différentes variables :

$$S = \frac{1}{n-1} X_{\text{centré}}^T X_{\text{centré}}.$$

3. **Décomposition en valeurs propres.** On décompose la matrice de covariance pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres :

$$S \cdot v = \lambda \cdot v,$$

où λ est la valeur propre et v le vecteur propre associé.

Les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres sont les composantes principales de l'ensemble de données. La première composante principale est la direction (ou axe) dans laquelle les données varient le plus, la seconde composante principale est orthogonale à la première et est la direction de la seconde plus grande variance, et ainsi de suite.

4. **Projection des données.** Pour obtenir les coordonnées des individus dans ce nouvel espace factoriel, on projette les données sur les axes formés par les vecteurs propres :

$$X_{\text{projeté}} = X_{\text{centré}} \cdot V,$$

où V est la matrice des vecteurs propres.

Interprétation

L'importance de chaque axe (ou composante principale) est donnée par la part de la variance totale qu'il explique. Cette part est égale au rapport entre la valeur propre associée à cet axe et la somme de toutes les valeurs propres.

La somme des valeurs propres est égale à la variance totale des données. Ainsi, une ACP avec p axes (le nombre maximal possible) conserverait toute l'information des données. Or **le but ici est de réduire la dimensionnalité en ne conservant que les premiers axes**, qui capturent l'essentiel de cette variance.

Application de l'ACP à l'analyse des courbes EIOPA

Périmètre

L'ensemble des courbes EIOPA disponibles depuis décembre 2015 a été récupéré. Au total, 92 courbes ont donc été utilisées pour l'ACP, chacune composée de 150 points. L'objectif est de réduire la dimensionnalité des données pour en extraire l'essence sans perdre trop d'informations.

Procédure

1. **Préparation des données** : Avant de procéder à l'ACP, il faut d'abord **standardiser les données** pour que chaque courbe ait une moyenne de zéro et un écart-type égal à 1. Cette étape est cruciale car l'ACP est sensible à l'échelle des variables.
2. **Application de l'ACP** : Les courbes ont été réduites à trois composantes principales. L'ACP permet ainsi d'obtenir trois courbes "moyennes" qui capturent la majorité de la variance des courbes originales. A des fins exploratoires, 4 facteurs ont été initialement calculés, mais seuls les 3 premiers ont été retenus pour la suite de l'étude. La figure 3.4 montre le profil des courbes obtenues :

- La première est une courbe presque horizontale, et sera assimilée par la suite au niveau des taux. La variance expliquée par cette composante est de **85,68%**.
- La deuxième est une courbe presque décroissante, presque linéaire, et correspondra à la pente des taux. La variance expliquée par cette composante est de **13,93%**.
- La troisième est une courbe concave, croissante jusqu'à 20 ans et décroissante ensuite : **elle représentera la convexité de la courbe**. La variance expliquée par cette composante est de **0,34%**.
- La quatrième courbe présente à la fois une bosse qui atteint son maximum à 11 ans et un creux qui atteint son minimum à 31 ans. Elle n'a pas été interprétée. La variance expliquée par cette composante est de **0,04%**.

La variance expliquée par les 3 premières composantes intègre donc 99,95% de l'information des courbes initiales.

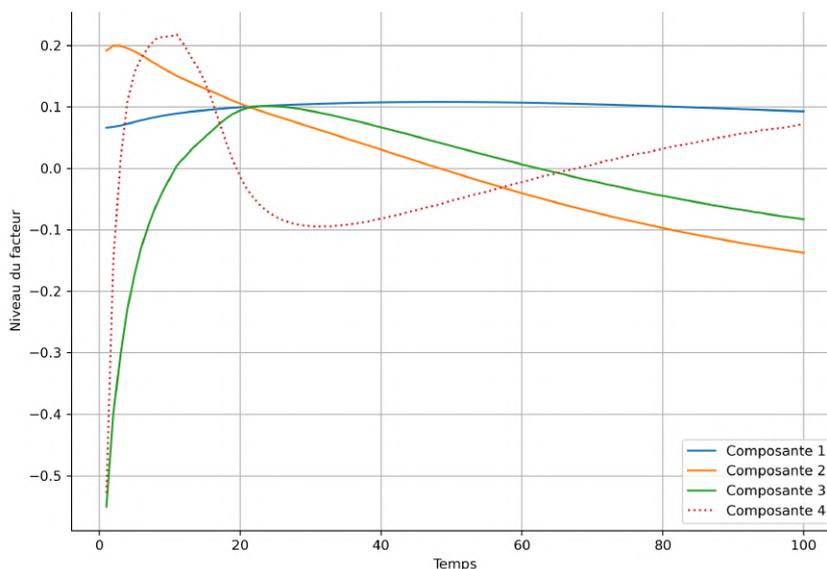


FIGURE 3.4 : Les 4 premiers axes factoriels issus de l'ACP.

3. **Interprétation des résultats** : Pour chaque courbe originale, trois valeurs sont disponibles (coefficients pour chaque composante principale). Ces coefficients déterminent comment combiner les trois composantes principales pour reconstruire approximativement la courbe originale.
4. **Reconstruction des courbes** : Pour vérifier la qualité de l'ACP, les courbes ont été reconstruites en multipliant les composantes principales par leurs coefficients respectifs (pour chaque

courbe). Il faut cependant ne pas oublier de faire l'étape de **standardisation inverse** pour remettre à l'échelle les courbes nouvellement construites. Cette étape a confirmé que, bien que la dimensionnalité ait été réduite, l'essentiel de l'information originale a été conservée.

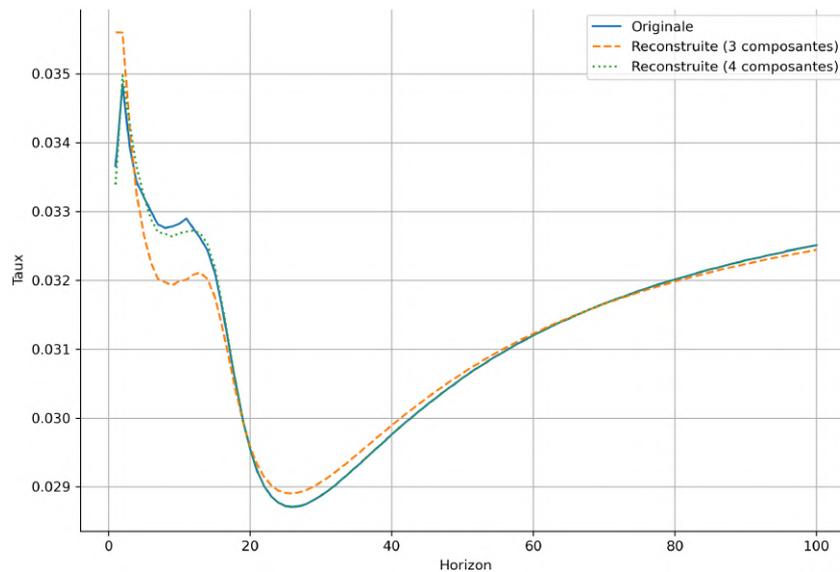


FIGURE 3.5 : Reconstruction de la courbe EIOPA du 31/12/2022 avec les 3 (et 4) premières composantes précédemment calculées.

5. **Analyse des coefficients comme séries temporelles** : Chaque courbe ayant été transformée en un vecteur de trois coefficients, il est possible de traiter ces coefficients comme des séries temporelles, en traçant leur évolution au fil du temps (mensuellement depuis décembre 2015). Plusieurs méthodes ont été expérimentées pour prévoir l'évolution future de ces coefficients. Cette analyse n'a cependant pas été approfondie, mais est disponible en annexes (A.6)

Conclusion

L'ACP s'est avérée être un outil puissant pour comprendre et réduire les courbes EIOPA à un nombre fini de paramètres. Le résultat de reconstruction de la courbe du 31/12/2022 s'est avéré plus performant que les méthodes paramétriques précédentes.

Remarque En ajoutant une 4ème composante, on arrive même à reproduire exactement la courbe. Le manque d'interprétabilité de cette dernière nous force cependant à la laisser de côté.

3.1.3 Définir mathématiquement la convexité

Les deux approches précédentes encadrent la manière dont la convexité est définie. Leur avantage principal est qu'elles permettent de **chiffrer facilement la valeur de convexité d'une courbe avec un unique paramètre**. Toutes choses égales par ailleurs, il est alors possible de modifier le facteur paramétrique de courbure (β_2 pour le modèle de Nelson-Siegel-Svensson, $CP3$ pour l'ACP), et observer la nouvelle courbe obtenue.

Néanmoins, ces méthodes ne sont pas sans défauts. Elles encadrent fortement les formes que l'on peut obtenir et, en modifiant seulement les paramètres de convexité, on change indirectement aussi une partie du niveau et de la pente de la courbe.

Il est en réalité difficile de caractériser la totalité d'une courbe avec si peu de paramètres. Mathématiquement, la convexité peut se définir en tout point d'une fonction. En effet, une fonction f est dite convexe sur un intervalle si, pour tous les points x_1 et x_2 de cet intervalle et pour tout t dans $[0,1]$, on a

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe de la fonction se trouve toujours en dessous de la corde reliant deux points quelconques sur cet intervalle.

Pour une fonction f qui est **deux fois dérivable** sur un intervalle, la convexité peut aussi être déterminée en examinant le signe de sa seconde dérivée f'' . Si $f''(x)$ est positive pour tout x dans l'intervalle, alors f est convexe sur cet intervalle. Inversement, si $f''(x)$ est négative pour tout x dans l'intervalle, alors f est concave sur cet intervalle. Si la seconde dérivée change de signe, cela indique **un point d'inflexion où la courbe change de concavité**.

Ainsi, il serait théoriquement possible d'appliquer des changements infinitésimaux à la courbe afin de changer la convexité aux points qui nous intéressent. Cette approche rend l'analyse infiniment complexe : il est possible de partir de n'importe quelle courbe et de modifier n'importe quel point.

3.2 Modélisation des déformations des courbes de taux, impact sur le BE et la PVFP

Le but de la décomposition des courbes effectuée dans la section précédente est de permettre l'application de déformations sur celles-ci dans le contexte des analyses présentées dans cette partie.

Nous cherchons ici à déformer la pente et la convexité des taux, tout en conservant une structure de courbe logique et en accord avec celle de l'EIOPA du 31/12/2022.

3.2.1 Choix de la méthode retenue

Il est très complexe de définir la convexité d'une courbe complète, comme il a été vu précédemment : les approches paramétriques sont simples et limitent les possibilités, tandis que la description mathématique, point par point, amène à une description à maille potentiellement infinie.

Une méthode permettant de partir de la structure des taux initiale et d'y appliquer des déformations sur la pente et la convexité doit être sélectionnée. Pour rendre l'étude possible et quantifiable, la dernière approche a donc été laissée de côté. En choisissant d'utiliser la définition mathématique exacte de la convexité, en effet, on se heurte à de nombreux problèmes :

- Combien de points choisir pour notre déformation ?
- Comment choisir le ou les points où l'on augmenterait la convexité ?
- Comment justifier la sélection de ces points par rapport à d'autres ?
- Comment lisser l'effet du choc sur les points alentour, tout en permettant de conserver la continuité et dérivabilité de la courbe ?

Le modèle de Nelson-Siegel a aussi été écarté, car reproduit mal la courbe des taux au 31/12/2022. La figure 3.2 montre que la calibration des paramètres amène à négliger les variations principales. Il ne ressort qu'une fonction monotone et décroissante du temps.

Enfin, il est préféré de conserver l'analyse en composantes principales face à la configuration paramétrique de Svensson, car elle offre une meilleure adéquation avec la courbe d'origine. Par ailleurs,

les composantes principales résultant de l'ACP contiennent l'information des courbes EIOPA originales. La méthode permet donc de rester en accord avec un historique réel. Par ailleurs, pour rappel, ce procédé est déjà utilisé dans certains modèles internes lors de la construction de la fonction *proxy* permettant de calculer le SCR de l'assureur.

Parallèle : SCR en approche *Curve Fitting* ou *Least Square Monte Carlo* (LSMC)

En **modèle interne**, le SCR est calculé comme la différence entre les fonds propres actuels et le quantile à 0,5% des fonds propres de l'assureur dans un an, comme énoncé par la formule 2.2 (pire scénario bicentenaire). Pour obtenir la distribution des fonds propres, l'assureur diffuse des scénarios monde réel à 1 an (appelés **scénarios primaires**) puis, pour chaque scénario, calcule le *best-estimate* stochastique correspondant (en univers risque neutre). Pour un scénario primaire, il est donc possible de calculer une valeur de fonds propres. Avec suffisamment de simulations, l'assureur obtient une distribution complète des fonds propres, et ainsi peut calculer son SCR.

Cette approche est appelée les **Simulations dans les Simulations** (SdS), et son problème principal est son temps de calcul. S'il est souhaité d'obtenir un quantile à 0,5%, alors il faut **au minimum 1000 valeurs de fonds propres**. En admettant qu'il faille (comme pour notre modèle actuel) 1000 tables risques neutres (**scénarios secondaires**) pour obtenir un niveau de précision convenable sur le *best-estimate* stochastique, alors il faut générer 1000 tables secondaires pour chaque 1000 tables primaires. Le modèle ALM doit ainsi être exécuté sur 1 000 000 de scénarios, ce qui est extrêmement coûteux en temps et ressources informatiques.

Remarques

- 1000 simulations primaires ne sont pas suffisantes en réalité pour obtenir une précision suffisante sur les quantiles.
- Les tables secondaires doivent être générées en fonction de la table primaire, ce qui nécessite un recalibrage du GSE risque neutre pour chaque simulation monde réel.

Pour contourner ce problème, l'assureur peut mettre en place une méthode de *Curve Fitting* ou *LSMC* (BAUER et al., 2009 et PLANCHET, 2023a). L'objectif de ces méthodes est de réduire le nombre de simulations en calibrant une fonction proxy sur les facteurs de risques réels auxquels l'assureur est sensible.

- Pour le *Curve Fitting*, la calibration s'effectue sur des valeurs de fonds propres. L'assureur se charge en amont de déterminer un nombre limité de scénarios primaires adverses (par exemple 150), sur lesquels est calculé à chaque fois une valeur de fonds propres en univers risque neutre. La forme paramétrique est calibrée par rapport à ces 150 points.
- Le LSMC adopte une stratégie inversée : le nombre de simulations primaires est très élevé, mais on ne conserve que quelques simulations secondaires pour les calculs "risque neutre" (2 à 5 simulations généralement).
Aucune valeur réelle de fonds propres n'est donc calculée (on obtient des *VAN de marge*), mais le nombre important de simulations primaires permet de garantir la calibration effective de la fonction *proxy* finale.

La forme paramétrique calibrée sur chacune des méthodes est généralement de forme polynomiale et permet d'exprimer les fonds propres économiques en date $t = 1$ en fonction des **facteurs de risques**. **Pour les taux, on peut retenir l'approche de l'ACP et considérer que 3 facteurs de risques affectent les taux nominaux.**

3.2.2 Résultats préliminaires du lien entre convexité et *Best-Estimate*

L'analyse en composantes principales a permis de récupérer les 3 axes factoriels permettant de reconstruire avec une précision convenable les courbes de l'EIOPA. En plus de ces axes, 3 coefficients multiplicateurs sont donnés pour chacune des courbes. En multipliant les composantes avec les coefficients, la reconstruction des courbes est possible.

Pour la suite, est considérée la courbe EIOPA au 31/12/2022, représentée dans la figure 3.5. Ses coefficients sont les suivants :

- 13,75 pour la composante 1 (niveau) ;
- 7,46 pour la composante 2 (pente) ;
- $-0,53$ pour la composante 3 (courbure/convexité).

Pour provoquer des déformations, des chocs sur les paramètres donnés ci-dessus sont appliqués. Il est ensuite possible d'utiliser la courbe nouvellement construite comme point de départ de notre modèle ALM, pour évaluer les nouvelles valeurs de BE et de PVFP.

Configuration centrale du modèle ALM

Pour les résultats de cette section, les paramètres donnés par le tableau A.5 disponible en annexe ont été conservés. Les *model points* sont les mêmes que ceux du chapitre II : les tableaux 2.7 et 2.8. Par ailleurs, pour le taux attendu, défini par la formule 2.17, les coefficients suivants ont été appliqués :

- $\alpha = 65 \%$
- $\beta = 22,5 \%$
- $\gamma = 12,5\%$

Le taux attendu dépend ainsi majoritairement du taux servi moyen des trois dernières années, mais aussi du contexte économique.

Choc sur la pente et la convexité : cas déterministe

Il a été observé dans un premier temps les comportements du BE et de la PVFP lors de l'application d'un choc à la fois sur la pente et sur la courbure des taux.

Voici les étapes de l'évaluation du BE avec les nouvelles configurations économiques :

1. Création d'une matrice de choc pour la pente et la convexité :
 - Choc sur le coefficient de pente : 51 points répartis uniformément dans $[-20 \%; 20 \%]$
 - Choc sur le coefficient de courbure : 51 points répartis uniformément dans $[-500 \%; 500 \%]$

Les chocs sont plus importants sur le coefficient de convexité en raison de son faible poids dans l'ACP relativement à la composante de pente. En effet, la CP2 était responsable de 13,93% de la variance totale des courbes, contre 0,34% pour la CP3.

2. Génération des courbes avec la grille précédente : 2601 courbes ont été produites (51×51), les plus extrêmes étant représentées sur la figure 3.6.

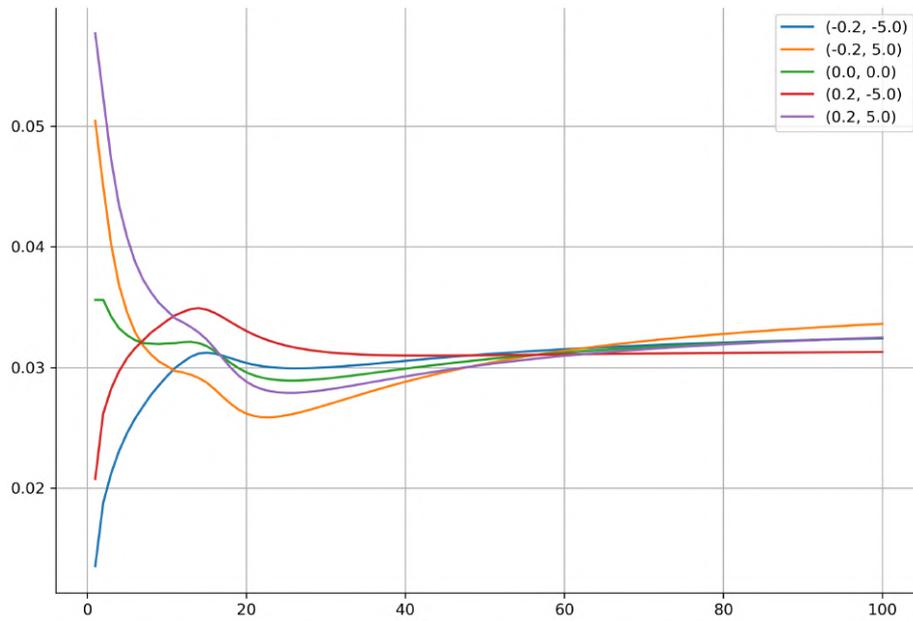


FIGURE 3.6 : 5 des 2601 courbes utilisées pour les calculs déterministes : la courbe centrale et les 4 couples de chocs les plus extrêmes.

3. Création des scénarios déterministes à partir des courbes.
4. Évaluation du BE et de la PVFP pour chacun des scénarios.
5. Représentation des résultats sous forme d'une "nappe", disponible sur les figures 3.7 et 3.8.

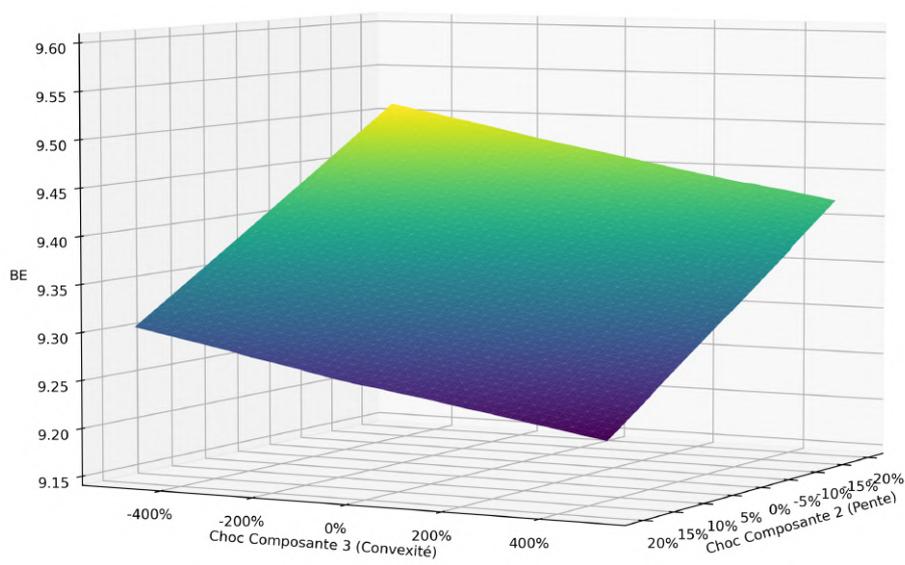


FIGURE 3.7 : Nappe de BE en fonction des chocs de pente et convexité (1/2).

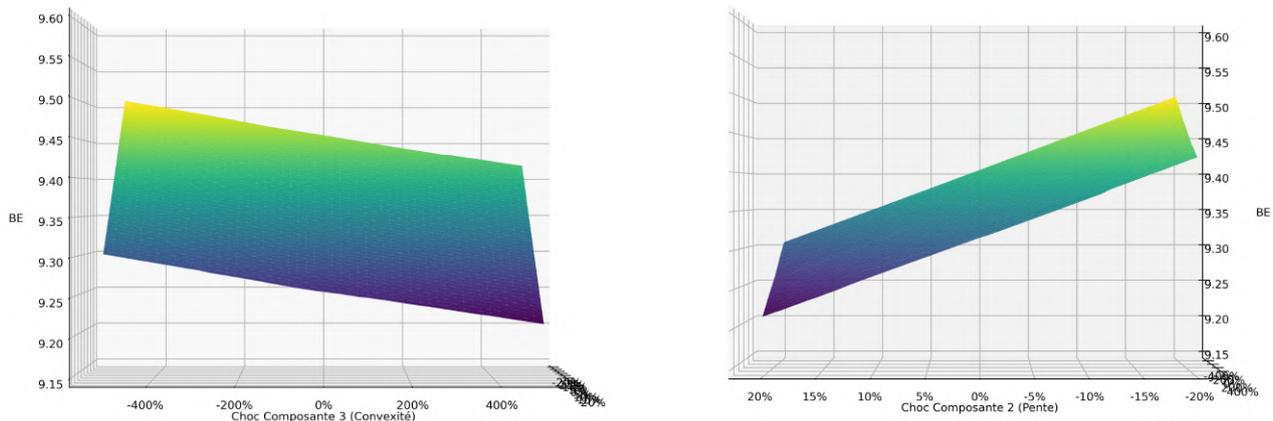


FIGURE 3.8 : Nappe de BE en fonction des chocs de pente et convexité (2/2).

A gauche le BE en fonction du choc de convexité. A droite le BE en fonction du choc de pente.

Les figures 3.7 et 3.8 permettent de conclure que :

- Le BE déterministe est **linéairement décroissant** en fonction du choc sur la pente de la courbe. La composante de pente étant décroissante et le coefficient de CP2 positif, alors lorsqu'on augmente le choc, les taux courts augmentent et les taux longs diminuent (et inversement).
- Le BE déterministe est **linéairement décroissant** en fonction du choc sur la convexité de la courbe. La composante de courbure est croissante puis décroissante et le coefficient CP3 négatif, alors lorsqu'on augmente le choc, les taux courts et longs augmentent, alors que les taux à moyen terme diminuent (et inversement).

Les scénarios déterministes sont construits de sorte à ce que **les actifs R343-10 et les liquidités évoluent au taux court** (taux à 1 an), et les taux futurs sont induits par la courbe initiale, en utilisant la formule 1.3 présentée dans le chapitre I.

Une analyse plus approfondie de ces scénarios est nécessaire pour comprendre le comportement réel du modèle, et sera réalisée dans une prochaine partie.

En attendant, on observe que **lorsque les taux courts sont plus élevés, le BE a tendance à diminuer**. L'absence d'écart de convergence en scénario déterministe implique que le résultat actualisé de l'assureur augmente alors.

Choc simple sur la convexité : cas stochastique

L'analyse de convexité a été poursuivie en univers stochastique cette fois-ci. Une pré-sélection de courbe amène à ne conserver que 11 situations de choc sur le coefficient de CP3 (3.9). Il n'aurait en effet pas été possible de conserver les 2601 cas précédents, en raison du temps de calcul nécessaire pour que le modèle ALM tourne sur 1000 tables (≈ 15 min).

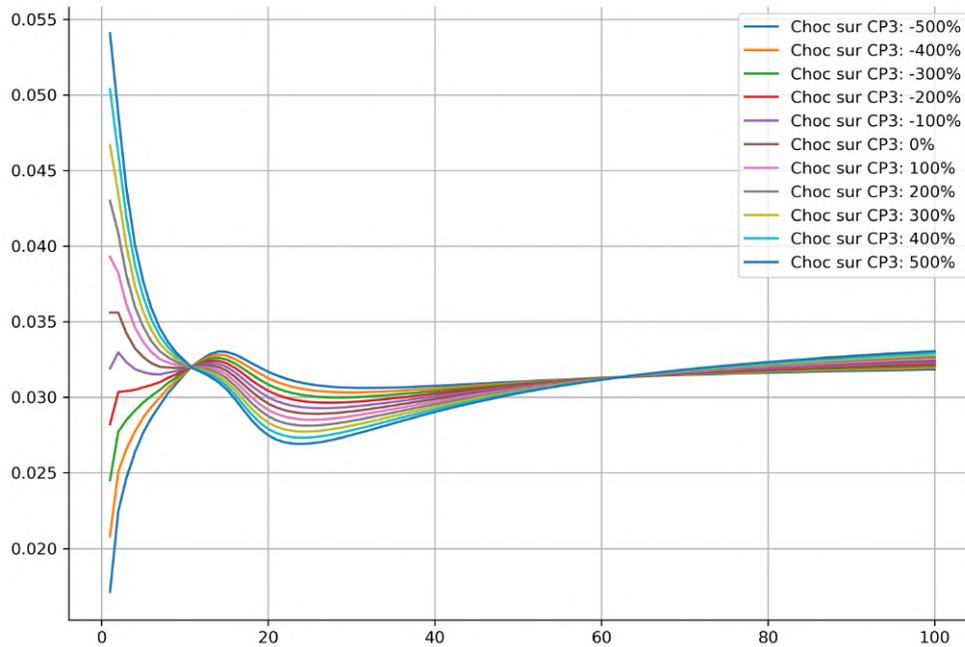


FIGURE 3.9 : Courbes sélectionnées pour les tests ALM stochastiques.

Les étapes suivantes ont été réalisées, pour chacune des courbes :

1. Calibration du GSE sur la courbe sélectionnée (sans changement des autres hypothèses) ;
2. Génération de 1000 tables de scénarios ;
3. Validation de la martingalité des nouvelles tables stochastiques ;
4. Production des résultats ALM : BE et PVFP.

La conclusion qui se dégage de cette analyse est semblable au cas déterministe précédent :

- le *best-estimate* décroît linéairement en fonction du choc de convexité (figure 3.10) ;

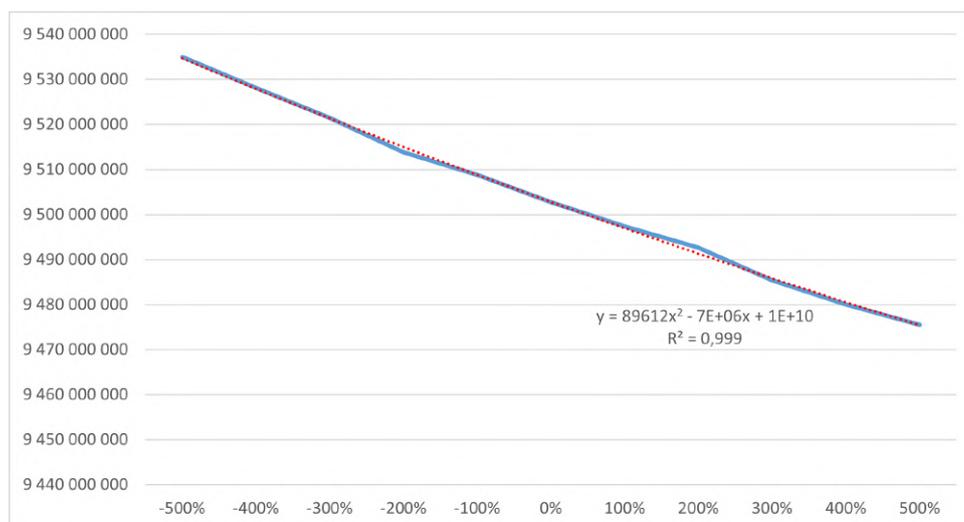


FIGURE 3.10 : Evolution du BE stochastique en fonction du choc de convexité.

- **La PVFP croît linéairement avec le choc de convexité** (figure 3.11).

Cela est dû au faible écart de convergence obtenu pour chacun des tests stochastiques (figure 3.12). Lorsque le BE augmente, la PVFP diminue et inversement, grâce à la relation centrale $VM_0 = BE + PFVP$.

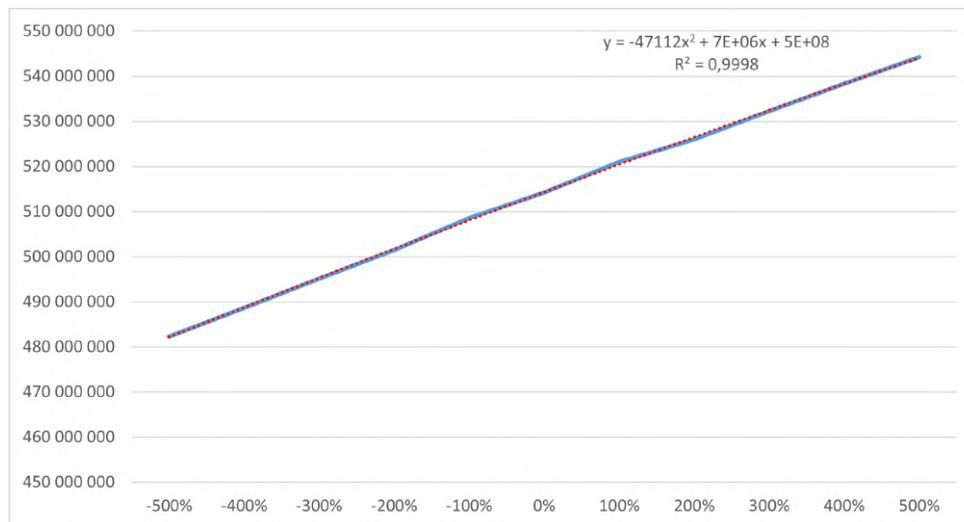


FIGURE 3.11 : Evolution de la PVFP stochastique en fonction du choc de convexité.

- L'écart de convergence, lui, reste globalement stable avec les chocs (3.12)

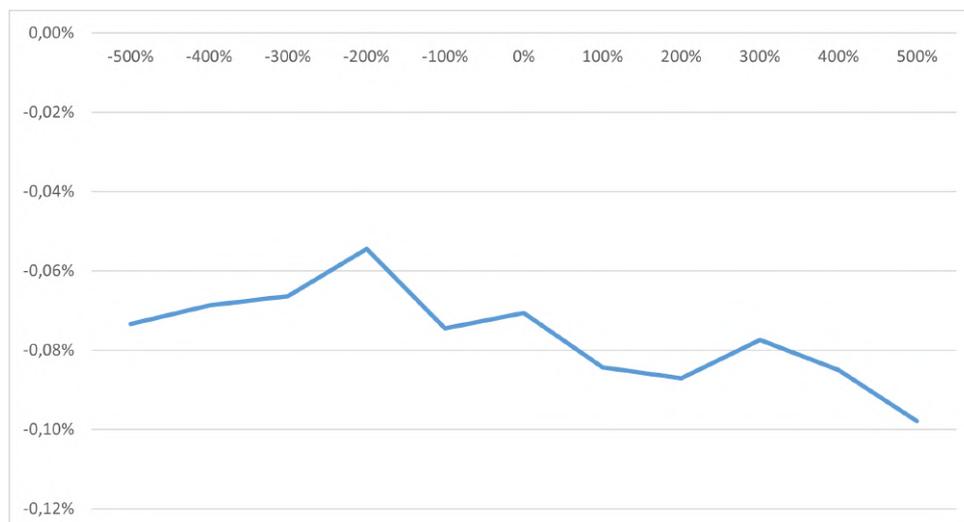


FIGURE 3.12 : Ecart de convergence en fonction du choc de convexité.

- **La valeur temps des options et garanties (TVOG) croît linéairement avec le choc de convexité** (figure 3.13).

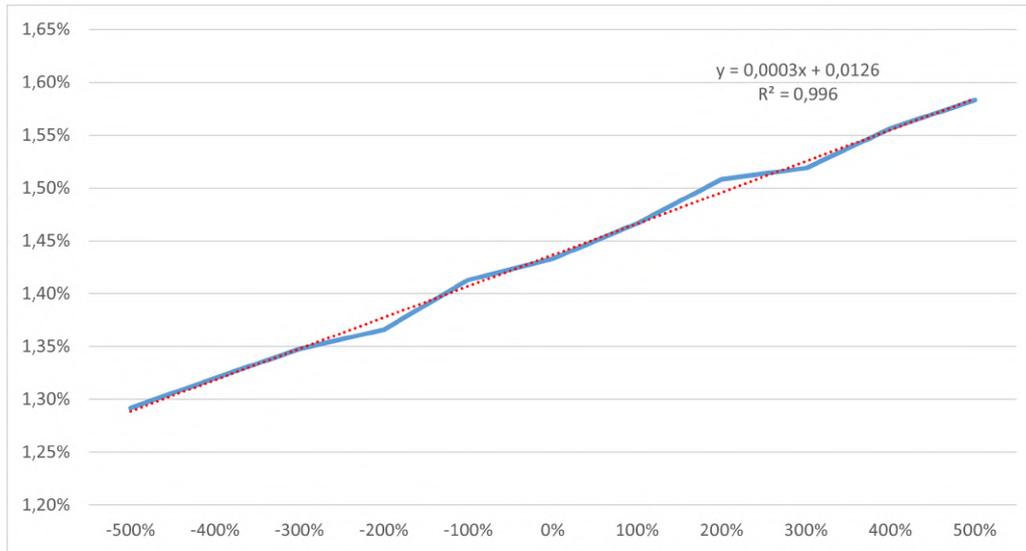


FIGURE 3.13 : Evolution de la TVOG en fonction du choc de convexité.

Les résultats ayant permis de créer les graphes 3.10, 3.11, 3.12 et 3.13 sont disponibles dans le tableau 3.1.

Scénario CP3	VM0	BE dét.	PVFP dét.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG (valeur)	TVOG (% VM0)	Ecart conv. (%)
-500%	10 009 891 506	9 405 641 529	604 249 977	9 534 961 073	482 287 231	129 319 543	1,29%	-0,07%
-400%	10 009 891 506	9 395 954 177	613 937 329	9 528 087 429	488 685 585	132 133 252	1,32%	-0,07%
-300%	10 009 891 506	9 386 535 475	623 356 031	9 521 428 266	495 109 383	134 892 791	1,35%	-0,07%
-200%	10 009 891 506	9 377 080 116	632 811 390	9 513 804 045	501 541 807	136 723 929	1,37%	-0,05%
-100%	10 009 891 506	9 367 389 139	642 502 366	9 508 822 563	508 535 127	141 433 423	1,41%	-0,07%
0%	10 009 891 506	9 359 310 762	650 580 744	9 502 745 169	514 217 513	143 434 407	1,43%	-0,07%
100%	10 009 891 506	9 350 548 376	659 343 129	9 497 367 425	520 970 127	146 819 049	1,47%	-0,08%
200%	10 009 891 506	9 341 677 970	668 213 535	9 492 613 789	526 008 975	150 935 819	1,51%	-0,09%
300%	10 009 891 506	9 333 366 692	676 524 814	9 485 410 087	532 234 886	152 043 396	1,52%	-0,08%
400%	10 009 891 506	9 324 235 574	685 655 932	9 480 026 467	538 378 290	155 790 893	1,56%	-0,08%
500%	10 009 891 506	9 316 996 699	692 894 807	9 475 486 293	544 217 145	158 489 595	1,58%	-0,10%

TABLE 3.1 : Résultats stochastiques sur les courbes de taux à convexité choquée.

L'évaluation de la TVOG, représentée sur la figure 3.13, vient enrichir les observations précédentes, et ajoute une nouvelle dimension d'analyse possible. Le coût des garanties augmente avec le choc de convexité, et puisque les *best-estimates* déterministes et stochastiques sont des fonctions linéairement décroissantes de ce même choc, il est possible de conclure que **la vitesse de décroissance du BE stochastique est inférieure à la vitesse de décroissance du BE déterministe**.

Cette observation est vérifiée lorsque les formules de tendances linéaires sont récupérées :

- $BE_{det}(x) = - 8\,884\,091x + intercept_{det}$;
- $BE_{sto}(x) = - 5\,922\,799x + intercept_{sto}$;
- Le ratio des pentes est d'environ 1,5 ($\frac{Pente_{det}}{Pente_{sto}}$).

Les courbes les plus convexes (+500% et +400% par exemple) ont donc tendance à donner des garanties plus coûteuses que les courbes concaves (-500% et -400% par exemple). Un tel résultat pourrait venir de la présence de très hauts rendements sur les premières années d'un scénario à

convexité extrême, et engendrant pour certaines tables stochastiques des performances financières extraordinaires en début de projection. Les assurés reçoivent alors sur ces scénarios **des taux de participation aux bénéfices très élevés**. Un effet d'inertie du taux attendu force l'assureur à continuer à verser des taux très élevés alors que les taux de rendement redescendent rapidement. Les *best-estimates* sont néanmoins plus faibles que pour les courbes concaves à taux plus bas, car les hautes performances financières permettent en même temps de gonfler les résultats de l'assureur.

Cette section montre ainsi que le BE et la PVFP sont bien sensibles à la convexité de la courbe. Cette sensibilité provient potentiellement des niveaux de taux lors des premières années de diffusion, mais une analyse des scénarios déterministes extrêmes (+500% et -500%) permettra de justifier avec plus de précision les effets sous-jacents responsables des résultats.

Le choc sur la CP3 a permis de quantifier l'impact de convexité sur la courbe, et de tracer l'évolution des BE et PVFP en fonction de ce choc. La linéarité des résultats pousse cependant à approfondir encore l'approche, en considérant un aspect prudentiel, central sous solvabilité II : **le calcul du SCR**.

3.3 Au-delà du *best-estimate* : étude du SCR marché

Afin d'ajouter une dimension prudentielle dans l'étude, une partie du calcul du SCR a été implémentée au sein du modèle ALM. Pour les assureurs-vie, le plus gros risque provient de l'instabilité potentielle du marché. Ce risque est donc celui qui pèse le plus dans le calcul du capital requis complet. Le SCR marché se compose de plusieurs sous-modules, calculés indépendamment les uns des autres (*stand-alone*) :

- Le SCR de taux d'intérêt
- Le SCR action
- Le SCR immobilier
- Le SCR de spread
- Le SCR de change
- Le SCR de concentration
- Le SCR d'illiquidité

Les sous-modules sont par la suite agrégés avec une matrice de corrélation réglementaire donnée par l'EIOPA. Le SCR marché lui-même agrégé avec les SCR santé, vie et non-vie pour obtenir le BSCR. Ce dernier, ajusté du risque opérationnel, donne le SCR (voir figure 3.14) final de l'assureur. Dans cette partie, uniquement le SCR marché sera considéré.

3.3.1 Implémentation du SCR marché

Les règles de calcul du SCR en formule standard sont disponibles dans le rapport technique de l'ACPR intitulé « *NOTICE « Solvabilité II » : Calcul du SCR en formule standard* » (ACPR, 2015).

Les sous-modules du SCR marché suivant ont été implémentés :

- Le SCR de taux, calculé comme **le maximum entre le SCR taux UP et le SCR taux DOWN** ;
- Le SCR action, calculé en **réduisant la valeur de marché du portefeuille action de 39%** ;

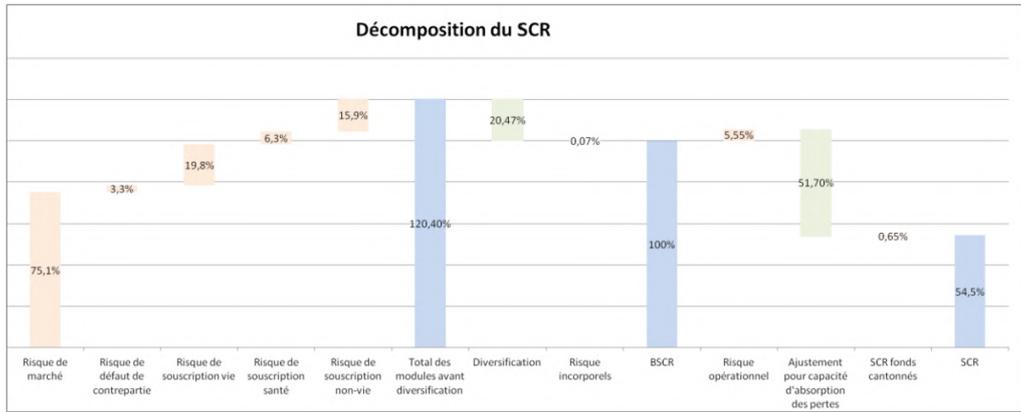


FIGURE 3.14 : Décomposition du SCR pour un assureur vie (Source : AUTORITÉ DE CONTRÔLE PRUDENTIEL, 2011).

- Le SCR immobilier, **calculé en réduisant la valeur de marché du portefeuille immobilier de 25%** ;

La matrice de corrélation des sous-modules est donnée dans le tableau 3.2 (avec $A = 50\%$ si le SCR de taux est le SCR taux DOWN, et 0% sinon).

	Taux	Action	Immo
Taux	100		
Action	A	100	
Immo	A	75	100

TABLE 3.2 : Matrice des corrélations entre les sous-modules du SCR marché (en %).

Le calcul des SCR de sous-modules se fait de la manière suivante :

$$SCR_i = (VM_0^{central} - VM_0^{choc\ i}) - (BE^{central} - BE^{choc\ i}).$$

Le SCR marché se calcule ensuite avec la formule

$$SCR_{marché} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} \times SCR_i \times SCR_j}.$$

3.3.2 Particularité des courbes "UP" et "DOWN" réglementaires et du SCR de taux

Cette section se concentre sur le **SCR de taux**. Pour obtenir sa valeur, il est nécessaire de recalculer le *best-estimate* de l'assureur dans deux scénarios distincts : l'un dans lequel les taux seraient plus élevés, et l'autre dans lequel les taux seraient plus bas. Le SCR de taux correspond au maximum des SCR calculés avec le taux UP ou avec le taux DOWN.

Les deux chocs sont réglementés et récupérables sur le site de l'EIOPA. Ils sont présentés dans le tableau A.3, disponible en annexes.

Pour les appliquer, il suffit d'utiliser pour le choc UP la formule

$$Courbe_{UP}(x) = Courbe(x) + \max\{1\%; Choc_{UP}(x) \times |Courbe(x)|\},$$

et pour le choc DOWN

$$Courbe_{DOWN}(x) = \begin{cases} Courbe(x) & \text{si } Courbe(x) < 0 \\ Courbe(x) - Choc_{DOWN}(x) \text{ times } |Courbe(x)| & \text{sinon} \end{cases}$$

La figure 3.15 montre le profil des courbes en questions, lorsque la courbe EIOPA au 31/12/2022 est considérée comme situation centrale.

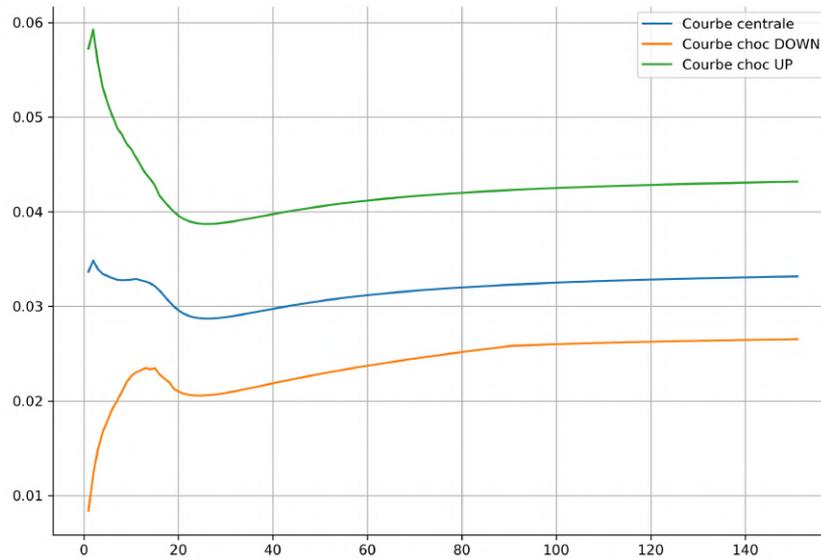


FIGURE 3.15 : Courbes UP et DOWN induite par la courbe EIOPA au 31/12/2022.

On observe que **les chocs SCR changent en particulier la convexité et le niveau des courbes**. En effet, en admettant que la courbe soit constante et égale à 3% de 1 à 150 ans, et en appliquant le choc dans cette situation, on obtient la figure 3.16.

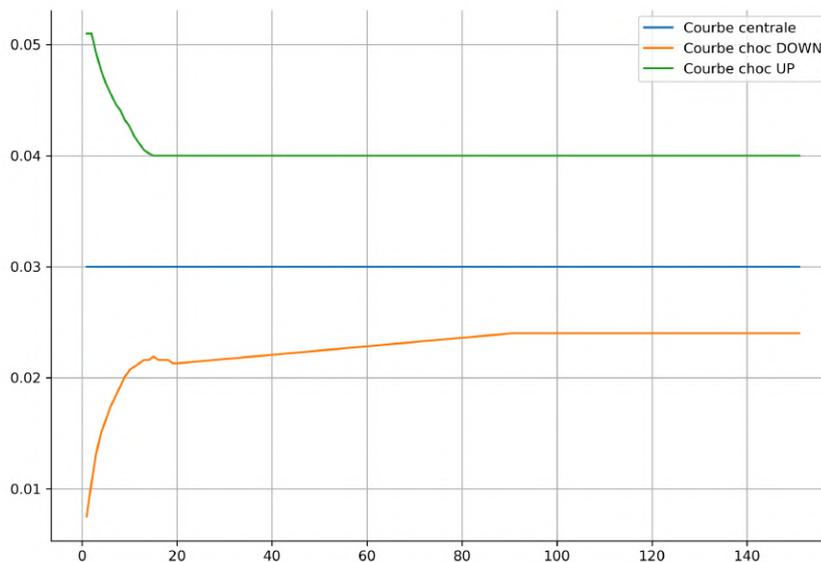


FIGURE 3.16 : Courbes UP et DOWN induite par une courbe constante à 3%.

L'impact le plus significatif est observé au niveau des maturités les plus courtes. Cette constatation découle du contexte de taux d'intérêt relativement bas depuis 2016. Afin de rendre le choc EIOPA suffisamment marquant pour qu'il ait un impact notable sur les évaluations de l'assureur en situation UP, il fut nécessaire d'amplifier les chocs à la hausse sur les maturités les plus courtes, plutôt que de considérer une simple translation.

L'effet observé ici est **d'autant plus accentué pour une courbe inversée telle que le marché européen connaît en 2022**. Plus encore si la convexité est hypothétiquement choquée à la hausse et que les taux courts sont encore plus haut, comme sur la figure 3.17 :

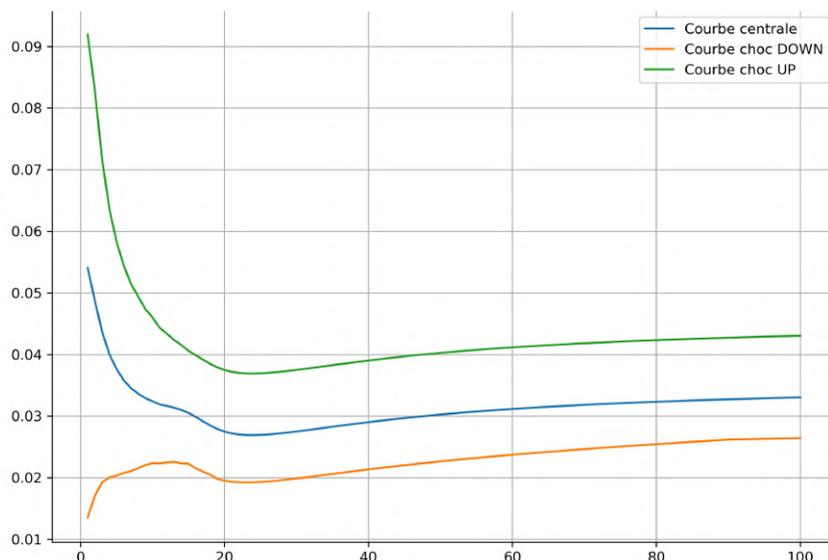


FIGURE 3.17 : Courbes UP et DOWN induite par la courbe à CP3 choquée à 500%.

Les chocs de taux ont plusieurs effets sur les résultats du modèle ALM. Prenons le choc de taux UP pour notre exemple. Les conséquences sont multiples, certaines étant avantageuses pour l'assureur et d'autres moins :

- L'augmentation des taux de rendement futurs, notamment pour les actifs R343-10. Cette augmentation profite à la fois aux assurés par le mécanisme de participation aux bénéfices, mais aussi à l'assureur qui se rémunère sur le montant de produits financiers restants après application de ce mécanisme.
- La perte de valeur des obligations en portefeuille. En effet, le prix des obligations évolue en sens inverse des taux. Après le choc en $t = 0$, les obligations peuvent se retrouver en moins-value.
- L'augmentation du taux *benchmark*, donc du taux attendu par les assurés. Si les obligations sont en moins-value et que l'assureur ne peut pas payer ces taux, alors il s'expose à un **risque de rachat** qui, s'il est trop important, entraînera la **vente des obligations en moins-value et l'épuisement potentiel de la réserve de capitalisation**.

La convexité des taux peut donc apporter avantages ou désavantages sur la solvabilité de l'assureur, en fonction de si sa sensibilité est plus ou moins grande sur le choc UP ou DOWN.

3.3.3 Résultats de SCR sur les courbes choquées et ratio de solvabilité simplifié

Une fois l'implémentation du SCR marché (simplifié) terminée dans le modèle ALM, l'indicateur de solvabilité a pu être calculé pour chacune des 11 courbes présentées dans la section précédente.

Pour pouvoir obtenir une valeur de SCR, le modèle ALM doit effectuer 5 calculs stochastiques :

- Le scénario central ;
- Le scénario de taux UP ;
- Le scénario de taux DOWN ;
- Le scénario de choc action ;
- Le scénario de choc immobilier.

Le calcul du SCR prend donc beaucoup de temps, et sa vitesse d'exécution dépend fortement des performances de la machine sur lequel il est effectué.

Afin de rendre les scénarios de convexité comparables entre eux, un ratio de solvabilité simplifié a été considéré :

$$Ratio_{proxy} = \frac{PVFP}{SCR_{marché}}.$$

Normalement, le ratio de solvabilité d'une compagnie d'assurance est calculé en comparant les fonds propres économiques S2 au SCR complet :

$$Ratio = \frac{FP}{SCR}.$$

Pour cette étude, cependant, il est choisi d'assimiler les fonds propres à la PVFP, et de se limiter au SCR marché, pour des raisons de faisabilité de l'étude, en particulier en ce qui concerne le temps de calcul nécessaire. Les résultats représentent ainsi une approximation du véritable ratio de solvabilité, et sont présentés dans le tableau 3.3.

Scénario CP3	SCR taux	SCR action	SCR immo	SCR marché	PVFP	PVFP/SCR marché
-500%	46 432 504	191 461 148	62 153 869	268 891 259	482 287 231	179,36%
-400%	47 284 939	194 250 172	64 827 512	274 428 874	488 685 585	178,07%
-300%	45 832 471	196 673 683	65 277 364	276 234 792	495 109 383	179,23%
-200%	46 190 062	200 433 498	66 029 828	280 761 266	501 541 807	178,64%
-100%	44 192 487	201 455 880	64 083 706	278 826 259	508 535 127	182,38%
0%	50 174 471	200 983 278	64 253 247	282 345 675	514 217 513	182,12%
100%	49 185 395	201 207 430	64 026 092	281 731 037	520 970 127	184,92%
200%	48 520 095	201 710 343	61 816 769	279 915 270	526 008 975	187,92%
300%	48 552 019	202 495 375	62 353 270	281 154 611	532 234 886	189,30%
400%	48 797 588	200 907 745	61 830 565	279 325 080	538 378 290	192,74%
500%	47 757 353	199 695 254	60 677 122	276 497 320	544 217 145	196,83%

TABLE 3.3 : Résultats de ratio proxy sur les courbes de taux à convexité choquée.

Le *ratio proxy* augmente à mesure que le choc de convexité de la courbe s'intensifie, atteignant son niveau maximal avec le choc de 500%. Cette variation n'est pas linéaire, contrairement à ce qui a été observé précédemment pour le *best-estimate* (déterministe et stochastique) ou la TVOG : le ratio augmente de manière quadratique avec l'amplitude du choc.

Les chocs positifs de convexité apportent donc **une meilleure solvabilité à l'assureur**. La convexité du ratio montre que les situations de choc (taux, actions et immobilier) ont un impact relativement moins important sur l'assureur lorsque les courbes sont plus convexes. Ce constat peut

s'expliquer par une situation favorable en début de projection (avec des rendements plus élevés), qui profite davantage à l'assureur qu'aux assurés.

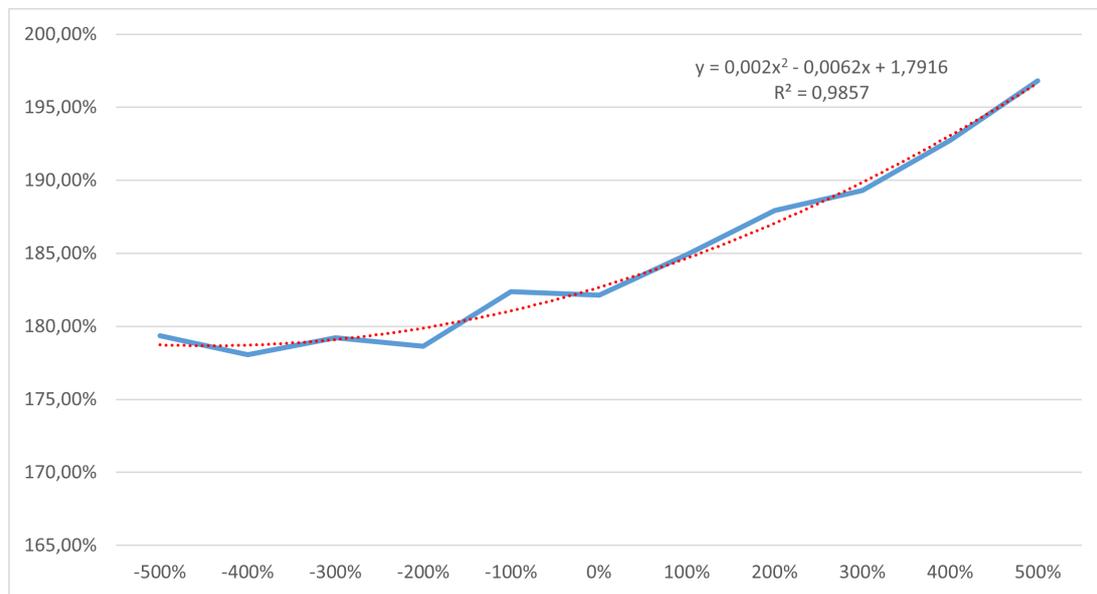


FIGURE 3.18 : Courbe de ratio proxy sur les courbes de taux à convexité choquée.

Remarque : L'analyse réalisée dans cette sous-partie reste limitée. Le ratio de solvabilité serait bien plus pertinent en calculant ou en approchant les modules de SCR manquant, notamment celui de souscription Vie. Le niveau du SCR de rachat massif fluctuerait probablement en fonction de la forme de la courbe, notamment du fait de sa sensibilité à l'actualisation de la première année.

3.4 Études secondaires : TMG haut, taux bas

Les résultats des deux sections précédentes révèlent une tendance globalement linéaire (hormis le ratio de solvabilité). Ce comportement peut être dû au fait que les taux très élevés ne permettent pas de mettre en difficulté l'assureur en raison des faibles TMG de nos *model points* de passif : **les options sont en dehors de la monnaie.**

En conservant la même approche d'analyse en composantes principales à 3 facteurs présentée, l'étude de convexité est faite à nouveau, mais cette fois-ci en se plaçant dans deux nouvelles situations :

1. En remontant les taux minimaux garantis, pour les faire se rapprocher des courbes utilisées. Le portefeuille du modèle est, pour rappel, calibré sur des statistiques internes et correspond à une situation à fin 2022, dans laquelle les garanties étaient toujours faibles suite à la période précédemment proche de taux bas ;
2. En appliquant un choc de niveau sur le facteur d'ACP correspondant (CP1), pour faire descendre le niveau des taux, notamment à court et moyen terme. Les chocs de pente et de convexité sont ensuite appliqués à nouveau.

3.4.1 Des taux garantis plus élevés

La première situation amène à augmenter les taux garantis, sur l'ensemble des *model points* du passif. Le taux garanti moyen, pondéré par le niveau des provisions mathématiques, est alors de 3%.

Avec ce nouveau portefeuille de passif, les 2601 courbes précédentes ont été testées pour évaluer le niveau du *best-estimate* en sortie de modèle ALM. Les résultats, présentés dans les figures 3.19 et 3.20, sont cohérents avec l'approche principale : les courbes les plus avantageuses sont toujours les courbes les plus convexes, pour lesquelles les taux des 3 premières années sont très élevés.

Pour autant, le plan parfait n'existe plus : les montants de BE ne sont pas totalement linéaires en fonction du choc de convexité, ni du choc de pente. **La nappe se redresse légèrement sur les courbes combinant à la fois un choc de pente et un choc de courbure élevé**, par exemple la courbe violette (20% de choc pente et 500% de choc convexité) du graphique 3.6, caractérisé par un taux 1 an à presque 6%.

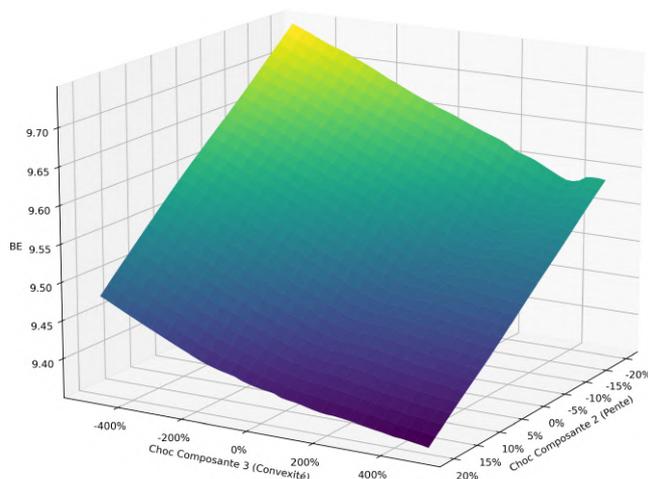


FIGURE 3.19 : Nappe de BE en fonction des chocs de pente et convexité en situation de TMG plus élevé (1/2).

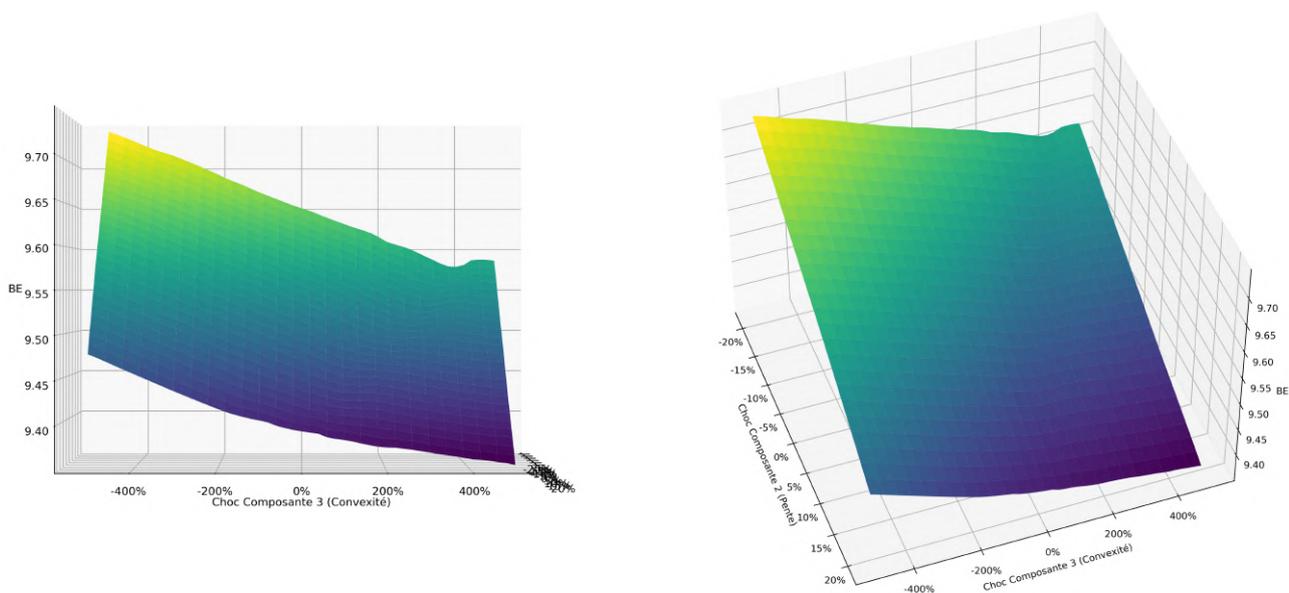


FIGURE 3.20 : Nappe de BE en fonction des chocs de pente et convexité en situation de TMG plus élevé (2/2).

3.4.2 Des courbes composites plus basses

La seconde approche consiste à abaisser les courbes en appliquant un choc sur le coefficient de la première composante de l'ACP, et nécessite l'utilisation des courbes de la figure 3.21.

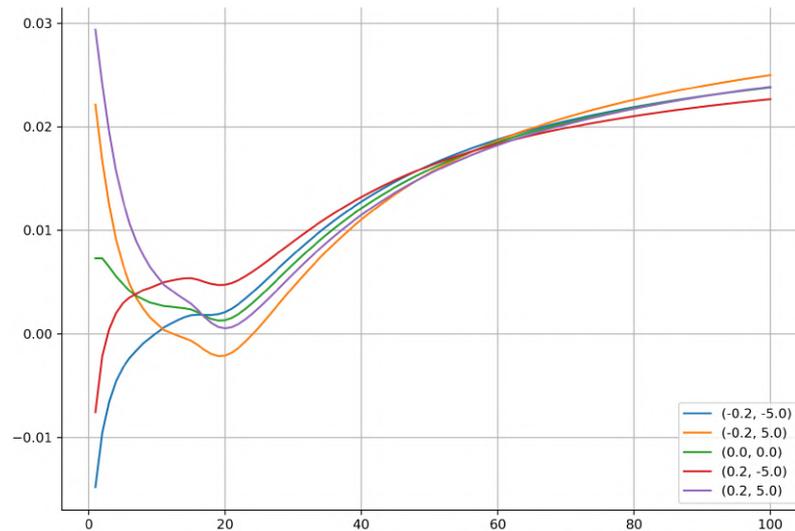


FIGURE 3.21 : 5 des 2601 courbes utilisées pour les calculs déterministes en taux bas : la courbe centrale et les 4 couples de chocs les plus extrêmes.

Les résultats obtenus sont plus exotiques, avec **une forme globalement convexe en fonction du choc de courbure**, mais toujours plutôt linéaires en fonction du choc de pente (figures 3.22 et 3.23).

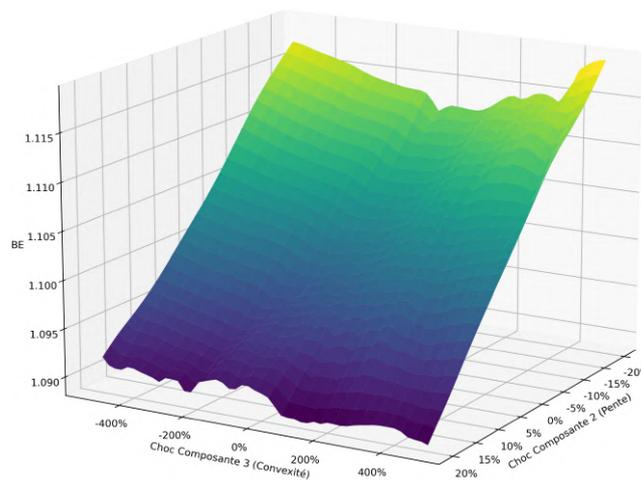


FIGURE 3.22 : Nappe de BE en fonction des chocs de pente et convexité en situation de taux bas (1/2).

Les courbes les plus concaves commencent par des taux courts très négatifs (-10% pour le taux 1 an), et ruinent en partie l'assureur en début de projection : il puise sur ses fonds propres pour payer les TMG des premières années, en raison des mauvaises performances de toutes ses classes d'actifs et de ses mauvaises perspectives de réinvestissement.

De l'autre côté, les courbes les plus convexes impliquent des revalorisations et de la constitution de PPE les premières années, mais l'assureur est très vite rattrapé par la situation économique, car les taux baissent très vite, engendrant des rachats, une dévalorisation du portefeuille d'actifs et une nouvelle fois des possibilités de réinvestissement obligataires à taux très bas.

La situation la moins désavantageuse est finalement celle dans laquelle la courbe décroît légèrement les premières années avant de monter à partir de 20 ans (convergence UFR). Les taux servis et demandés restent stables, tout comme le niveau de plus ou moins value du portefeuille.

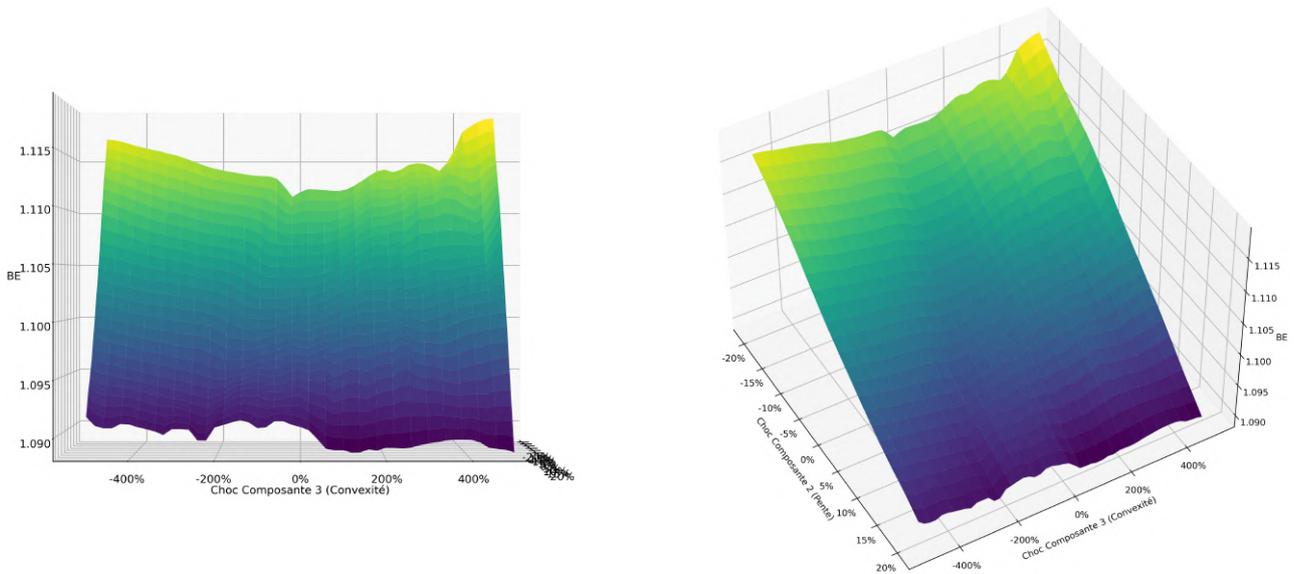


FIGURE 3.23 : Nappe de BE en fonction des chocs de pente et convexité en situation de taux bas (2/2).

Se limitant à un choc de convexité (pas de choc sur la pente), les *best-estimates* stochastiques sont recalculés pour les 11 courbes présentées en figure 3.24.

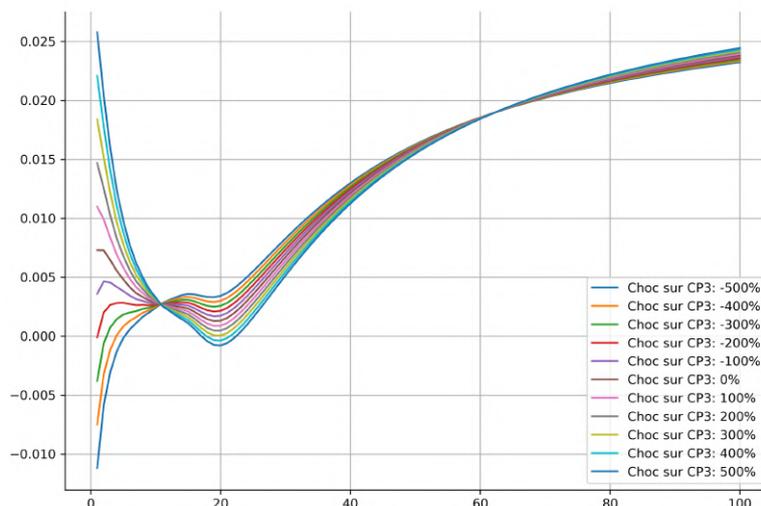


FIGURE 3.24 : 11 courbes utilisées pour les résultats stochastiques en situation de taux bas.

Les résultats, présentés en figure 3.25, confirment la tendance précédemment observée. Le montant du BE est très élevé pour les courbes les plus concaves ou les plus convexes.

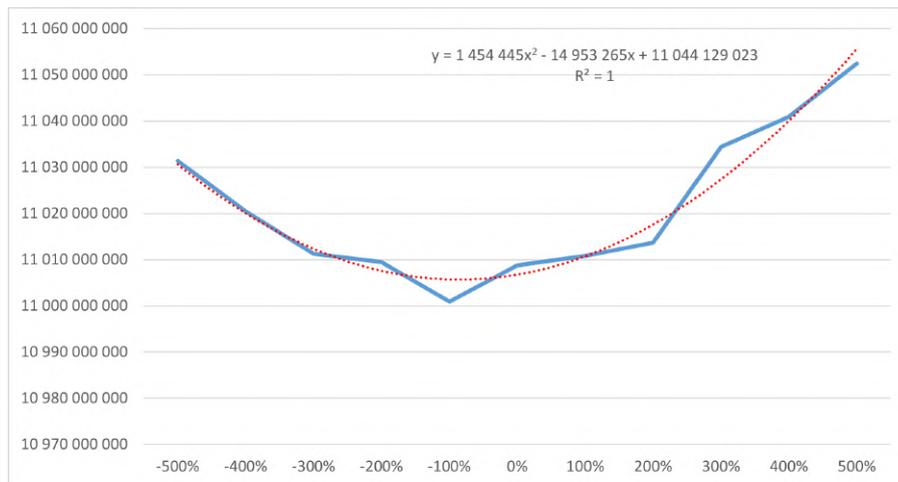


FIGURE 3.25 : *Best-estimates* stochastiques en fonction de la convexité des courbes, en situation de taux bas.

L'approche "taux bas" reste à considérer avec précaution :

- Les hypothèses d'actif, notamment les valeurs de marché, n'ont pas été modifiées. Le portefeuille d'actif initial reste ainsi calibré sur une situation au 31/12/2022 ;
- La probabilité d'observation de telles courbes est faible. Une courbe commençant avec un point initial très élevé à un an, à 3%, et s'écrasant à 15 ans pour atteindre des taux négatifs, avant de remonter brusquement vers les 3%, semble irréaliste. Ce scénario correspondrait à une période d'instabilité économique particulière, caractérisée par une inflation extrême, incitant la Banque centrale européenne à augmenter les taux courts, mais pour une durée très limitée. En conséquence, le marché anticiperait des taux à 10 ans très bas, voire négatifs, sur une longue période. À cause de la convergence vers l'UFR de la courbe de l'EIOPA, celle-ci aurait tendance à remonter dès 20 ans. En revanche, une courbe de taux zéro-coupon (ZC) de marché, comme celle émise par la BCE, demeurerait probablement proche de 0% pour les maturités les plus longues ;
- Les variations plus locales des *best-estimates* de la figure 3.22 restent sans explications, et pourraient provenir d'effets de bord du modèle, en raison de l'aspect extrême des situations économiques testées.

3.5 Ajuster la volatilité face aux changements de la courbe des taux ?

Les déformations opérées sur la courbe des taux soulèvent une problématique supplémentaire : qu'en est-il de leur influence sur les autres diffusions économiques ? Lors de la calibration d'un GSE en effet, on s'arrête sur un état fixe du monde. La courbe des taux EIOPA et les données de marché (par exemple provenant de Bloomberg) permettent de calibrer les modèles : leurs dynamiques, leurs tendances, leurs volatilités.

Nous avons examiné la possibilité et la faisabilité de changer la volatilité des indices boursiers et immobiliers en réponse au choc de convexité affectant la courbe des taux. Dans le cas d'une courbe

plus convexe, induisant des taux courts à un niveau très élevé, il est ainsi envisageable d'anticiper une augmentation de la volatilité, reflétant l'instabilité accrue des marchés financiers. En revanche, un raisonnement inverse nous conduirait à réduire la volatilité pour une courbe concave associée à des taux courts plus bas.

Cette partie n'a pas été approfondie davantage, mais elle ouvre la voie à une exploration future. Cependant, deux remarques méritent d'être formulées concernant ce sujet :

- **La calibration d'une telle dynamique apparaît complexe.** L'accroissement de la volatilité des indices boursiers et immobiliers par rapport aux taux ne semble pas être systématique avec l'élévation des taux. Les investisseurs ont généralement tendance à anticiper les décisions de la BCE dans des périodes économiquement tendues, ce qui rend les marchés financiers plus instables même lorsque les taux demeurent bas. La corrélation est donc difficile à déterminer et à calibrer de manière précise.
- **Interprétations possibles :** En envisageant la calibration de notre volatilité de manière à ce qu'elle soit plus élevée en période de taux élevés (convexité) et moins élevée en période de taux bas (concavité), nous nous attendons, par rapport à une situation centrale élevée, à une détérioration des indicateurs de solvabilité, et par rapport à une situation centrale basse, à une amélioration des indicateurs de solvabilité.

3.6 Limites de l'analyse de convexité

Les faiblesses propres au modèle ALM et au générateur de scénario économique ont déjà été exposées à la fin du chapitre précédent. L'approche choisie dans cette section pour étudier l'effet de la convexité n'est pas non plus sans limite.

Il a déjà été souligné que décrire et analyser la courbe des taux ne constitue pas une opération simple et directe. Les modèles paramétriques ou l'ACP contraignent les formes possibles de courbe de taux, mais permettent d'avoir un unique coefficient à changer pour étudier la convexité. Il serait possible d'utiliser une méthode de construction de courbe plus complexe, par exemple en reproduisant la phase d'interpolation et d'extrapolation de Smith-Wilson. Une telle approche produirait des courbes plus rigoureuses et réalistes par rapport à la réglementation européenne, mais risquerait également de complexifier la comparaison entre les situations.

Dans les deux cas, cependant, la rationalisation des courbes produites n'est pas évidente, car elles s'éloignent de la réalité et ne se fondent pas entièrement sur des données historiques réelles. **C'est pourquoi il est important de rappeler le caractère théorique et expérimental de l'étude.**

Une des limites principale de cette partie constitue aussi la non modification des caractéristiques du portefeuille de l'assureur fictif créé. Les taux de plus ou moins value des actifs non amortissables, ou les taux de coupons des obligations, par exemple, sont liés à la situation centrale du 31 décembre 2022, et non modifiés lorsque les courbes changent. La phase de risque-neutralisation des obligations en début de moteur ALM permet tout de même d'assurer la cohérence de l'évolution des actifs lors de la projection.

Les indicateurs d'analyse peuvent aussi être affinés, notamment en complétant le calcul du SCR avec le module de souscription Vie, par exemple. Cela permettrait de capter une partie du risque non considérée jusqu'alors. Les analyses pourraient donc être poussées au-delà des métriques actuelles.

Enfin, la partie 3.5 évoque la possibilité de modifier le générateur de scénario économique pour affecter la volatilité des taux en fonction de la convexité des taux.

Conclusion du chapitre

Le troisième chapitre a conduit à une modélisation des courbes de taux par le biais de l'analyse en composantes principales, réduisant ainsi le nombre de paramètres requis pour leur reconstruction. Ce choix de modélisation a l'avantage de conserver un unique paramètre pour quantifier la valeur de la convexité de la courbe EIOPA au 31/12/2022. Cette approche a ainsi rendu possible l'application de chocs à cette convexité et l'analyse de leurs effets sur les résultats de l'assureur. Pour ce faire, les nouvelles courbes de taux ont été intégrées dans le GSE et les tables générées ont été ensuite fournies au modèle ALM.

La hausse de la convexité, c'est-à-dire l'augmentation des taux courts par rapport aux taux moyens et longs, a pour effet d'**améliorer la situation de l'assureur** : les *best-estimates* déterministes et stochastiques sont à la baisse en fonction du choc et le ratio de solvabilité de l'assureur croît de manière quadratique. Ainsi, plus la courbe des taux est élevée sur les maturités de 1 et 2 ans, plus l'assureur semble bénéficier d'une situation favorable.

Les résultats peuvent être nuancés en essayant de rapprocher le niveau des taux à celle des garanties de l'assureur (TMG) ou inversement : l'évolution du BE déterministe ou stochastique devient alors plus ou moins convexe, en fonction de la courbure des taux. Il est cependant important de se rappeler que les calculs effectués ont été réalisés sur un portefeuille fixe, sans **repricing** des actifs et sur une répartition des postes du bilan théorique.

Chapitre 4

Sensibilité des assureurs face à la convexité des taux

Les chapitres précédents ont permis de concevoir des outils permettant de modéliser la vie de contrats d'épargne d'un assureur fictif en univers déterministe ou stochastique, et d'évaluer le niveau de ses engagements en fonction de la forme de la courbe des taux en vigueur.

L'attention a été jusqu'alors portée sur les impacts de convexité de manière assez large et leurs importances dans le calcul de plusieurs indicateurs : le BE, la PVFP, la TVOG, le SCR marché simplifié (taux, action et immobilier), et un proxy de ratio de solvabilité (PVFP/SCR marché).

Afin de compléter l'analyse et comprendre le comportement du modèle avec précision, l'évolution de certaines provisions de l'assureur sera explorée sur trois scénarios :

- Le scénario de choc à -500%, créant une courbe similaire à celles du troisième trimestre de 2022 ;
- Le scénario sans choc (central), ou courbe EIOPA au 31/12/2022 ;
- Le scénario de choc à +500%, courbe hypothétique correspondant à une poursuite de la hausse des taux.

Les courbes correspondantes sont représentées sur la figure 4.1.

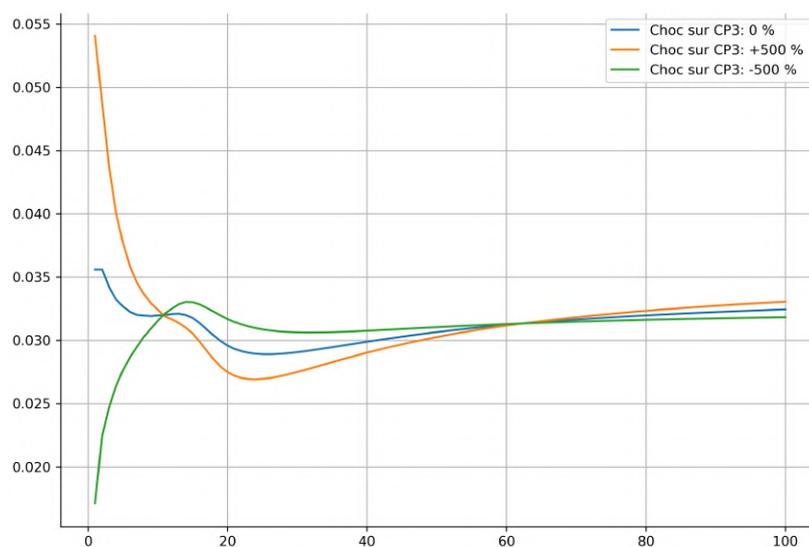


FIGURE 4.1 : Courbe centrale et courbes à CP3 choquée (-500% et +500%).

La définition du taux attendu utilise par ailleurs les taux *forward* à 1 an et les taux *forward* à 10 ans, présentés respectivement sur les graphes 4.2 et 4.3.

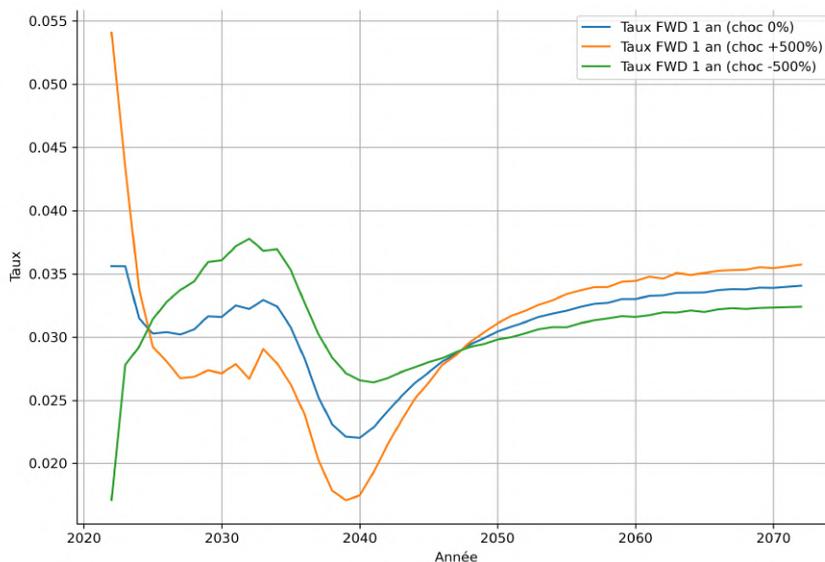


FIGURE 4.2 : Courbes FWD à 1 an pour les trois scénarios étudiés.

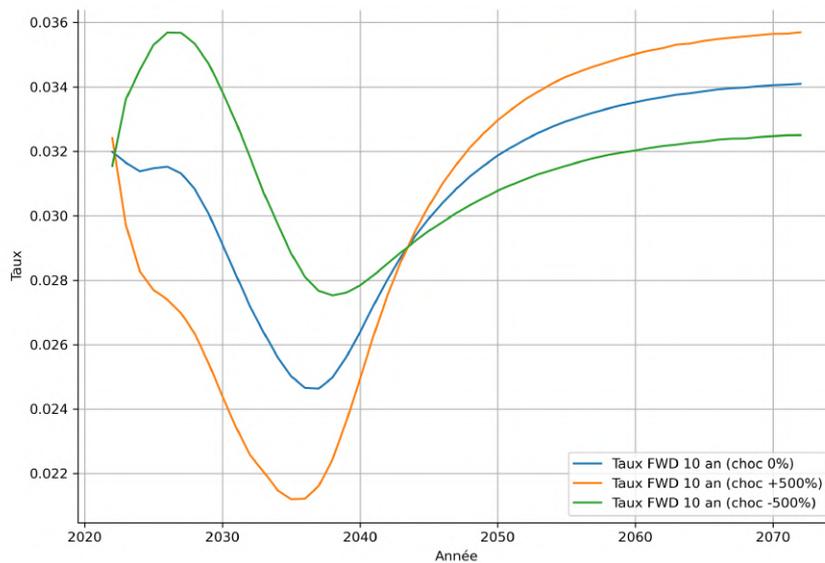


FIGURE 4.3 : Courbes FWD à 10 ans pour les trois scénarios étudiés.

L'objectif de cette section est donc d'observer la **sensibilité des résultats obtenus en changeant les hypothèses de l'actif, du passif ou du modèle**. L'évolution des flux de BE, PVFP et de différentes provisions sera étudiée pour chacune des trois courbes, afin de comprendre quelles situations font que la convexité des taux aura une plus grande incidence sur les résultats de l'assureur.

4.1 Scénario initial central

Commençons par présenter l'évolution des provisions et flux lorsqu'aucune hypothèse n'est modifiée. La configuration est alors identique à celle des deux chapitres précédents, à la fois au niveau du modèle et des *inputs*. Les graphes de la figure 4.4 présentent le niveau des éléments suivants, au cours de la projection :

- Le stock de **provision pour participation aux excédents (PPE)** ;
- Le stock de **réserve de capitalisation (RC)** ;
- Les **taux attendus** et les **taux réellement servis** sur l'année (moyenne sur l'ensemble des contrats) ;
- Les **taux de rachats dynamiques**, s'ils s'activent ;
- Les flux actualisés de **PVFP** et de **BE**.

Ces 6 graphiques seront générés pour chacune des situations étudiées.

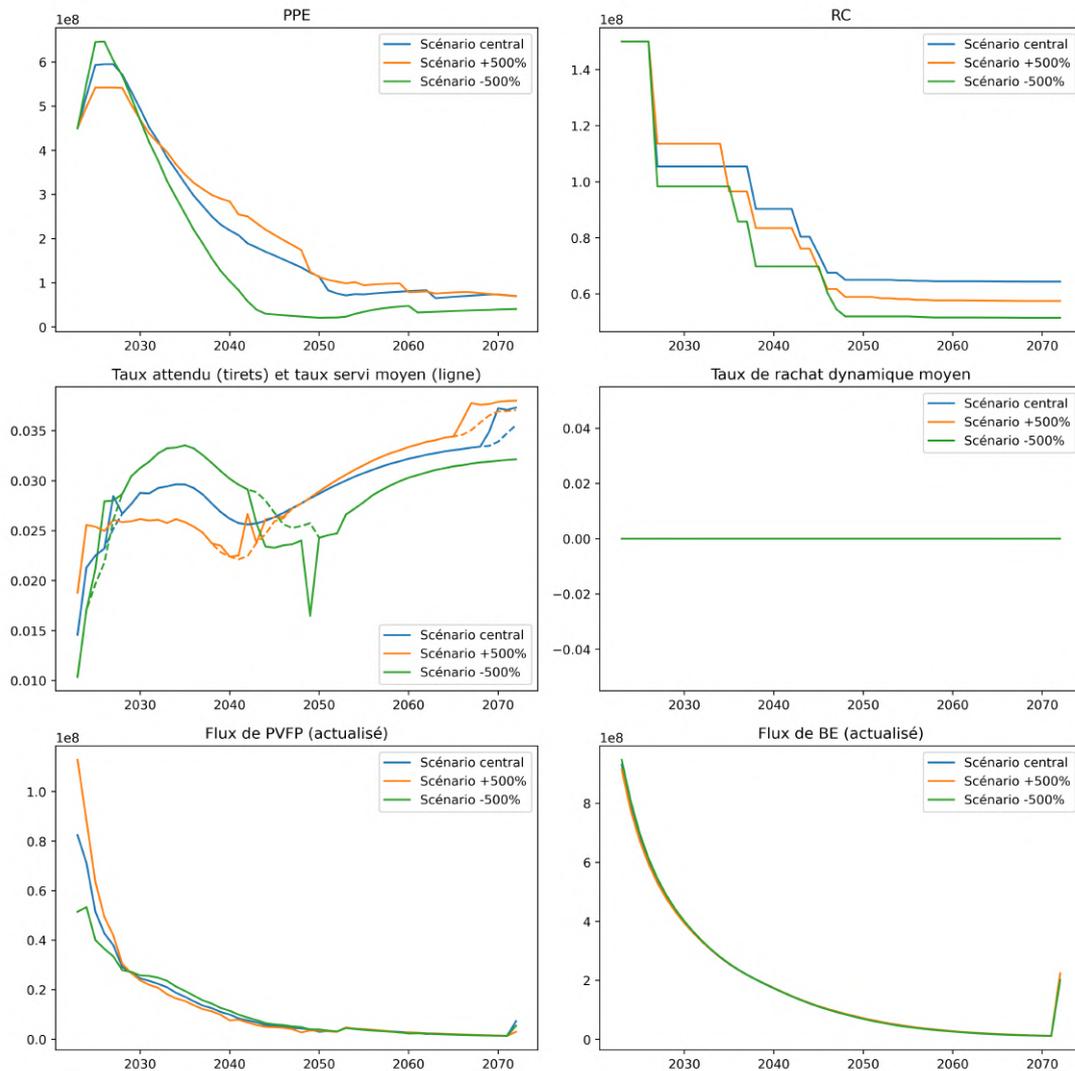


FIGURE 4.4 : Evolution déterministe du scénario initial.

En analysant attentivement les graphiques, on observe que :

- Sur les premières années de projections, l'assureur a tendance à provisionner de la PPE qui sera libérée plus tard. Rappelons que la PPE ne peut pas dépasser 8% des provisions mathématiques : sa dotation est donc limitée par ce plafond.
- La PPE est libérée plus brutalement dans le scénario -500% : le taux attendu et le taux servi y sont plus élevés (particulièrement avant 2040) en raison de la forme des courbes FWD1 (4.2) et FWD10 (4.3) qui participent à la définition du taux *benchmark*.
- La réserve de capitalisation diminue progressivement dans les 3 scénarios, sans jamais se vider complètement. Ce mouvement est dû à la **vente d'obligation en moins-value lors de la réallocation du portefeuille**. Les ventes s'effectuent par manque de liquidités pour payer les sorties. A partir de 2052, les obligations du portefeuille initial (en moins-value) sont arrivées à maturité. La réserve de capitalisation n'évolue donc presque plus, car le niveau de plus ou moins-value des obligations achetées en cours de projection reste assez faible.
- Aucun rachat conjoncturel ne se déclenche. La configuration de base de la fonction de rachats dynamiques est établie en prenant la moyenne des paramètres minimums et maximums préconisés par l'ACPR (voir 2.6). La sensibilité des assurés aux rachats est donc limitée.
- Les flux de résultats sont plus importants en début de projection, et plus élevés sur la courbe la plus haute et la plus convexe (+500%).
- La forme générale des flux de *best-estimate* est similaire pour les trois courbes. Les pics finaux correspondent à la libération des provisions et à la vente d'actifs à la fin de la projection.

Les résultats centraux mettent en évidence un comportement cohérent du modèle. Ils sont présentés dans le tableau 4.1, où la TVOG est exprimée en pourcentage de la VM_0 .

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 405 641 529	604 249 977	9 530 555 943	479 335 563	1,25%
0%	10 009 891 506	9 359 310 762	650 580 744	9 498 228 966	511 662 540	1,39%
500%	10 009 891 506	9 316 996 699	692 894 807	9 468 398 771	541 492 734	1,51%

TABLE 4.1 : Résultats du scénario initial.

Remarques

- Notre portefeuille obligataire est en moins-value totale de 15% en raison de la remontée des taux en 2022. Dans l'ensemble des scénarios testés, la réserve de capitalisation évolue donc systématiquement à la baisse jusqu'à épuisement des obligations initiales.
- Trois jeux de 1000 tables ont été générés et validés pour les calculs stochastiques : 1 jeu pour chaque courbe (-500%, 0%, +500%). Les mêmes browniens sont utilisés pour les trois courbes pour limiter l'aléa supplémentaire lié au GSE.
- L'écart de convergence stochastique a été distribué entre le BE et la PVFP (au prorata du total), pour obtenir l'égalité $VM_0 = BE_{sto} + PVFP_{sto}$. Pour l'ensemble des résultats stochastiques, cet écart se situait dans l'intervalle $[-0.10\%; -0.01\%]$.

4.2 Influence de l'actif et du passif

4.2.1 TMG à 0%

Le premier scénario de sensibilité est conçu en supposant **des taux garantis nuls pour l'ensemble des contrats du passif**. L'assureur se retrouve avec moins de contraintes : il doit seulement verser la participation aux bénéficiaires en cas de performances financières. Deux effets sont observés :

- Une augmentation de la PVFP (diminution du BE), à la fois en déterministe et stochastique, par rapport au scénario initial ;
- Une diminution de l'effet TVOG : les options coûtent moins cher à l'assureur.

Les résultats de cette situation se trouvent dans le tableau 4.2, et les graphes associés en annexes, figure A.5.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 402 034 502	607 857 004	9 516 004 881	493 886 625	1,14%
0%	10 009 891 506	9 357 169 703	652 721 802	9 482 053 630	527 837 875	1,25%
500%	10 009 891 506	9 311 721 700	698 169 806	9 450 128 667	559 762 838	1,38%

TABLE 4.2 : Résultats du scénario TMG 0%.

4.2.2 TMG +100 bps

Le second scénario s'oppose au précédent : **les taux garantis sont relevés de 100 points de base pour l'ensemble des *model points* du passif**. Les effets se renversent alors :

- La PVFP diminue ;
- Les taux de TVOG montent.

La provision pour participation aux bénéficiaires est dotée plus faiblement en début de projection et s'épuise plus rapidement que pour le scénario initial. En effet, les assurés bénéficient de taux plus avantageux dès le début de la projection, et un effet d'inertie pousse l'assureur à verser des taux plus élevés plus longtemps.

Remarque : Le *taux servi passé*, en début de projection, est **initialisé au TMG du contrat (hypothèse de modèle)**. En augmentant les garanties des *model points*, le risque de déclenchement de rachats conjoncturels augmente donc.

Les valeurs de BE et PVFP pour ce scénario sont décrites dans le tableau 4.3.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 409 443 179	600 448 327	9 671 675 233	338 216 273	2,62%
0%	10 009 891 506	9 364 293 067	645 598 439	9 643 220 036	366 671 470	2,79%
500%	10 009 891 506	9 325 574 983	684 316 523	9 635 302 558	374 588 948	3,09%

TABLE 4.3 : Résultats du scénario TMG +100bps.

Les graphes du scénario sont disponibles en annexes, figure A.6.

4.2.3 Population jeune (< 33 ans)

Après avoir manipulé le niveau des garanties, il semble approprié d'essayer d'altérer la structure démographique du portefeuille. La première modification est de diminuer l'âge moyen des *model points*, afin qu'ils ne dépassent pas 33 ans.

La durée du passif augmente, car les assurés restent plus longtemps en portefeuille. Les revalorisations s'étalent alors sur une période plus longue et les flux sont plus lointains, ce qui augmente le coût des garanties par rapport au scénario initial. Le plus gros flux de BE arrive en fin de projection, car les PM s'épuisent à un rythme très lent en raison de la longévité de la population et du faible niveau de rachats. Ces phénomènes sont observables sur la figure 4.5.

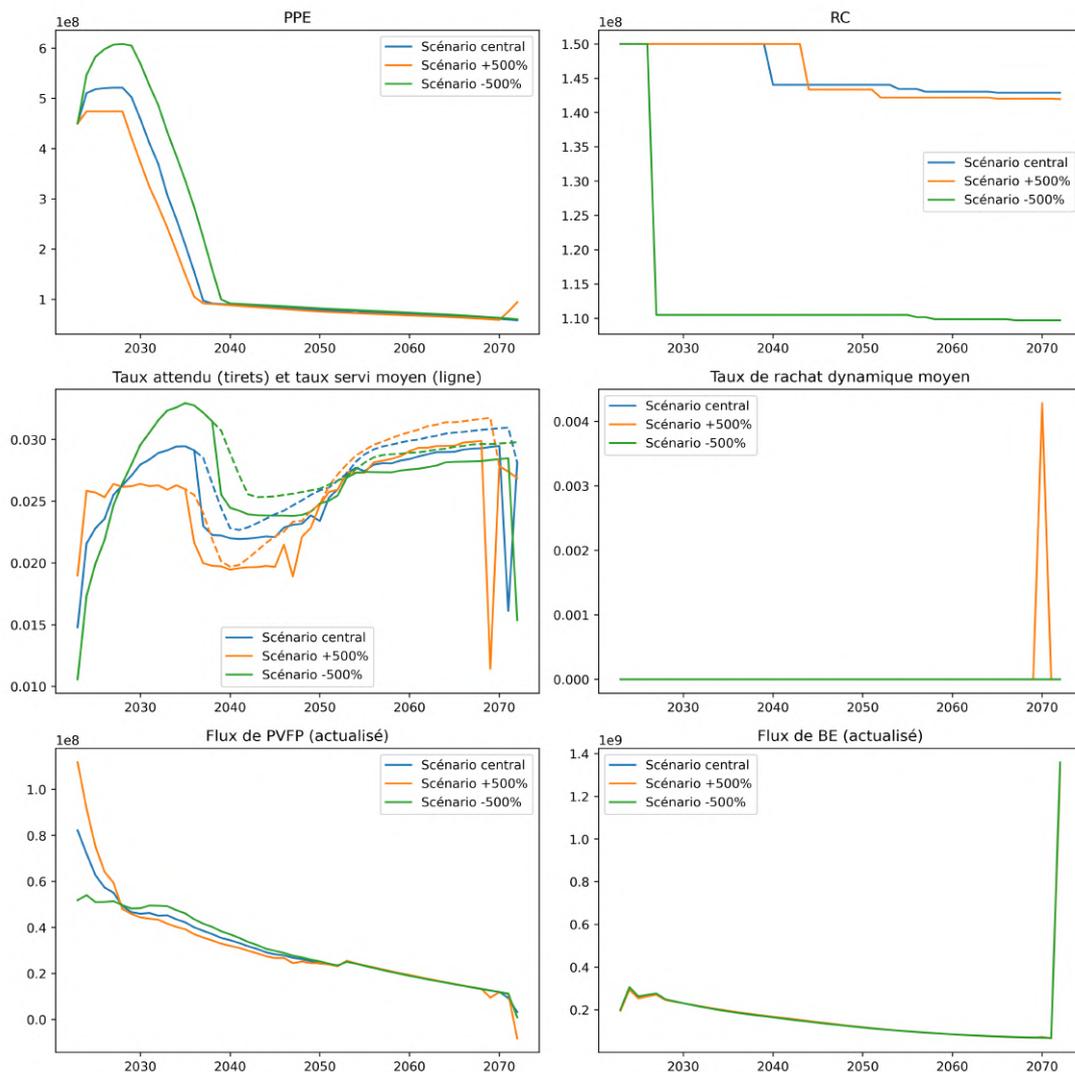


FIGURE 4.5 : Evolution déterministe du scénario à population jeune (< 33 ans).

L'assureur reçoit par ailleurs des flux financiers importants pendant plus longtemps, profitant des taux élevés et de la présence de nombreux assurés en portefeuille. La PVFP est plus élevée que pour les situations décrites jusqu'à alors, comme le montre le tableau de résultat 4.4.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	8 479 222 681	1 530 668 825	8 695 650 594	1 314 240 912	2,16%
0%	10 009 891 506	8 458 905 796	1 550 985 710	8 699 230 572	1 310 660 934	2,40%
500%	10 009 891 506	8 443 798 821	1 566 092 685	8 710 453 090	1 299 438 416	2,66%

TABLE 4.4 : Résultats du scénario à population jeune.

4.2.4 Population âgée (> 50 ans)

Le scénario symétrique du précédent est aussi considéré, en supposant une population bien plus âgée dans les *model points*. Les âges ont été augmentés pour qu'ils se situent tous **entre 50 et 105 ans**. L'effet principal est une augmentation des taux de décès dès le début de projection, donc des sorties très importantes dès 2023. L'âge moyen au 31/12/2022 des assurés (au prorata du montant total des PM) est de **87,5 ans**. Le taux de décès moyen pour l'année 2023 atteint ainsi près de 11 %, auquel s'ajoutent les rachats structurels de 2,5 %.

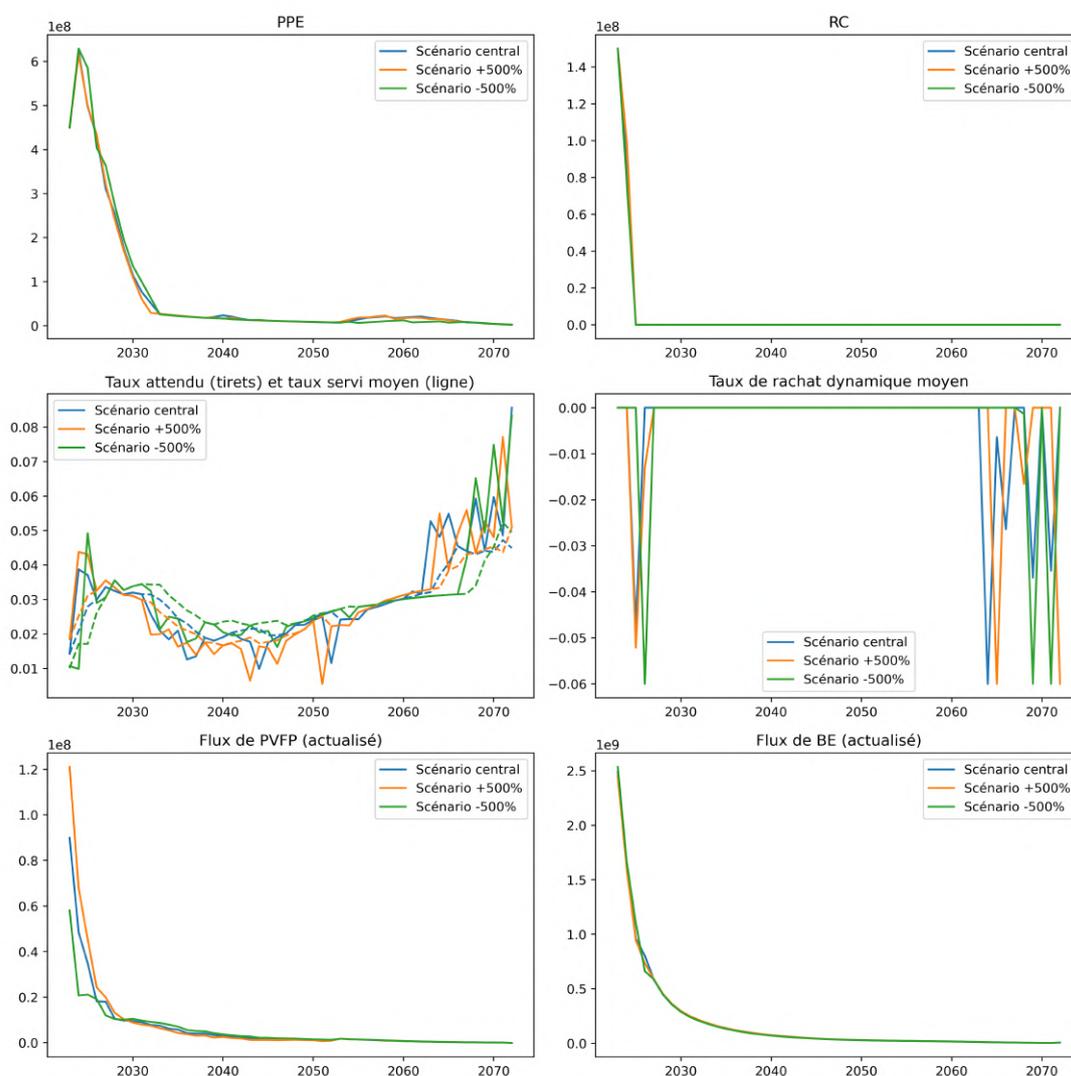


FIGURE 4.6 : Evolution déterministe du scénario à population âgée (> 50 ans).

Ce rapprochement des flux engendre une réduction de la durée du passif : les flux de *best-estimate* sont extrêmement élevés lors des 5 premières années (pour les trois courbes). La liquidation des PM en raison des taux de décès force l'assureur à vendre ses obligations en moins-value très rapidement et la réserve de capitalisation se vide en 2 années seulement. Par ailleurs, l'amenuisement des provisions force aussi la libération de la provision pour participation aux bénéficiaires, ne pouvant pas excéder 8% des PM en portefeuille. Les revalorisations réelles sont alors supérieures aux revalorisations attendues pendant les premières années en raison de cet effet, qui augmente par la même occasion le coût des garanties de l'assureur. Toutes ces évolutions sont présentées en figure 4.6.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 744 851 260	265 040 246	9 920 117 777	89 773 729	1,75%
0%	10 009 891 506	9 684 238 219	325 653 286	9 840 430 253	169 461 252	1,56%
500%	10 009 891 506	9 625 551 343	384 340 162	9 767 163 626	242 727 880	1,41%

TABLE 4.5 : Résultats du scénario à population âgée.

Les résultats de l'assureur sont très bas, comme le montre le tableau 4.5. Les garanties sont plus moins chères que dans le scénario à population jeune : les flux de sortie sont proches de l'année d'origine, où le coefficient d'actualisation est le plus faible (effet durée à la baisse). Elles restent plus élevée que pour le scénario initial : la libération de PPE augmente fortement les revalorisations effectuées sur les contrats dès le début de projection (4 à 5 %).

4.2.5 Portefeuille obligataire uniformément réparti (1 à 30 ans)

La dernière analyse d'impact effectuée sur les *model points* vise à altérer le portefeuille obligataire d'origine. En conservant la structure des obligations (valeur du taux de coupon, nominal et taux de plus ou moins-value), on fait en sorte de répartir uniformément sur les maturités 1 à 30 ans la valeur comptable de cette classe d'actifs.

La durée des obligations passe alors de 8,73 ans à 12,89 ans, et la valeur de marché totale du portefeuille diminue à 9,346 milliards d'euros, contre les 10,010 habituels. Pour conserver une base comparable, les résultats sont mis à l'échelle pour retomber sur une valeur de marché totale de 10,010 milliards d'euros, et sont présentés dans le tableau 4.6.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 388 879 129	621 012 376	9 600 611 417	409 280 089	2,12%
0%	10 009 891 506	9 402 950 035	606 941 471	9 610 830 004	399 061 502	2,08%
500%	10 009 891 506	9 429 646 105	580 245 400	9 621 756 024	388 135 482	1,92%

TABLE 4.6 : Résultats du scénario à obligations réparties uniformément.

La tendance du *best-estimate* en fonction du choc de convexité s'inverse : il est désavantageux dans ce scénario d'avoir une courbe plus convexe au début. **Le décalage de durée des obligations modifie l'horizon de réinvestissement**, ainsi que le niveau et la fréquence de tombée de coupons. Lors des premiers rachats d'obligations aux alentours de 2030 (contre 2027 dans le scénario initial), l'écart entre les taux de coupon disponibles est plus important, et influe proportionnellement plus sur les résultats. L'assureur peut espérer des taux de coupon de :

- 3,4% dans le scénario choc -500% ;
- 2,9% dans le scénario central ;

- 2,3% dans le scénario choc +500%.

Ce scénario met en lumière que **la sensibilité à une convexité à la hausse ou à la baisse dépend aussi de la structure du portefeuille obligataire. En fonction de la durée de son actif et celle de son passif, l'assureur n'est ainsi pas exposé au même risque.**

Les graphes du scénario sont disponibles en annexes, figure A.7.

Remarque : Dans les deux dernières situations, on observe une inversion du sens d'évolution de la TVOG en fonction du choc de convexité. Dans ces deux cas de figure, **l'ordre des durations de l'actif et du passif a été inversé.**

4.3 Influence du modèle

La première phase de l'analyse des scénarios a porté sur l'étude des impacts découlant de la variation des *model points*. L'objectif est maintenant d'analyser le comportement du modèle par rapport à la convexité dans des scénarios où la définition des taux attendus (taux *benchmark*) ou de la fonction de rachats dynamique serait modifiée.

4.3.1 Augmentation de la sensibilité du taux attendu

Le taux attendu est défini au sein du modèle comme une somme pondérée de 3 éléments : la moyenne des taux servis des 3 années précédentes, le taux de marché à 1 an et le taux de marché à 10 ans. Les poids α , β et γ de la fonction (2.17) permettent à l'utilisateur du modèle ALM de configurer la sensibilité du taux attendu à ces 3 variables.

Pour rendre les assurés extrêmement sensibles à la fois à leur taux servi passé et aux taux de marché, la définition du taux attendu a été remplacée par la formule 4.1.

$$\text{Taux attendu} = \max \{ \text{Taux moyen servi (3 ans)}; r_1; r_{10} \} \quad (4.1)$$

Définir le taux attendu de cette manière n'est pas représentatif de la réalité, mais permet de mettre en lumière le comportement de l'assureur dans une situation où il serait nécessaire d'atteindre un niveau de revalorisation continuellement élevé sur l'ensemble des contrats. Les deux mécanismes permettant d'augmenter les revalorisations sont **la libération de PPE** et **la réalisation des plus-values latentes** (dans la limite des stocks disponibles et des seuils configurés).

Le troisième graphique de la figure 4.7 permet d'observer le phénomène : les taux attendus sont très élevés (en pointillés), et l'assureur arrive à respecter les demandes des assurés uniquement pendant les quelques premières années.

Le modèle essaye de maintenir les taux de revalorisation des assurés, entraînant la liquidation rapide de la PPE (graphique 1). Par ailleurs, l'instabilité de la rémunération des contrats conduits à quelques rachats dynamiques (graphique 4), mais qui restent contenus. En environnement stochastique, en prime, ils risquent d'être activés encore plus fréquemment. On s'attend alors à une explosion du coût des garanties pour l'assureur.

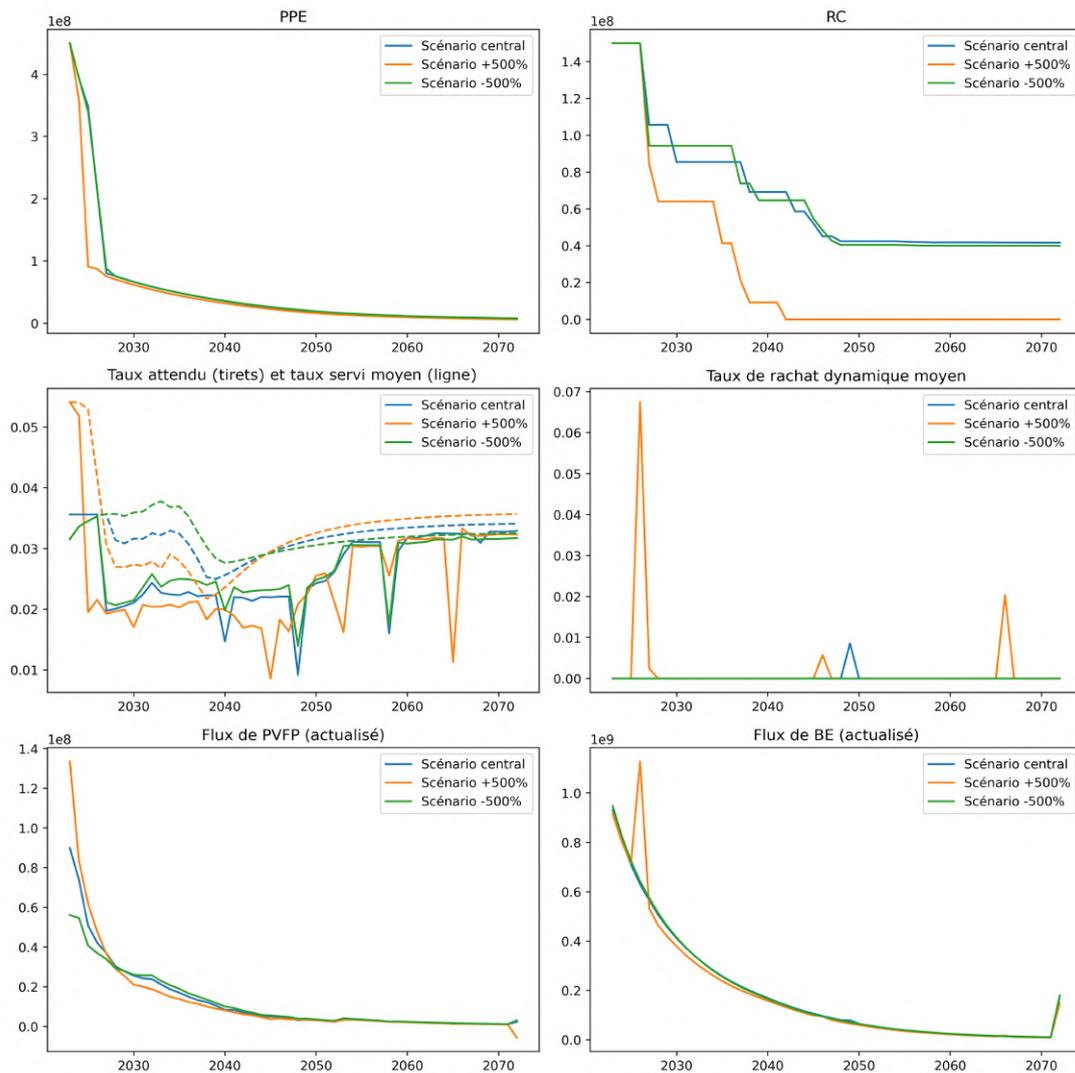


FIGURE 4.7 : Evolution déterministe du scénario à taux attendu plus sensible.

La modification de la définition du taux attendu augmente effectivement fortement la valeur de la TVOG, comme le montre le tableau 4.7 : pour la courbe centrale, on passe d'un taux de 1,37% pour le scénario initial, à 3,90% ici. Les demandes des assurés sont plus fortes, provoquant un **effet de revalorisation à la hausse**, mais aussi un **effet rachat** lorsque les taux servis sont trop faibles.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 412 220 996	597 670 509	9 864 252 137	145 639 369	4,52%
0%	10 009 891 506	9 365 238 666	644 652 840	9 790 497 215	219 394 290	4,25%
500%	10 009 891 506	9 317 433 328	692 458 177	9 751 620 533	258 270 972	4,34%

TABLE 4.7 : Résultats du scénario à taux attendu plus sensible.

4.3.2 Augmentation de la sensibilité de la fonction de rachats dynamiques

La fonction de rachats structurels (2.6) réglementaire a été configurée avec des seuils relativement peu contraignants : la moyenne des plafonds minimums et maximums de la fonction préconisés par

l'ACPR dans ses ONC de 2013 (et 2% pour le seuil d'activation des rachats). Pour augmenter la sensibilité des rachats, les paramètres maximaux ont été appliqués, à savoir :

- $\alpha = -4\%$: si l'écart entre taux attendu et taux servi est supérieur à 4%, alors le taux de rachat dynamique sera de $RC_{max} = 40\%$;
- $\beta = 0\%$: les rachats commencent dès lors que le taux attendu est supérieur au taux servi ;
- $\delta = 4\%$ et $RC_{min} = -4\%$: les rachats négatifs, en cas de sur-performance des contrats, ne s'activent que si le taux servi est 4 points au-dessus de l'attendu. La valeur de ces rachats négatifs ne peut dépasser -4%.

Les résultats déterministes sont identiques à situation centrale, sauf pour la courbe choquée à -500%, car quelques rachats conjoncturels s'activent (voir la figure A.8). Les effets du changement de paramètres ne se remarquent qu'en situation stochastique : les rachats s'activent plus fréquemment et l'assureur doit alors payer les sorties et vendre des actifs en potentielle moins-value pour respecter ses engagements. **Le coût des options augmente alors, en comparaison avec le scénario central.** Les résultats sont disponibles dans le tableau 4.8.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 421 528 082	588 363 424	9 733 655 955	276 235 551	3,12%
0%	10 009 891 506	9 359 310 762	650 580 744	9 691 736 754	318 154 751	3,32%
500%	10 009 891 506	9 316 996 699	692 894 807	9 656 115 345	353 776 160	3,39%

TABLE 4.8 : Résultats du scénario à rachats dynamiques plus sensibles.

Les graphes du scénario sont disponibles en annexes, figure A.8.

4.3.3 Augmentation de la sensibilité du taux attendu et des rachats dynamiques

La dernière situation étudiée est l'association des deux modifications précédentes :

- La définition du taux attendu avec la formule (4.1) ;
- L'augmentation des paramètres de la fonction de rachats conjoncturels au maximum possible.

Le mélange de ces deux configurations de modèle accentue d'autant plus la sensibilité des assurés aux rachats : ils attendent des revalorisations très au-delà des performances possibles de l'assureur, et réagissent instantanément à cette impossibilité de recevoir le taux demandé.

Le comportement peut être directement observé sur les graphes présentés dans la figure 4.8 :

1. La provision pour participation aux bénéfices s'épuise très rapidement pour essayer de satisfaire les demandes de revalorisation des assurés.
2. Les taux demandés n'étant pas atteints, des rachats conjoncturels se déclenchent à partir de 2026 pour la courbe 500% et 2028 pour les deux autres.
3. Les rachats entraînent un besoin fort de liquidités. L'assureur doit alors vendre ses obligations en moins-value : la réserve de capitalisation s'épuise.
4. La RC étant vidée, l'impact des ventes d'obligations en moins-value se répercute sur les assurés : les taux de revalorisation chutent davantage et les taux rachats explosent.

5. A partir de 2052, le portefeuille obligataire initial est épuisé : les taux de revalorisation progressent, mais la sensibilité des assurés engendre toujours quelques rachats d'une année sur l'autre.

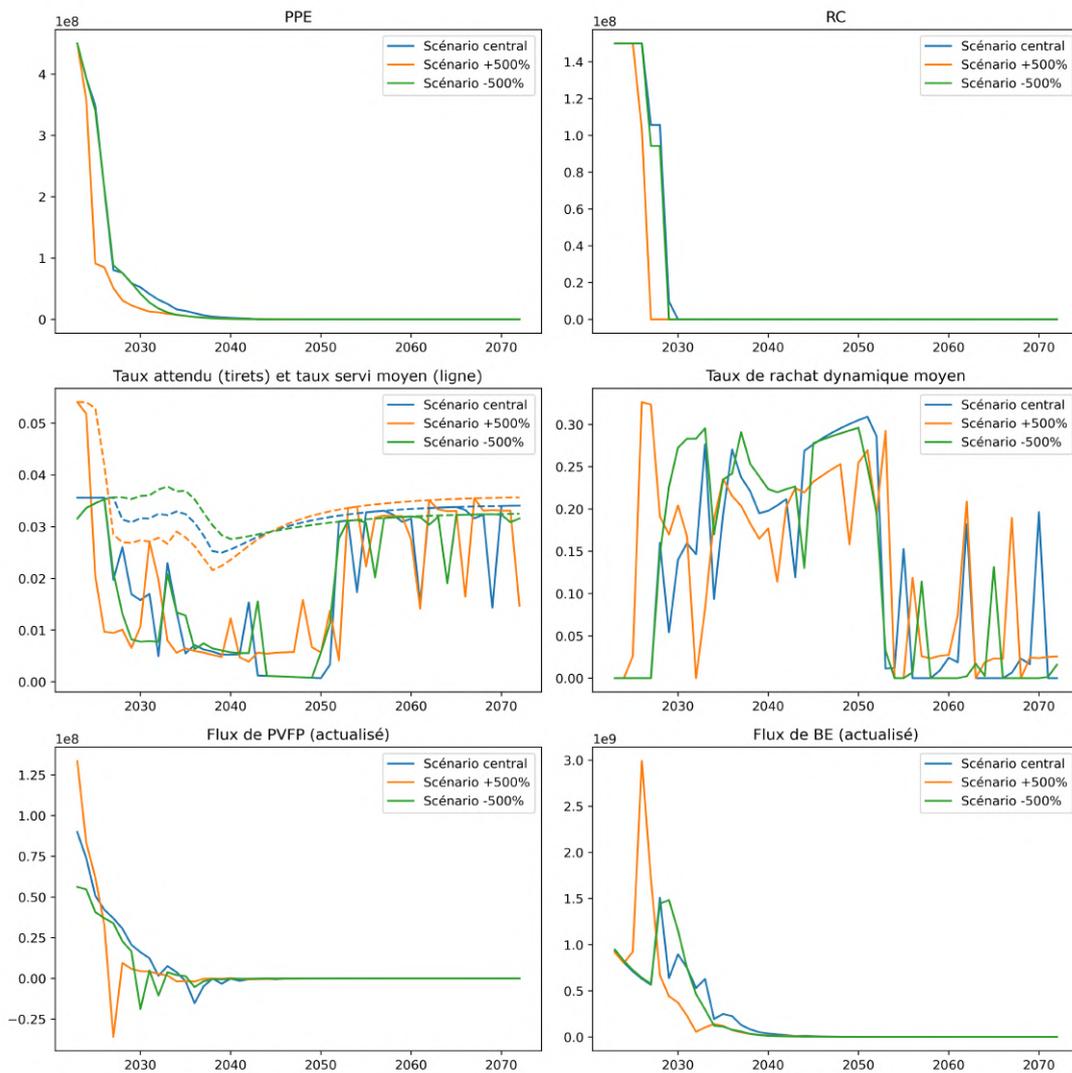


FIGURE 4.8 : Evolution déterministe du scénario à taux attendu et rachats dynamiques plus sensibles.

Le scénario de choc à 500% est davantage sensible dans cette configuration. En effet, en raison de la convexité de la courbe, les taux attendus sont extrêmement élevés en début de projection, ce qui accélère d'autant plus la liquidation de la PPE et de la RC.

Cela se remarque aussi sur le coût des options et garanties de l'assureur, en raison de la combinaison de revalorisations fortes et de rachats excessifs. Ces résultats sont disponibles dans le tableau 4.9.

Type	VM0	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG
-500%	10 009 891 506	9 760 016 683	249 874 823	10 240 289 140	-230 397 634	8,18%
0%	10 009 891 506	9 548 377 678	461 513 828	10 117 225 885	-107 334 379	7,57%
500%	10 009 891 506	9 474 568 953	535 322 553	10 054 681 660	-44 790 154	7,37%

TABLE 4.9 : Résultats du scénario à taux attendu et rachats dynamiques plus sensibles.

Les résultats sur les scénarios de sensibilité montrent que la convexité agit différemment en fonction des assureurs ou de la configuration du modèle. La section suivante se focalisera davantage sur une comparaison détaillée entre ces scénarios, dans le but de localiser ceux les plus sensibles à la convexité.

4.4 Synthèse des résultats et analyse d'indicateurs

La section précédente a généré une quantité significative de données dont l'analyse est approfondie dans cette partie. On envisage plusieurs axes d'exploration :

- **Au sein d'un même scénario**, il est possible de regarder :
 - Le BE et la PVFP déterministe de l'assureur.
 - Le BE et la PVFP stochastique, calculés comme la moyenne Monte Carlo des résultats ALM sur 1000 tables de GSE (pour chaque courbe).
 - Le coût des options et garanties, calculé comme la différence entre le BE stochastique et le BE déterministe.
 - Le taux de TVOG, déterminé comme le ratio entre le montant de la TVOG et la valeur de marché initiale (VM_0).
- **Entre les différents scénarios, à courbe constante (-500%, 0% ou +500%)**, on peut observer :
 - Les situations les plus favorables ou défavorables pour l'assureur, en utilisant l'approche déterministe ou stochastique.
 - L'évolution du coût des garanties (TVOG ou taux de TVOG) entre les divers scénarios.
 - Un indicateur de sensibilité qui a été élaboré et qui sera détaillé prochainement.

L'ensemble des résultats de la partie précédentes ont été agrégés dans le tableau A.9, disponible en annexe.

4.4.1 Comparaison de la répartition des richesses entre assureur et assurés



FIGURE 4.9 : Répartition de la richesse entre assureurs et assurés pour les 9 scénarios testés (cas déterministe). Les 3 blocs correspondent respectivement à la courbe choquée à -500%, 0% et 500%.

La figure 4.9 représente la répartition de la richesse entre l'assureur (PVFP) et les assurés (BE) pour les différentes situations expérimentées dans la partie précédente. Les résultats sont séparés en trois groupes, pour la courbe à -500%, à 0% et 500% de choc de convexité (respectivement en haut, au milieu et en bas).

En déterministe, la plupart des situations n'ont pas d'impact fort sur le *best-estimate* en comparaison avec le scénario central. Deux cas de figure ressortent pourtant :

- Le scénario "Population âgée", pour lequel l'engagement de l'assureur est plus fort ;
- Le scénario opposé, "Population jeune" qui lui profite à l'assureur.

Ces observations sont visibles sur les trois courbes, même si globalement, les BE sont plus élevés sur la courbe concave (-500%) et plus faibles sur la courbe convexe (+500%). Le report des flux de sortie entraîne une baisse significative du *best estimate*.

Sous environnement stochastique, les résultats changent, en majorité à cause de l'activation des **rachats conjoncturels**. Le mécanisme de **participation aux bénéfices**, fortement dépendant du contexte économique, participe aussi à l'altération de la répartition des richesses. Les diagrammes de la figure 4.10 présentent ces résultats.

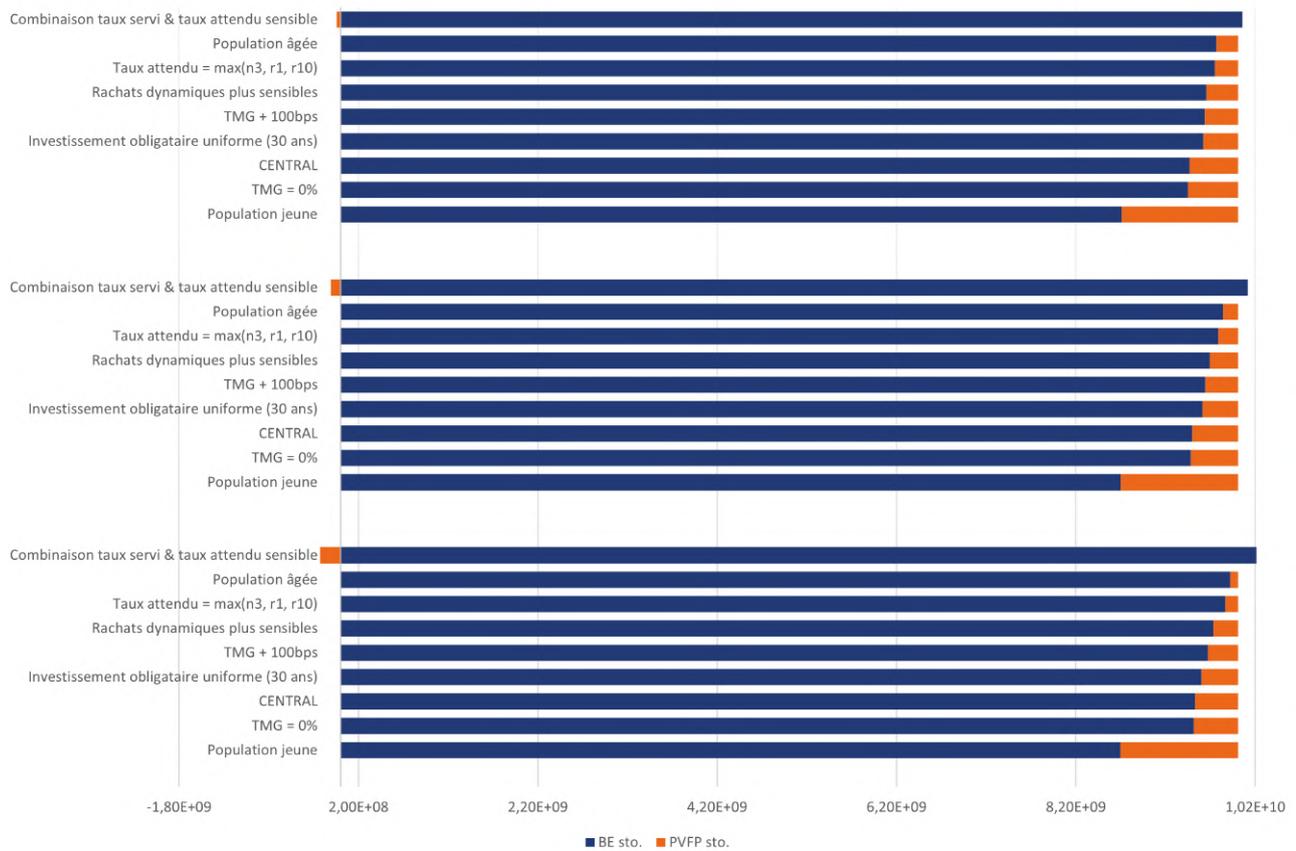


FIGURE 4.10 : Répartition de la richesse entre assureurs et assurés pour les 9 scénarios testés (cas stochastique). Les 3 blocs correspondent respectivement à la courbe choquée à -500%, 0% et 500%.

L'ordre des scénarios, du moins au plus avantageux pour l'assureur, est identique pour les trois courbes utilisées. La configuration la plus profitable à l'assureur demeure celle où la population est très jeune. En excluant le scénario "population âgée", **ce sont les situations dans lesquelles la définition du taux attendu ou du mécanisme de rachats dynamiques ont été modifié qui impactent le plus défavorablement l'assureur.** Ce sont les configurations pour lesquelles les flux de sorties sont les plus rapprochés de la date de projection initiale.

4.4.2 Comparaison de la PVFP déterministe et stochastique entre les courbes et les situations

La figure 4.11 présente le montant de PVFP que l'assureur peut espérer dans chacune des situations. Le passage du calcul déterministe au calcul stochastique réduit naturellement la valeur de la richesse de l'assureur, par l'activation des options asymétriques du passif. Ce delta correspond au coût des garanties des contrats (TVOG), dont le pourcentage par rapport à la valeur de marché initiale du portefeuille est représenté sur le graphe 4.12. Certains scénarios sont plus sensibles à cette transition. Lorsque la configuration prend en compte une sensibilité accrue du taux attendu et du taux de rachat conjoncturel, la richesse est parfois même négative.

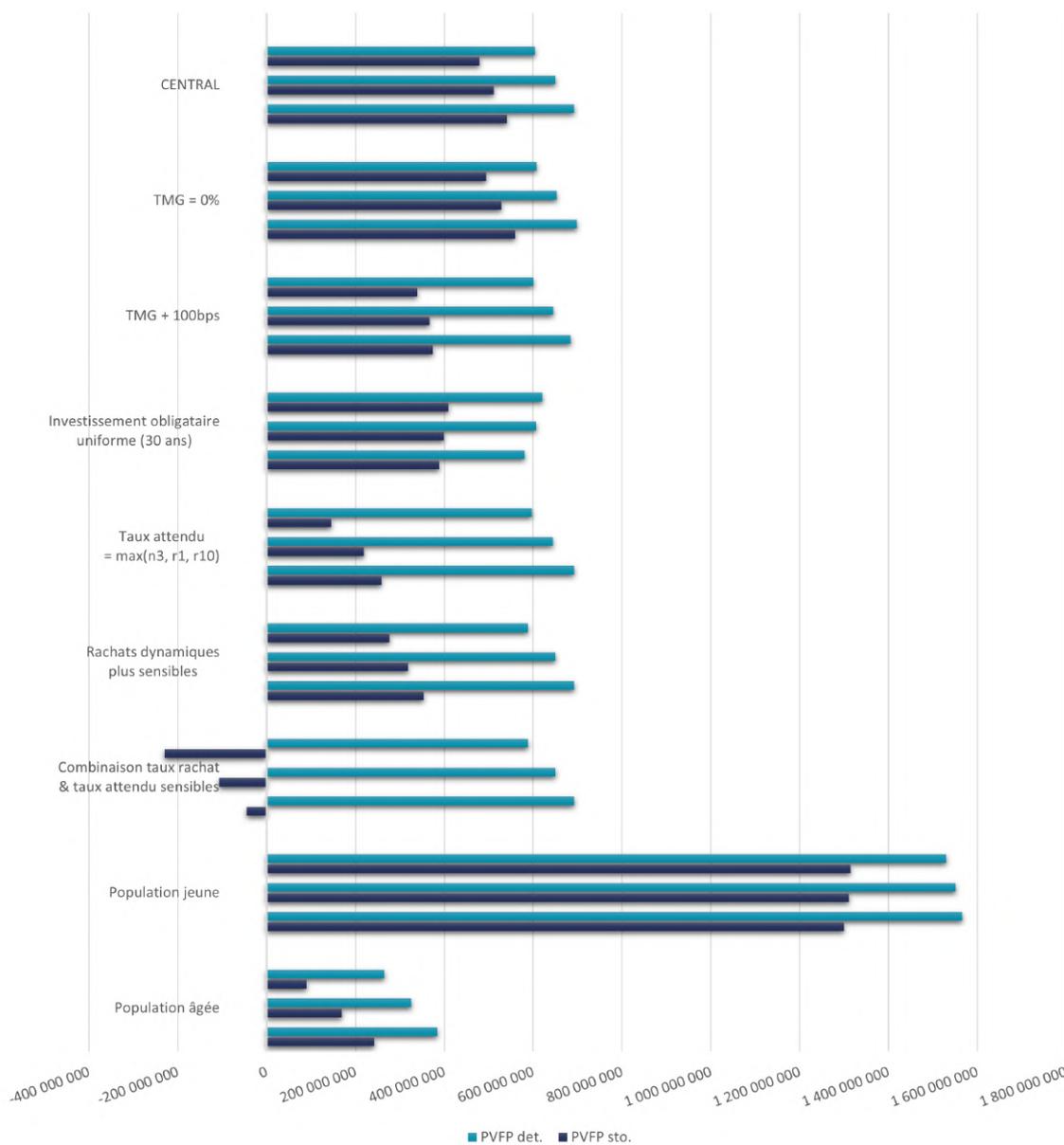


FIGURE 4.11 : PVFP déterministe et stochastique pour les 9 scénarios testés. Les 3 barres correspondent pour chaque situation à la courbe choquée à -500%, 0% et 500%.

Le taux de TVOG est généralement croissant par rapport au choc de convexité, à l'exception de trois scénarios particuliers :

1. lorsque la composition du portefeuille obligataire est modifiée ;
2. lorsque la sensibilité au marché est accrue (taux attendu modifié) ;
3. lorsque la population du portefeuille est âgée.

Ce phénomène semble donc se produire **lorsque la durée de l'actif s'allonge par rapport à celle du passif.**

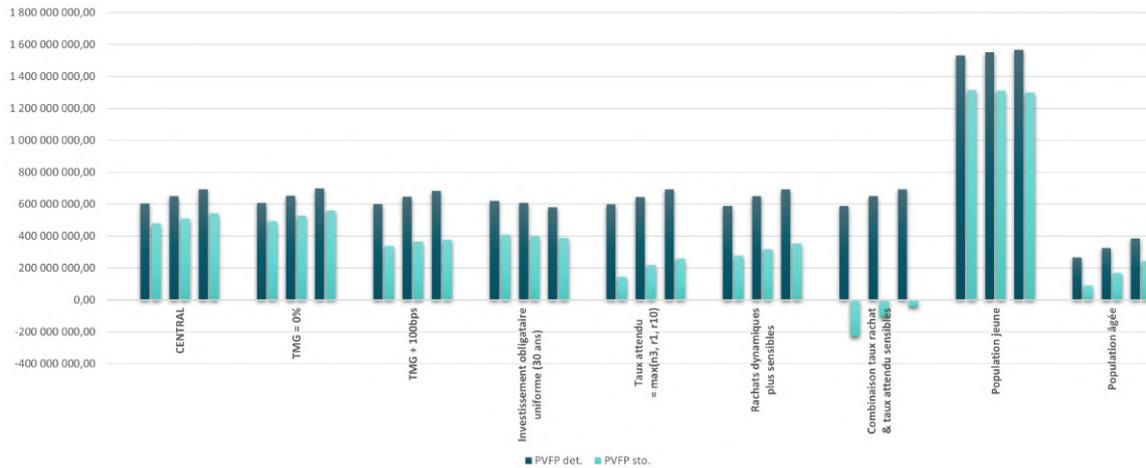


FIGURE 4.12 : Taux de TVOG par situation et par courbe. Les 3 barres correspondent pour chaque situation à la courbe choquée à -500%, 0% et 500%.

4.4.3 Un indicateur pour la sensibilité

La dernière étape de l'analyse consiste à construire une métrique permettant de mesurer l'importance de la convexité sur les résultats de l'assureur, en fonction des configurations précédentes. L'objectif de cet indicateur est de quantifier la variation de PVFP entre les deux courbes présentant les chocs de convexité les plus extrêmes (-500% et +500%). Il est calculé avec la formule

$$\text{Indicateur}_x = \frac{PVFP_x^{\text{sto.}, +500\%} - PVFP_x^{\text{sto.}, -500\%}}{VM_0}, \quad (4.2)$$

et peut être interprété comme le *delta* de richesse disponible entre le scénario présentant le choc extrême le plus élevé et celui présentant le choc extrême le plus bas. **Un indicateur plus élevé (en valeur absolue) signifie ainsi un plus grand effet de la convexité sur le résultat de l'assureur, donc une sensibilité accrue à cet aspect économique.** L'indicateur 4.2 est déterminé pour l'ensemble des 9 scénarios. La figure 4.13 présente son niveau pour chacun d'entre eux.

L'assureur est ainsi sensible à la convexité initiale de la courbe dans les situations suivantes :

- Lorsque les taux attendus et/ou les taux de rachats sont plus sensibles ;
- Lorsque la population est âgée.

Dans les deux cas, les flux sortent tôt (rachats et décès) et l'effet des taux courts est d'autant plus important, à la fois sur la revalorisation des contrats, le montant de résultat financier que l'assureur peut se servir et l'actualisation.

A l'inverse, **lorsque les TMG augmentent, par exemple, la sensibilité décroît.** L'assureur a en effet moins de marge de manœuvre sur la distribution des performances financières. Il sert les taux contractuels, et le montant restant au-delà de ce paiement est plus faible que si les TMG étaient plus bas.

Enfin, **un assureur dont la population est jeune est aussi très peu sensible à la convexité,** car les flux sont plus éloignés et moins influencés par les taux courts.

Pour clôturer de cette section, plusieurs points méritent d'être relevés :

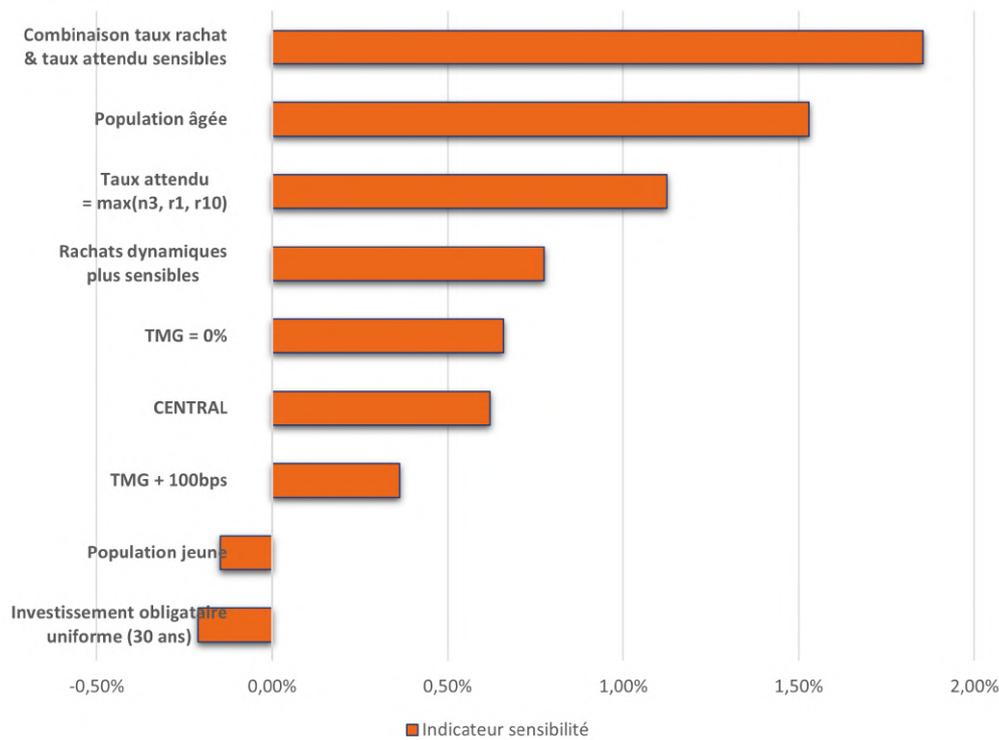


FIGURE 4.13 : Indicateurs de sensibilité du résultat à la convexité des taux.

- Le *best-estimate* est décroissant en fonction du choc de convexité, sauf pour la situation de choc sur le portefeuille obligataire.
- Le sens de variation de la TVOG en fonction du choc de convexité dépend de la durée des flux. Le coût des garanties est croissant lorsque la durée du passif excède celle de l'actif, et inversement.
- Le taux de TVOG augmente lorsque les flux de *best-estimate* dépendent fortement des conditions de marché (taux attendu, rachats), lorsque les flux sont plus proches du début de projection (population âgée), ou lorsque les garanties sont supérieures (TMG + 100bps).
- La sensibilité du résultat à la convexité de la courbe est plus prononcée lorsque le modèle accorde une plus grande importance aux demandes des assurés et décide de leur attribuer des taux plus élevés (taux attendu, rachats).

Le tableau 4.11 récapitule les différents effets étudiés dans ce chapitre.

Nom du scénario de sensibilité	PVFP det.	PVFP sto.	Sens PVFP sto. (p.r. convexité)	Effet TVOG	Sens TVOG (p.r. convexité)	Indicateur de sensibilité
CENTRAL	=	=	↗	=	↗	=
TMG = 0%	≈	≈	↗	-	↗	≈
TMG + 100bps	≈	-	↗	++	↗	-
Investissement obligatoire uniforme	-	-	↘	+	↘	--
Taux attendu = max(n3, r1, r10)	≈	--	↗	+++	↘↗	++
Rachats dynamiques plus sensibles	≈	-	↗	++	↗	+
Combinaison des 2 scénarios précédents	≈	---	↗	++++	↘	++++
Population jeune	+++	+++	↘	++	↗	--
Population âgée	--	--	↗	+	↘	+++

TABLE 4.10 : Effets des scénarios sur la PVFP, la TVOG et l'indicateur de sensibilité (par rapport à la situation centrale).

Solvabilité du scénario le plus sensible et le moins sensible

Les calculs précédents permettent de déterminer quels sont les situations de sensibilité pour lesquelles la convexité a le plus ou le moins d'influence.

Le scénario "jeune" est le moins sensible. Le scénario de sensibilité accrue du modèle au marché est le plus sensible.

Le tableau 4.11 présente les ratios de solvabilité et quatre sensibilités pour ces configurations :

- Sensi 1 : Variation du ratio de la courbe -500% ou +500% par rapport à la courbe centrale ;
- Sensi 2 : Nombre de points de ratio latents entre les courbes à -500% ou +500% ;
- Sensi 3 : Ecart moyen de variation du ratio (en valeur absolue) ;
- Sensi 4 : Pourcentage de variation de la sensi 3, par rapport au scénario central.

Scénario	PVFP	Market SCR	Ratio proxy	Sensi 1	Sensi 2	Sensi 3	Sensi 4
Central -500%	479 335 563	274 742 621	174,47%	-2,89%			
Central 0%	511 662 540	284 805 232	179,65%	0,00%	20,67%	5,75%	0,00%
Central +500%	541 492 734	277 500 217	195,13%	8,62%			
Jeune -500%	1 314 240 912	441 150 463	297,91%	2,66%			
Jeune 0%	1 310 660 934	451 671 332	290,18%	0,00%	10,05%	1,73%	-69,90%
Jeune 500%	1 299 438 416	451 407 816	287,86%	-0,80%			
Sensi modèle -500%	-230 397 634	563 450 567	-40,89%	94,33%			
Sensi modèle 0%	-107 334 379	510 096 829	-21,04%	0,00%	31,13%	73,98%	1186,31%
Sensi modèle 500%	-44 790 154	459 084 895	-9,76%	-53,63%			

TABLE 4.11 : Métriques de solvabilité pour les scénarios les plus et les moins à risque face à la convexité.

Toutes les métriques évaluées confirment bien les analyses de sensibilité de ce chapitre.

Conclusion

Les résultats de l'assureur peuvent être perturbés à **divers niveaux de la modélisation**, ce qui contribue à la complexité intrinsèque de la gestion actif-passif. Elle découle de la **multitude de problématiques qui entrent en jeu et qui varient en fonction de la structure de l'actif, du passif ou du modèle**.

Il est incontestable que la modélisation des décisions au sein de l'outil, comme les mécanismes de revalorisation et de gestion de la provision pour participation aux bénéficiaires, joue un rôle crucial dans ce contexte. Par conséquent, pour analyser avec précision les fluctuations des résultats, il est impératif de posséder une connaissance approfondie et une compréhension complète du fonctionnement du modèle en usage, comme il est important de connaître la structure de l'actif et du passif.

4.5 Perspectives d'approfondissement

L'étude présentée dans ce mémoire se focalise principalement sur les implications de la convexité des taux sur les résultats des assureurs. L'objectif principal était de mettre en évidence la nécessité de comprendre les mécanismes ALM sous-jacents aux modèles, afin de permettre à n'importe qui de saisir l'origine de sa sensibilité, notamment dans le contexte actuel de hausse de convexité des taux.

4.5.1 Un cadre restreint

Il est important de rappeler que cette étude demeure essentiellement théorique et expérimentale, et que les outils développés ont été spécifiquement créés pour les besoins de cette analyse. Ils ne possèdent donc ni la profondeur ni la complexité des solutions employées dans la réalité par les compagnies d'assurance.

De plus, cette étude se concentre exclusivement sur les fonds euros, car ils représentent une des catégories de contrats les plus coûteuses pour les assureurs, en raison notamment de la présence d'options asymétriques (TMG, PB). Toutefois, dans un contexte réel, une compagnie est susceptible de gérer une multitude de produits, tels que des contrats multisupports, des produits liés à la retraite, et d'autres encore. Certains des effets relevés en relation avec la convexité pourraient s'équilibrer dans une configuration où l'assureur serait détenteur d'un large éventail de produits. La granularité de la modélisation n'est aussi pas à négliger.

Il convient donc de souligner que le cadre de cette étude demeure limité, et que les résultats obtenus sont spécifiques à ce contexte particulier.

4.5.2 Des stratégies de couverture face à la convexité des taux ?

Un assureur s'efforce toujours de se prémunir contre ses risques, et le risque financier lié à la convexité des taux ne fait pas exception à cette règle. Les professionnels de l'ALM sont continuellement engagés dans la **recherche des phénomènes indésirables associés à la modélisation des flux**. En collaboration avec toutes les autres branches d'activité de l'assurance, ils cherchent les meilleures solutions pour réduire l'exposition de l'assureur aux risques tout en optimisant l'efficacité opérationnelle afin de maximiser les profits potentiels.

Management actions

Les **management actions** sont des mesures prises par la direction d'une compagnie d'assurance en réaction à des situations défavorables ou à des risques financiers. Ces actions visent à

maintenir la stabilité financière, à minimiser les impacts négatifs et à assurer la pérennité de l'entreprise. Les *management actions* peuvent prendre la forme d'ajustements dans la **gestion des actifs**, de **décisions stratégiques**, de **révisions de politiques ou de réassurance**, de **modifications tarifaires**, ou de **toute autre action nécessaire pour gérer les risques et préserver la solvabilité de la compagnie**.

Ces décisions de gestion doivent être incorporées au modèle ALM lorsque les projections sont effectuées, pour refléter la réalité de l'entreprise à travers la modélisation.

Parmi les *management actions* mises en place dans le modèle, on retrouve par exemple les stratégies d'allocation d'actifs, les ajustements dans la revalorisation des contrats des assurés et la gestion de la provision pour participation aux bénéficiaires. **Ces décisions de modélisation ont un impact significatif sur le déroulement de la projection ALM.** Elles peuvent être ajustées, supprimées ou complétées tant qu'elles sont en cohérence avec la stratégie de l'assureur et les exigences réglementaires (Solvabilité II). Elles se présentent ainsi comme des moyens potentiels pour se protéger contre les effets de la convexité des taux : changer les décisions d'investissement ou les choix de revalorisation peut permettre d'optimiser les résultats ALM de l'assureur dans un contexte économique sous tension.

Interpréter le best-estimate comme un produit financier liquide ?

Le risque de convexité des taux demeure étroitement lié au risque de taux "classique" : l'assureur peut être sensible à la fois à une augmentation et à une diminution des taux d'intérêt, en fonction du *gap de duration*, et il cherchera à se protéger contre ces variations. En matière de couverture de risque financier, le secteur bancaire se place en première ligne où les stratégies de *hedging* sont développées depuis longtemps.

Le *hedging* consiste à **prendre des positions financières qui compensent les pertes potentielles sur d'autres investissements**. Par exemple, un investisseur peut acheter un contrat à terme pour se protéger contre la baisse du prix d'un actif qu'il détient déjà. Le but est de **réduire ou éliminer l'exposition aux fluctuations des marchés financiers**, ce qui permet de minimiser les pertes potentielles et de stabiliser les flux de trésorerie.

Le *hedging* est largement utilisé en banque grâce à des outils comme les "grecques", qui sont des **mesures de sensibilité aux variations des prix d'actifs financiers**. Ces grecques, dont les plus courantes sont *Delta*, *Gamma*, *Vega*, *Theta* et *Rho*, sont essentielles pour évaluer et gérer les risques associés aux options et aux produits dérivés.

Peut-on alors établir un parallèle entre les stratégies de couverture dans le secteur bancaire et le secteur de l'assurance, pour se prémunir de la convexité ?

Les passifs d'assurance présentent des complexités particulières qui rendent **l'utilisation des grecques moins appropriée**. Ces complexités incluent le **manque de liquidité des passifs**, la **complexité des produits d'assurance**, les **horizons à long terme**, **l'incertitude des taux d'intérêt** et la **corrélation des risques**. Les grecques, conçues pour des actifs liquides et standardisés, peuvent être inadéquates pour évaluer et gérer efficacement les passifs d'assurance.

En outre, les grecques sont calculées sous forme de dérivées. Leur utilisation en assurance suppose donc que le *best-estimate* est dérivable par rapport aux facteurs de risque pris en compte. Cette approche suscite un intérêt particulier et mériterait donc une étude plus approfondie.

4.5.3 Extensions de l'étude

En raison des limites évoquées précédemment, à la fois sur les modèles et les hypothèses utilisées, l'analyse pourrait être prolongée sur différents points.

Ajout des contrats UC et multi-support, arbitrages, rachats dynamiques

Une extension du modèle ALM actuel est en cours afin d'ajouter les éléments mentionnés. Une prolongation de l'étude sur un éventail de produits d'épargne et de retraite permettrait aussi d'affiner l'analyse.

Ajout de complexité sur le GSE

Les limites du générateur de scénario économique ont déjà été exposées à la fin du chapitre II. Néanmoins, il est essentiel de ne pas sous-estimer l'importance du GSE. Même si le modèle Hull White reproduit de manière adéquate la structure par terme des taux initiale, il demeure relativement simple. L'introduction de corrélations et de volatilité dynamique pourrait avoir un impact sur les résultats. De plus, l'intégration d'un modèle inflationniste, en lien avec les conditions du marché actuelles, permettrait de prendre en compte l'ensemble du contexte économique.

Risque de *spread*, optimisation de portefeuille

Le portefeuille actif de l'assureur fictif élaboré se compose exclusivement d'obligations triple A, sans risque de *spread*. Une piste à explorer serait l'intégration de notations obligataires, y compris une notation variable en fonction des taux (par exemple, en tenant compte de la variation de la convexité). L'ajout des *spread* permettrait aussi d'ajouter le sous-module associé dans le calcul du SCR marché, ce qui affinerait l'analyse.

New business et IFRS17

Sous solvabilité II, il est supposé un portefeuille en *run-off*, qui signifie qu'aucun nouveau contrat n'est ajouté au cours de la projection, et aucun versement libre n'est modélisé. Une analyse par rapport à cette nouvelle norme pourrait fournir une perspective différente sur l'effet de la convexité.

Analyse financière plus poussée du *best-estimate*

Le *best-estimate* n'est pas un produit liquide. Pourtant, en considérant le choc de convexité comme un facteur de variation majeur auquel il convient de se prémunir, la mise en œuvre de stratégies de couverture par le biais de *management actions* ou d'achats de produits financiers dérivés (comme les *swaptions*, par exemple), pourrait donner lieu à une analyse similaire à celle effectuée en banque avec les grecques.

Conclusion du chapitre

Le quatrième chapitre s'est concentré principalement sur une étude de la sensibilité du modèle et des résultats face à trois scénarios de taux : une hypothèse centrale correspondant à la courbe EIOPA de 2022 ; une situation convexe avec des taux courts très élevés ; et une situation concave avec des taux courts faibles.

Les résultats dépendent fortement des hypothèses de modélisation, notamment du portefeuille et de la calibration des paramètres. L'analyse des différentes situations a en effet mis en valeur l'importance de la définition du taux attendu et du paramétrage de la fonction de rachats conjoncturels. Avoir une population jeune restant plus longtemps en portefeuille, ou vieillissante sortant rapidement, modifie aussi la vitesse d'écoulement des flux et la rétention des assurés par l'entreprise. Tous ces aspects participent à la modification de la durée de l'actif et du passif de l'assureur, et par conséquent à la création d'un gap positif ou négatif, auquel il est plus ou moins sensible en fonction de la convexité des taux.

Une tendance semble se dessiner parmi les différents cas traités. L'assureur peut initialement profiter des taux d'intérêt élevés en situation convexe, lui permettant d'obtenir des résultats plus favorables au cours des premières années de projection. Cependant, il doit également faire face à un risque significatif lié aux rachats, en particulier lorsque les assurés réagissent aux fluctuations des marchés et à la concurrence. **La sensibilité de la richesse de l'assureur à la convexité de la courbe est d'autant plus marquée que sa vulnérabilité aux rachats est élevée.**

Conclusion

Dans le cadre de cette étude, nous avons examiné l'impact de la convexité des taux d'intérêt sur les compagnies d'assurance-vie, en particulier sur les fonds Euro et dans un contexte économique caractérisé par une remontée des taux et une inflation soutenue. Notre objectif était de comprendre comment l'inversion de la courbe des taux pouvait influencer les modèles et les outils de modélisation utilisés par les assureurs pour gérer leurs engagements et évaluer leur solvabilité.

Nos résultats ont révélé plusieurs conclusions importantes. L'effet de la convexité des taux se traduit par une augmentation significative des taux d'intérêt à court terme, ayant pour conséquence d'accroître les revenus des compagnies d'assurance-vie au cours des premières années de projection. Cependant, cette augmentation de convexité risque d'entraîner des attentes accrues de la part des assurés en ce qui concerne la revalorisation de leurs contrats en début de projection, tout en diminuant les perspectives de réinvestissement de l'assureur à mi-chemin du développement ALM.

Il est essentiel de noter que ces résultats sont basés sur un modèle restreint, et leur généralisation doit être abordée avec prudence. Nos études de sensibilité ont mis en évidence l'importance de certains paramètres du modèle, notamment la structure initiale de l'actif et du passif. En particulier, la durée de ces éléments a été identifiée comme un facteur clé qui influe sur la réponse du modèle aux variations de la courbe des taux. Une compagnie assurant une population jeune est, par exemple, peu sensible à la convexité de la courbe en raison du décalage des flux de prestations à des dates plus lointaines. L'influence des taux courts est ainsi limitée.

L'effet le plus important reste cependant les choix de modélisation et management actions implémentés au sein du modèle. L'effet de la convexité des taux est accru si le modèle sur-réagit au contexte économique. La définition des taux attendus et des rachats dynamiques est alors à ne pas négliger.

Ces conclusions mettent en évidence la nécessité pour les compagnies d'assurance de comprendre en profondeur leur modèle ALM sous-jacent, en tenant compte de la complexité inhérente aux différents facteurs de risque. La prise de décision éclairée dans un environnement de marché en évolution rapide dépend de la maîtrise de ces éléments clés.

Notre étude a ainsi permis de mettre en lumière l'impact de la convexité des taux sur les compagnies d'assurance-vie et leurs pratiques de modélisation. Elle présente des limites qui ouvrent la voie à des développements futurs.

Une complexification du générateur de scénario économique, du modèle ou du nombre de produits manipulés permettrait de nuancer et affiner les résultats. Une application pratique de l'étude actuelle sur un modèle ALM complet d'un assureur pourrait être envisagée pour une comparaison plus approfondie.

Par ailleurs l'étude soulève la nécessité de développer des stratégies de *hedging* pour atténuer la sensibilité de l'assureur à la convexité des taux. Cette perspective ouvre la porte à de futures recherches destinées à approfondir ces questions et à élaborer des approches novatrices pour la gestion des risques dans le secteur de l'assurance-vie, en parallèle avec les pratiques du secteur bancaire et financier.

Bibliographie

- ACPR (2011). Solvabilité 2: Enseignements de QIS5. Rapp. tech. Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/201103-acp-solvabilite-2-enseignements-de-qis5_0.pdf.
- ACPR (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II. Rapp. tech. Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/20130527-onc-2013_0.pdf.
- ACPR (2015). NOTICE « Solvabilité II »: Calcul du SCR en formule standard. Rapp. tech. Version en date du 17/12/2015. Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution, Banque de France. URL : <https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2017/09/25/20151218-notice-solvabilite2-calcul-scr.pdf>.
- ACPR (2020). Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques. Rapp. tech. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20201204_article_gse_revue.pdf.
- ACPR (2023). Le marché de l'assurance-vie en 2022. Rapp. tech. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20230320_as146_av_2022_vf.pdf.
- ANNAERT, J., CLAES, A. G., DE CEUSTER, M. J. et ZHANG, H. (2013). Estimating the spot rate curve using the Nelson–Siegel model: A ridge regression approach. *International Review of Economics & Finance* 27, p. 482-496.
- AUTORITÉ DE CONTRÔLE PRUDENTIEL (2011). Solvabilité 2: Enseignements de l'exercice QIS5. Rapp. tech. Banque de France. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/201103-acp-solvabilite-2-enseignements-de-qis5_0.pdf.
- BANQUE DE FRANCE (2022). Qu'est-ce que la politique monétaire ? URL : https://abc-economie.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/822287_eeb_pol_monetaire.pdf.
- BANQUE DE FRANCE (2023a). Courbes des taux zéro-coupon. URL : <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/courbes-des-taux-zero-coupon>.
- BANQUE DE FRANCE (2023b). Les taux monétaires directeurs. URL : <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/les-taux-monetaires-directeurs>.
- BANQUE DE FRANCE (2023c). Taux indicatifs des bons du Trésor et OAT. URL : <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/taux-indicatifs-des-bons-du-tresor-et-oat>.
- BAUER, D., BERGMANN, D. et REUSS, A. (2009). Solvency II and Nested Simulations - a Least-Squares Monte Carlo Approach. Rapp. tech. First version: October 2008. This version: May 2009. Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Universität Ulm. URL : https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi/forschung/PreprintServer/2009/200905_Solvency_Preprint-Server.pdf.
- BCE (2023). Décisions de politique monétaire. URL : <https://www.ecb.europa.eu/press/pr/date/2023/html/ecb.mp230914~aab39f8c21.fr.html>.
- BEN TAHAR, I., TRASHORRAS, J. et TURINICI, G. (2016). Éléments de Calcul Stochastique pour l'Évaluation et la Couverture des Actifs Dérivés avec Exercices Corrigés Travaux Pratiques et Études de Cas. Ellipses.

- BOBEICA, E. et HARTWIG, B. (2023). The COVID-19 shock and challenges for inflation modelling. *International Journal of Forecasting* 39.1, p. 519-539.
- BOLDER, D. J. et STRELISKI, D. (1999). Yield Curve Modelling at the Bank of Canada. Technical Report 84. Bank of Canada. URL : <https://ssrn.com/abstract=1082845>.
- CAISSE DES DÉPÔTS (2023). Une collecte et un encours historiques pour le Livret A en janvier. URL : <https://www.caissedesdepots.fr/actualites/une-collecte-et-un-encours-historiques-pour-le-livret-en-janvier>.
- CHOUDHRY, M. et WESTCOTT, C. (2019). Analysing and Interpreting the Yield Curve. Wiley Finance. Wiley.
- EIOPA (2022). RFR Technical Documentation: The methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures. Rapp. tech. URL : <https://www.eiopa.europa.eu/system/files/2022-12/eiopa-bos-2022-547-new-rfr-technical-documentation.pdf>.
- EIOPA (2023). Risk-free interest rate term structures. URL : https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en.
- FINANSTILSYNET (2010). A Technical Note on the Smith-Wilson Method. Rapp. tech. The Financial Supervisory Authority of Norway. URL : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/2b0481298458b3d1c1256f8a0024c478/bd689cce9bb2aeb5c1257998001ede2b/\\$FILE/A_Technical_Note_on_the_Smith-Wilson_Method_100701.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/2b0481298458b3d1c1256f8a0024c478/bd689cce9bb2aeb5c1257998001ede2b/$FILE/A_Technical_Note_on_the_Smith-Wilson_Method_100701.pdf).
- FRANCE ASSUREURS (2022). L'ASSURANCE FRANÇAISE : Données clés 2021. Rapp. tech. URL : https://www.franceassureurs.fr/wp-content/uploads/2022/09/donnees-cles-2021_juin22_webinteractif.pdf.
- FRANCE ASSUREURS (2023). L'assurance vie continue de se développer en avril avec une collecte nette atteignant 1,3 milliard d'euros.
- GURRIERI, S., NAKABAYASHI, M. et WONG, T. (2009). Calibration Methods of Hull-White Model. *Risk Management Department, Mizuho Securities*.
- HULL, J. et WHITE, A. (1990). Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *The Review of Financial Studies* 3.4, p. 573-392.
- INFLATION.EU (2023). Current inflation France - CPI inflation. URL : <https://www.inflation.eu/en/inflation-rates/france/current-cpi-inflation-france.aspx>.
- INSEE (2023). En avril 2023, les prix à la consommation augmentent de 5,9 % sur un an. URL : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/7614512>.
- INSTITUT DES ACTUAIRES (2018a). Générateurs de Scénarios Économiques : Document d'orientation. Rapp. tech. URL : https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=2018162907_document-d-orientation-gse-institut-des-actuaires-nov-2018-002.pdf&fg=1.
- INSTITUT DES ACTUAIRES (2018b). Rencontre ACPR-IA. Rapp. tech. URL : https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=14439&fg=1.
- INSTITUT DES ACTUAIRES (2023). Groupe de travail « Best Estimate Liabilities Vie » : Recueil de pratiques actuarielles applicables au marché français. Rapp. tech. Institut des Actuaires. URL : https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=18078&fg=1.
- LA FINANCE POUR TOUS (2023). Courbe des taux. URL : <https://www.lafinancepourtous.com/decryptages/finance-perso/banque-et-credit/taux-d-interet/courbe-des-taux/>.
- LE, H. (2023). Modelling inflation dynamics: a Bayesian comparison between GARCH and stochastic volatility. *Economic Research-Ekonomska Istraživanja* 36.1, p. 2112-2136. eprint : <https://doi.org/10.1080/1331677X.2022.2096093>.
- LÉVY-GARBOUA, V. et MONNET, E. (2016). Les taux d'intérêt en France : une perspective historique. *Revue d'économie financière* 121.1, p. 35-58.
- LISSOWSKI, A. et NESSI, J.-B. (2017). Les défis du modèle de l'assurance vie dans un environnement de taux bas, voire négatifs. *Revue d'économie financière* 126.2, p. 95-106.

- NELSON, C. R. et SIEGEL, A. F. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business* 60.4, p. 473-489.
- NYMAND-ANDERSEN, P. (2018). Yield curve modelling and a conceptual framework for estimating yield curves: evidence from the European Central Bank's yield curves. Rapp. tech. European Central Bank. URL : <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpsps/ecb.sps27.en.pdf>.
- PLANCHET, F. (2023a). Calcul du SCR: méthode LSMC. Rapp. tech. Version 2.7. Ressources Actuarielles. URL : [http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/0B9DF464E9543283C1256F130067B2\\$FILE/LSM.pdf?OpenElement](http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/0B9DF464E9543283C1256F130067B2$FILE/LSM.pdf?OpenElement).
- PLANCHET, F. (2023b). Construction et utilisation de générateurs de scénarios économiques dans le contexte de Solvabilité 2. Rapp. tech. Ressources Actuarielles. URL : [http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/5E48C794E4C019B4C1257834006E9485/\\$FILE/GSE.pdf?OpenElement](http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/5E48C794E4C019B4C1257834006E9485/$FILE/GSE.pdf?OpenElement).
- REDFERN, D. et MCLEAN, D. (2014). Principal Component Analysis for Yield Curve Modelling. Rapp. tech. Moody's Analytics Research. URL : <https://www.moodysanalytics.com/-/media/whitepaper/2014/2014-29-08-PCA-for-Yield-Curve-Modelling.pdf>.
- SMITH, A. et WILSON, T. (2001). Fitting Yield Curves with Long Term Constraints.
- SVENSSON, M. L. E. O. (1994). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. *IMF Working Papers* 1994 (114), p. 76.
- UNION EUROPÉENNE (2023). Article 127 du Traité sur le fonctionnement de l'Union européenne. URL : <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/HTML/?uri=CELEX:12016E127>.
- VÁŠÍČEK, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5.2, p. 177-188.
- WOLD, S., ESBENSEN, K. et GELADI, P. (1987). Principal component analysis. *Chemometrics and intelligent laboratory systems* 2.1-3, p. 37-52.

Annexe A

Annexes

A.1 Rappels sur les modèles de taux et le calcul stochastique

Nous introduisons ici les concepts clés qui ont été utilisés dans le chapitre 2. Dans toute cette section, on considérera un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

A.1.1 Processus stochastique (Ben Tahar et al., 2016)

Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires indexées par le temps. On note $X = \{X_t, t \geq 0\}$ où X_t est une variable aléatoire dans un espace donné, par exemple \mathbb{R}^d . Un processus stochastique peut être défini en temps discret ou bien en temps continu, et peut être vu comme une famille de variables aléatoires indexées par le temps.

$$X_t : \omega \in (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto X_t(\omega) \in \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right). \quad (\text{A.1})$$

Il existe différents types de processus stochastiques, tels que les processus de **Markov**, les processus **gaussiens**, les processus de **Poisson**, etc., qui ont des propriétés spécifiques dépendant de leurs distributions de probabilité et de leurs dynamiques. Pour la diffusion des taux et autres indices du GSE, nous aurons principalement besoin de mouvements browniens, qui représentent l'aléa dans les trajectoires diffusées.

A.1.2 Mouvement Brownien (Ben Tahar et al., 2016)

Un mouvement brownien est l'un des exemples les plus fondamentaux de processus stochastique. Initialement, il représente le comportement chaotique et aléatoire d'une particule ou d'une quantité qui se déplace dans un fluide, subissant une série de petites impulsions aléatoires. Mathématiquement, un mouvement brownien est défini comme un processus stochastique continu $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ qui possède les propriétés suivantes :

- **Incréments indépendants et stationnaires** : Les incréments sont indépendants les uns des autres et ont la même distribution de probabilité, ce qui signifie que les variations dans un intervalle de temps donné sont indépendantes des variations dans d'autres intervalles de temps.

$$(W_t - W_s) \perp \mathcal{F}_s, \quad \forall t > s.$$

- **Incréments de moyenne nulle** : Les incréments ont une moyenne nulle,

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0, \quad \forall t > s.$$

- **Incréments de variance $t - s$:** Les incréments ont une variance proportionnelle à la durée de l'intervalle de temps,

$$\text{Var}[W_t - W_s] = t - s, \quad \forall t > s.$$

- **Incréments gaussiens :** Les incréments du mouvement brownien suivent une distribution gaussienne.

On peut résumer les 3 dernières propriétés par la formulation (A.2).

$$(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad \forall t > s. \quad (\text{A.2})$$

A.1.3 Processus d'Itô (Ben Tahar et al., 2016)

Un processus d'Itô est un type spécifique de processus stochastique qui suit une équation différentielle stochastique de forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s).ds + \int_0^t \sigma(s, X_s).dW_s,$$

ou en version différentielle

$$dX_t = \mu(t, X_t).dt + \sigma(t, X_t).dW_t, \quad X_0 \text{ fixé,}$$

où :

- X_t le processus d'Itô que nous cherchons à décrire.
- $\mu(t, X_t)$ le terme déterministe, représentant la dérive (ou la tendance) du processus.
- $\sigma(t, X_t)$ le terme stochastique, représentant la volatilité du processus.
- dW_t l'incrément différentiel d'un mouvement brownien (processus de Wiener).

Les processus d'Itô ont de nombreuses applications, notamment en finance, en physique mathématique et en ingénierie. Ils sont utilisés pour modéliser des phénomènes où des éléments aléatoires interagissent avec des éléments déterministes pour créer des trajectoires complexes. Les équations différentielles stochastiques, telles que les processus d'Itô, permettent de capturer les effets aléatoires dans des systèmes dynamiques, conduisant à une modélisation plus réaliste des phénomènes naturels et économiques.

A.1.4 Formule d'Itô (Ben Tahar et al., 2016)

La formule d'Itô est un outil fondamental en calcul stochastique, utilisé pour calculer les dérivées de fonctions de processus stochastiques. Soit f une fonction $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times U)$ et $(X_t)_t$ un processus d'Itô dans U , un intervalle ouvert de \mathbb{R} , alors

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s).ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s).dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s).d\langle X \rangle_s, \quad (\text{A.3})$$

ou en version différentielle

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t).dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t).dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t).d\langle X \rangle_t,$$

où :

- $df(t, X_t)$ la variation de la fonction f dans l'intervalle de temps dt .
- $\frac{\partial f}{\partial t}$ la dérivée partielle de f par rapport au temps.

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée partielle de f par rapport à x .
- dX_t l'incrément différentiel du processus stochastique X_t .
- $d\langle X \rangle_t$ le **crochet*** du processus stochastique (terme quadratique de l'incrément dX_t).
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ la deuxième dérivée partielle de f par rapport à x .

La formule d'Itô permet de calculer la dérivée d'une fonction qui dépend d'un processus stochastique et d'effectuer des opérations de différentiation avec des éléments aléatoires. C'est un outil puissant pour la modélisation et l'analyse de systèmes dynamiques sous l'effet de l'incertitude.

A.2 Résolutions d'EDS : Vasicek et Hull White

Les modèles de Vasicek et Hull White présentent des équations différentielles stochastiques dont la résolution explicite permet d'effectuer une discrétisation exacte des trajectoires, au lieu de passer par un schéma.

Cette annexe présente comment résoudre les deux EDS 2.4 et 2.5 et obtenir les formules de discrétisation utilisées pour la diffusion des taux.

A.2.1 Intégrale de Wiener

Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Soit $W^{\mathbb{P}}$ un \mathbb{P} -mouvement brownien. Alors,

$$\int_0^t f(s).dW_s^{\mathbb{P}} \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t f^2(s).ds\right).$$

A.2.2 EDS du modèle de Vasicek

Nous souhaitons résoudre explicitement

$$dr_t = a(b - r_t).dt + \sigma.dW_t.$$

La formule précédente se réécrit

$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s).ds + \int_0^t \sigma.dW_s.$$

Posons $f(t, r) = e^{at}r$, alors on peut appliquer la formule d'Itô sur $f(t, r_t)$:

$$\begin{aligned} e^{at}r_t &= f(t, r_t) \\ &= r_0 + \int_0^t ae^{as}r_s ds + \int_0^t e^{as}dr_s \\ &= r_0 + \int_0^t ae^{as}r_s ds + \int_0^t e^{as}a(b - r_s)ds + \int_0^t e^{as}\sigma dW_s \\ &= r_0 + ab \int_0^t e^{as}ds + \sigma \int_0^t e^{as}dW_s \\ &= r_0 + b(e^{at} - 1) + \sigma \int_0^t e^{as}dW_s. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, en multipliant les deux côtés de l'équation par e^{-at} :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}.dW_s,$$

la discrétisation exacte du modèle de Vasicek entre les temps 0 et t .

*Soit $dX_t = \mu(t, X_t).dt + \sigma(t, X_t).dW_t$ un processus d'Itô, alors $d\langle X \rangle_t = \sigma(t, X_t)^2.dt$

A.2.3 EDS du modèle HW1

De manière similaire au modèle de Vasicek, nous souhaitons résoudre explicitement l'EDS :

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t).dt + \sigma.dW_t,$$

avec

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial t} + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}).$$

Comme pour la preuve de Vasicek, nous allons calculer à l'aide de la formule d'Ito la différentielle de $f(r, t) = e^{at}r_t$, mais en partant de s :

$$\begin{aligned} e^{at}r_t &= f(t, r_t) \\ &= e^{as}r_s + \int_s^t ae^{au}r_u du + \int_s^t e^{au} dr_u \\ &= e^{as}r_s + \int_s^t ae^{au}r_u du + \int_s^t e^{au}a(\theta(u) - r_u)du + \int_s^t e^{au}\sigma dW_u \\ &= e^{as}r_s + a \int_s^t e^{au}\theta(u)du + \sigma \int_s^t e^{au}dW_u \\ &= e^{as}r_s + a \int_s^t e^{au} \left(\frac{\partial f^M(0, u)}{\partial T} + af^M(0, u) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2au}) \right) du + \sigma \int_s^t e^{au}dW_u \\ &= e^{as}r_s + e^{at}\alpha(t) - e^{as}\alpha(s) + \sigma \int_s^t e^{au}dW_u, \end{aligned}$$

avec $\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$.

Enfin, en multipliant les deux côtés de l'équation par e^{-at} , nous obtenons la discrétisation exacte du modèle Hull White 1 facteur entre les temps s et t :

$$r_t = e^{-a(t-s)}r_s + \alpha(t) - e^{-a(t-s)}\alpha(s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW_u.$$

Pour diffuser le taux court, on utilise la propriété donnée par l'intégrale de Wiener :

$$\begin{aligned} \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW_u &\sim \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \int_s^t e^{-2a(t-u)}.du \right) \\ &\sim \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a} \right). \end{aligned}$$

Soit $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors,

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a}} \epsilon.$$

A.3 Fondements de Monte-Carlo et réduction de variance

Cette annexe présente les différents fondements mathématiques de la méthode de Monte-Carlo.

A.3.1 Loi des grands nombres

Il existe deux versions principales de la loi des grands nombres : la version **faible** et la version **forte**. Les deux versions décrivent comment la **moyenne d'un échantillon de variables aléatoires converge vers l'espérance de la distribution sous-jacente à mesure que la taille de l'échantillon augmente**.

Loi faible des grands nombres (LGN) :

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) avec une espérance $E[X_i] = \mu$ et une variance $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. La LGN stipule que pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| > \epsilon \right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Cela signifie que la probabilité que la moyenne de l'échantillon s'écarte de l'espérance de plus de ϵ tend vers zéro à mesure que la taille de l'échantillon augmente.

Loi forte des grands nombres (LFGN) :

La LFGN est une version plus forte de la LGN. Elle stipule que la moyenne de **l'échantillon converge presque sûrement** vers l'espérance de la distribution sous-jacente. Mathématiquement :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mu \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Cela signifie que la probabilité que la moyenne de l'échantillon converge vers μ est égale à 1.

A.3.2 Théorème Central Limite (TCL) :

Le théorème central limite est l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie de la probabilité. Il stipule que la somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) tend vers une distribution normale à mesure que le nombre de ces variables augmente, quelle que soit la forme de leur distribution originale, à condition qu'elles aient une espérance et une variance finies.

Mathématiquement, soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon de variables aléatoires i.i.d. avec espérance μ et variance σ^2 . La somme (ou moyenne) standardisée de ces variables est donnée par :

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Alors quand n tend vers l'infini, la distribution de Z_n tend vers une loi normale centrée réduite :

$$Z_n \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

A.3.3 Monte Carlo

Soit X une variable aléatoire, f sa densité de probabilité et φ une fonction mesurable. Supposons que nous souhaitons évaluer l'intégrale :

$$I = \int \varphi(x)f(x)dx = \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

L'approximation de Monte Carlo est alors donnée par :

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[\varphi(X)],$$

où X_1, X_2, \dots, X_n sont des réalisations i.i.d. de la variable aléatoire X .

A.3.4 Intervalle de confiance :

Posons $\bar{\varphi}_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$, alors l'application du théorème centrale limite permet d'écrire :

$$\sqrt{n} \frac{\bar{\varphi}_n(X) - \mathbb{E}[\varphi(X)]}{\sigma_n} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1),$$

avec

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi(X_i) - \bar{\varphi}_n(X))^2,$$

la variance empirique de l'échantillon.

Il est alors possible de construire des intervalles de confiance asymptotique. Soit un niveau de confiance $\alpha \in [0, 1]$, l'intervalle de confiance s'écrit :

$$\left[\bar{\varphi}_n(X) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}, \bar{\varphi}_n(X) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} \right],$$

avec Φ^{-1} la fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite.

A.3.5 Méthodes de réduction de variance

La méthode de Monte Carlo, bien que puissante, présente une vitesse de convergence proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, où n est le nombre d'échantillons. Cela signifie que **pour réduire l'erreur d'estimation de moitié, il faut quadrupler la taille de l'échantillon**. Cette convergence relativement lente peut rendre la méthode coûteuse en termes de temps de calcul, en particulier pour des problèmes nécessitant une grande précision. Pour cette raison, diverses **techniques de réduction de variance** ont été développées pour **accélérer la convergence de la méthode de Monte Carlo sans augmenter le nombre d'échantillons**.

Les variables antithétiques

L'idée derrière cette technique est d'**utiliser la dépendance entre les variables pour réduire la variance**. Si on génère une variable aléatoire X , alors on génère également sa variable antithétique \bar{X} . La moyenne des deux donne une estimation avec une variance réduite.

L'estimateur s'écrit :

$$\hat{I}_{antithetique} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [f(X_i) + f(\bar{X}_i)],$$

où X_i et \bar{X}_i sont des paires de variables antithétiques.

Les variables de contrôle

Cette technique **utilise une variable aléatoire dont l'espérance est connue pour réduire la variance de l'estimation**. Si X est la variable d'intérêt et Y est la variable de contrôle avec $\mathbb{E}[Y] = \mu_Y$, alors la variable corrigée est $X - Y + \mu_Y$.

L'estimateur devient :

$$\hat{I}_{\text{contrôle}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(X_i) - c(Y_i - \mu_Y)],$$

où c est une constante qui est souvent choisie pour minimiser la variance de l'estimateur.

Le conditionnement

Le conditionnement consiste à **diviser le problème en plusieurs parties plus simples et à les résoudre séparément**. En connaissant certaines informations à l'avance, on peut réduire la variance de l'estimation.

Si on veut estimer $E[X]$ et qu'on connaît $E[X|Y = y]$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

L'échantillonnage préférentiel

:

Cette technique consiste à **échantillonner plus fréquemment les régions de l'espace d'entrée qui contribuent le plus à l'intégrale**. Si $g(x)$ est la densité d'échantillonnage préférentiel, alors l'estimateur est donné par :

$$\hat{I}_{IS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(X_i)}{g(X_i)},$$

où X_i est généré selon la densité $g(x)$.

Les techniques de réduction de variance sont essentielles pour **améliorer l'efficacité de la méthode de Monte Carlo**. En utilisant ces techniques, il est possible d'obtenir des estimations plus précises avec un nombre d'échantillons moindre, ce qui **permet de gagner du temps et des ressources de calcul**. Chaque technique a ses propres avantages et inconvénients, et le choix de la technique dépend du problème spécifique à résoudre.

A.4 Passage d'une mesure historique à une mesure risque neutre

A.4.1 Univers historique et univers risque neutre

Les concepts d'univers historique et d'univers risque neutre sont **fondamentaux en finance**, en particulier dans le domaine de la **tarification des options et des instruments dérivés**.

Univers Historique

L'univers historique, également appelé "**monde réel**", fait référence à la réalité telle que nous la connaissons. Dans cet univers, **les rendements des actifs sont basés sur leurs rendements historiques réels**. Les probabilités associées à cet univers sont appelées **probabilités réelles** ou probabilités objectives. Elles reflètent les croyances réelles des investisseurs concernant les rendements futurs des actifs.

Caractéristiques principales :

- Basé sur des données historiques.
- Utilisé pour estimer les rendements futurs et la volatilité des actifs.
- Les probabilités réelles sont utilisées pour des décisions d'investissement et de gestion de portefeuille.

Univers Risque Neutre

L'univers risque neutre, également appelé "**mesure martingale**" ou "**mesure risque neutre**", est un cadre théorique utilisé pour la tarification des instruments dérivés. Dans cet univers, il est supposé que **le rendement attendu de tous les actifs est le taux d'intérêt sans risque**. Cela ne signifie pas que les actifs n'ont pas de risque, mais plutôt que leur prix est ajusté pour refléter ce risque.

Caractéristiques principales :

- Les probabilités risque neutre sont utilisées pour évaluer les instruments dérivés.
- Le rendement attendu de tous les actifs est le taux d'intérêt sans risque.
- Il ne s'agit pas d'une représentation de la réalité, mais d'un outil mathématique pour la tarification des options et des dérivés.

Utilité des deux univers : En pratique, on utilise l'univers risque neutre pour évaluer les instruments dérivés, tandis que l'univers historique est utilisé pour prendre des décisions d'investissement et évaluer la performance des actifs.

Il est possible d'analyser un environnement économique et financier sous l'angle des deux univers. Un théorème fondamental, le théorème de **Girsanov**, permet de passer d'un univers à un autre.

A.4.2 Mesure absolument continue :

Soient μ et ν deux mesures définies sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . On dit que μ est **absolument continue** par rapport à ν (et on note $\mu \ll \nu$) si, chaque fois que $\nu(A) = 0$ pour un ensemble mesurable $A \in \mathcal{F}$, on a également $\mu(A) = 0$.

Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue :

Le théorème de Radon-Nikodym, stipule que si μ est absolument continue par rapport à ν , alors il existe une fonction mesurable f telle que $\mu(A) = \int_A f d\nu$ pour tout ensemble mesurable A . Cette fonction f est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à ν , et est notée $\frac{d\mu}{d\nu}$.

A.4.3 Théorème de Girsanov

Le **théorème de Girsanov** est un résultat fondamental en mathématiques financières et en théorie des probabilités. Il fournit un mécanisme pour effectuer **un changement de mesure sur un espace de probabilité filtré**, ce qui est particulièrement utile pour **passer d'une mesure historique à une mesure risque-neutre**.

Soit W un mouvement brownien sous une mesure de probabilité historique \mathbb{P} . Le théorème de Girsanov stipule que, sous certaines conditions, il existe un processus adapté θ tel que

$$W_t^\theta = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

est aussi un mouvement brownien, mais sous une nouvelle mesure \mathbb{Q} , qui est absolument continue par rapport à \mathbb{P} . Le processus θ est souvent appelé le processus de dérive.

La relation entre les mesures \mathbb{P} et \mathbb{Q} est donnée par la formule de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T = \exp\left(-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds\right).$$

A.4.4 Application du théorème de Girsanov :

Considérons un actif dont le prix S_t suit un mouvement brownien géométrique sous la probabilité historique \mathbb{P} :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^\mathbb{P},$$

où μ est le taux de rendement attendu (ou historique) et σ est la volatilité de l'actif. $W_t^\mathbb{P}$ est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{P} .

Pour passer à une mesure risque-neutre \mathbb{Q} , nous utilisons **le théorème de Girsanov**. Supposons que Z_t soit la dérivée de Radon-Nikodym entre \mathbb{Q} et \mathbb{P} , définie par :

$$dZ_t = -\theta_t Z_t dW_t^\mathbb{P},$$

où θ_t est le processus de dérive.

En utilisant le théorème d'Itô, on peut montrer que :

$$\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

où r est le taux d'intérêt sans risque.

En utilisant cette dérive, nous définissons un nouveau mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q} :

$$dW_t^\mathbb{Q} = dW_t^\mathbb{P} + \theta_t dt.$$

En substituant θ_t dans cette équation, nous obtenons :

$$dW_t^\mathbb{Q} = dW_t^\mathbb{P} + \frac{\mu - r}{\sigma} dt.$$

En remplaçant $dW_t^\mathbb{P}$ dans l'équation différentielle stochastique initiale pour S_t , nous obtenons :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^\mathbb{Q}.$$

Ce qui est l'évolution du prix de l'actif sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} .

A.5 Configuration du modèle ALM

Paramètres de projection	valeur	unité
Nombre de scénarios	1000	scénarios
Durée de projection	50	ans
Année de départ	2022	

Stocks initiaux	valeur	unité
VNC des actifs	11 000 000 000	€
Provisions mathématiques	10 400 000 000	€
PPE initiale	450 000 000	€
Réserve de capitalisation initiale	150 000 000	€

Réinvestissement obligataire	valeur	unité
Maturité obligation minimum	8	ans
Maturité obligation maximum	10	ans

Frais et impôts	valeur	unité
Taux d'inflation annuel	0,00	%
Taux de frais financier (sur garde et produits)	0,20	%

Produits financiers	valeur	unité
Taux de dividende	3,00	%
Taux de loyer	4,50	%

Paramètres de seuils (en % des PM)	valeur	unité
Taux de PPE min	1,00	%
Taux de PPE max	8,00	%
Taux de PVL min	0,50	%
Taux de MVL min	0,50	%

Répartition de fin de projection	valeur	unité
Part des PVL pour les assurés	85,00	%

TABLE A.1 : Configuration des hypothèses du modèle ALM.

Type d'actif	cible	corridor
Obligations	80%	6%
Actions	13%	4%
Immobilier	5%	3%
Cash	2%	2%

TOTAL 100%

TABLE A.2 : Configuration des cibles d'actif du modèle ALM.

A.6 Séries temporelles des coefficients d'ACP des courbes EIOPA

L'ACP sur les courbes de taux réglementaires depuis décembre 2015 nous a permis de déterminer quelles étaient les 3 composantes principales permettant la reconstruction des courbes originales. Pour chaque courbe EIOPA, nous avons ainsi récupéré **3 coefficients multiplicateurs**. Il est alors possible de **voir l'évolution des multiplicateurs comme des séries temporelles**, puisqu'ils sont indexés par le temps (à rythme mensuel).

Pour la première composante, celle qui explique plus de 85% de la variance des courbes originelles, on obtient la série présentée dans la figure A.1 :

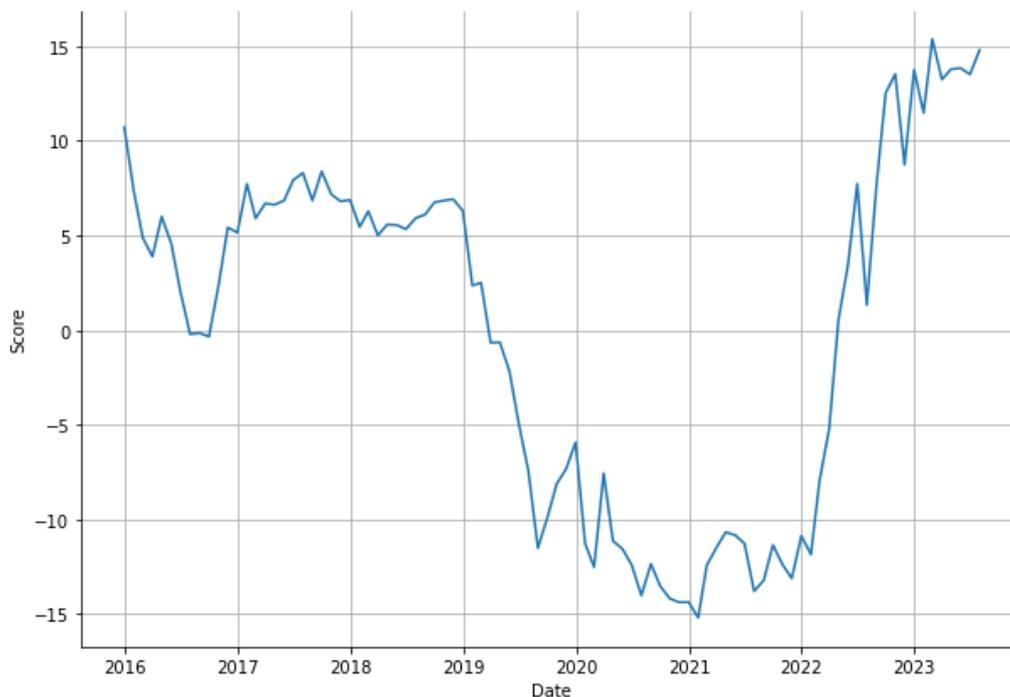


FIGURE A.1 : Série temporelle du coefficient associé à la composante principale 1 de l'ACP.

Dès lors, il semble approprié d'essayer d'effectuer des prédictions sur les séries CP1, CP2 et CP3. Nous donc utiliser plusieurs fonctions de prédictions, les résultats sont présentés dans les figures A.2, A.3 et A.4.

SARIMA (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average)

SARIMA est une extension du modèle ARIMA*, adaptée pour traiter les composantes saisonnières des séries temporelles. Le modèle est généralement noté comme SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s où 'p', 'd', et 'q' sont les ordres non saisonniers et 'P', 'D', 'Q' sont les ordres saisonniers avec 's' indiquant la périodicité saisonnière.

*L'ARIMA est un modèle de séries temporelles combinant des éléments autoregressifs (AR) pour capturer les dépendances entre observations, et une moyenne mobile (MA) pour modéliser les erreurs, tout en intégrant (I) les données pour traiter les tendances non stationnaires.

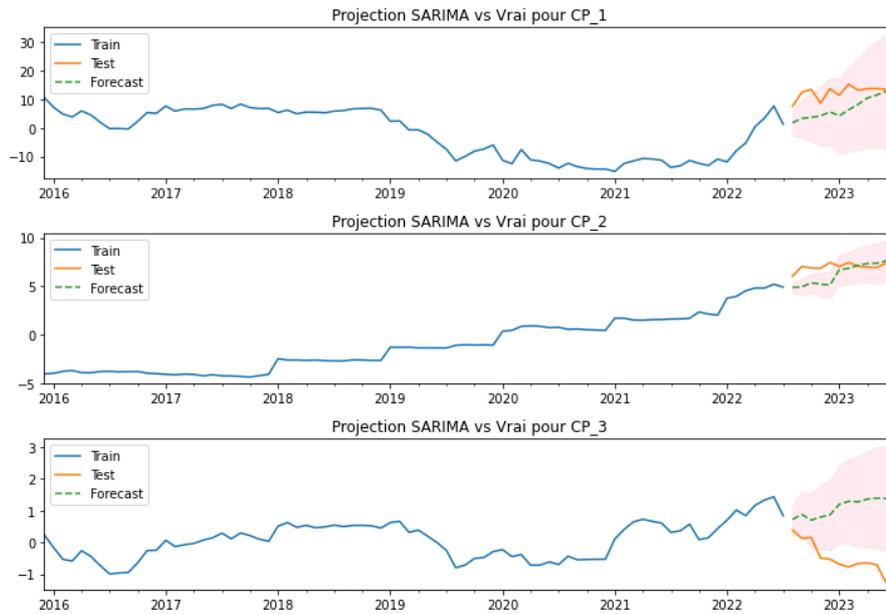


FIGURE A.2 : Prédiction des séries temporelles : modèle de SARIMA.

VAR (Vector Autoregression)

VAR est un modèle multivarié qui **traite simultanément de plusieurs séries temporelles interdépendantes**. Chaque variable est exprimée comme une combinaison linéaire de ses propres valeurs passées et des valeurs passées des autres variables. Il est particulièrement utile lorsque les séries ont des influences réciproques.

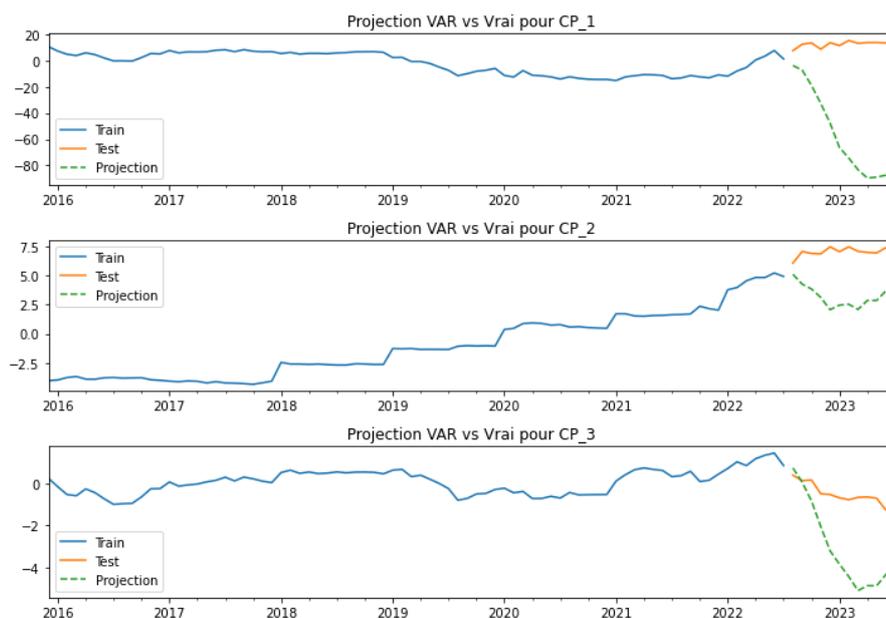


FIGURE A.3 : Prédiction des séries temporelles : modèle VAR.

VECM (Vector Error Correction Model)

VECM est un modèle adapté pour **des séries temporelles multivariées qui sont cointégrées**. Si des séries ont une tendance commune à long terme mais qu'elles s'écartent à court terme, VECM est conçu pour capturer ces dynamiques. Il combine les avantages du modèle VAR tout en prenant en compte des relations de cointégration, permettant ainsi une meilleure estimation des relations de court et de long termes entre les séries.

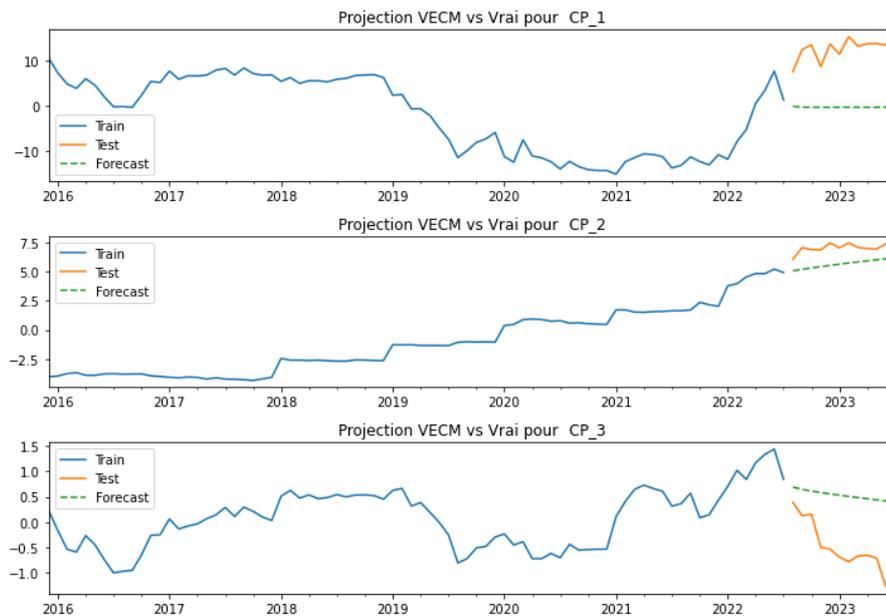


FIGURE A.4 : Prédiction des séries temporelles : méthode VECM (Vector Error Correction Model).

A.7 La méthode d'interpolation/extrapolation de Smith-Wilson

La méthode Smith-Wilson, conçue à l'origine par Andrew Smith et Tim Wilson, a été formalisée dans leur article de recherche intitulé "Fitting Yield Curves with Long Term Constraints", publié en 2001. Cette méthode a été spécialement conçue pour résoudre des problèmes complexes dans le domaine de la finance et de l'actuariat, notamment pour ajuster une courbe de taux spot aux prix du marché des instruments financiers tels que les obligations et les swaps. Sa popularité a été renforcée par son **incorporation dans le cadre réglementaire de solvabilité II** en Europe.

L'une des caractéristiques les plus attrayantes de cette méthode est sa capacité à fournir un ajustement de courbe qui est à la fois lisse et en accord avec les données du marché. Elle évite les problèmes souvent rencontrés avec d'autres méthodes, comme les sauts abrupts ou les irrégularités dans la courbe ajustée. Cette propriété est particulièrement utile dans les marchés où les données sont rares ou incohérentes. De plus, la méthode Smith-Wilson est conçue pour être uniforme, ce qui signifie qu'elle utilise **la même approche mathématique pour l'interpolation des taux entre les points de données connus et pour l'extrapolation au-delà de ces points**.

Cependant, le choix du paramètre α , qui contrôle la vitesse de convergence vers le taux forward ultime (UFR), peut être délicat et nécessite souvent une expertise spécifique. De plus, bien que la méthode soit robuste, elle n'est pas entièrement libre de paramètres *ad hoc*, ce qui peut poser des problèmes en termes de transparence et de reproductibilité.

La formule générale de la méthode Smith-Wilson, présentée dans la note technique "*A Technical Note on the Smith-Wilson Method*", publié en 2010 par l'Autorité de surveillance financière de Norvège (FINANSTILSYNET, 2010), est la suivante :

$$P(t) = e^{-UFR \times t} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times W(t, u_j), \quad t \geq 0, \quad (\text{A.4})$$

où

$$W(t, u_j) = e^{-UFR \times (t+u_j)} \times \left\{ \alpha \min(t, u_j) - \frac{1}{2} e^{-\alpha \max(t, u_j)} \left(e^{\alpha \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \max(t, u_j)} \right) \right\},$$

et avec

- N : Le nombre d'obligations zéro-coupon dont la fonction de prix est connue ;
- $m_i, i = 1, 2, \dots, N$: Les prix du marché des obligations zéro-coupon ;
- $u_i, i = 1, 2, \dots, N$: Les maturités des obligations zéro-coupon dont les prix sont connus ;
- t : La durée jusqu'à l'échéance dans la fonction de prix ;
- α : La réversion à la moyenne, une mesure de la vitesse de convergence vers l'UFR ;
- $\zeta_i, i = 1, 2, \dots, N$: Les paramètres pour ajuster la courbe de rendement actuelle.

L'essence de cette méthode est d'assurer que la courbe s'ajuste bien aux taux observés sur le marché tout en garantissant une transition en douceur vers l'UFR pour les maturités plus longues.

A.8 Choc UP et DOWN de l'EIOPA

	Shock downwards	Shock upwards		Shock downwards	Shock upwards
1	75,0%	70,0%	51	25,0%	23,3%
2	65,0%	70,0%	52	24,9%	23,3%
3	56,0%	64,0%	53	24,8%	23,2%
4	50,0%	59,0%	54	24,6%	23,1%
5	46,0%	55,0%	55	24,5%	23,0%
6	42,0%	52,0%	56	24,4%	22,9%
7	39,0%	49,0%	57	24,2%	22,8%
8	36,0%	47,0%	58	24,1%	22,7%
9	33,0%	44,0%	59	24,0%	22,7%
10	31,0%	42,0%	60	23,9%	22,6%
11	30,0%	39,0%	61	23,7%	22,5%
12	29,0%	37,0%	62	23,6%	22,4%
13	28,0%	35,0%	63	23,5%	22,3%
14	28,0%	34,0%	64	23,3%	22,2%
15	27,0%	33,0%	65	23,2%	22,1%
16	28,0%	31,0%	66	23,1%	22,1%
17	28,0%	30,0%	67	23,0%	22,0%
18	28,0%	29,0%	68	22,8%	21,9%
19	29,0%	27,0%	69	22,7%	21,8%
20	29,0%	26,0%	70	22,6%	21,7%
21	28,9%	25,9%	71	22,4%	21,6%
22	28,7%	25,8%	72	22,3%	21,5%
23	28,6%	25,7%	73	22,2%	21,5%
24	28,5%	25,7%	74	22,1%	21,4%
25	28,4%	25,6%	75	21,9%	21,3%
26	28,2%	25,5%	76	21,8%	21,2%
27	28,1%	25,4%	77	21,7%	21,1%
28	28,0%	25,3%	78	21,5%	21,0%
29	27,8%	25,2%	79	21,4%	20,9%
30	27,7%	25,1%	80	21,3%	20,9%
31	27,6%	25,1%	81	21,2%	20,8%
32	27,5%	25,0%	82	21,0%	20,7%
33	27,3%	24,9%	83	20,9%	20,6%
34	27,2%	24,8%	84	20,8%	20,5%
35	27,1%	24,7%	85	20,6%	20,4%
36	26,9%	24,6%	86	20,5%	20,3%
37	26,8%	24,5%	87	20,4%	20,3%
38	26,7%	24,5%	88	20,3%	20,2%
39	26,6%	24,4%	89	20,1%	20,1%
40	26,4%	24,3%	90	20,0%	20,0%
41	26,3%	24,2%	91	20,0%	20,0%
42	26,2%	24,1%	92	20,0%	20,0%
43	26,0%	24,0%	93	20,0%	20,0%
44	25,9%	23,9%	94	20,0%	20,0%
45	25,8%	23,9%	95	20,0%	20,0%
46	25,7%	23,8%	96	20,0%	20,0%
47	25,5%	23,7%	97	20,0%	20,0%
48	25,4%	23,6%	98	20,0%	20,0%
49	25,3%	23,5%	99	20,0%	20,0%
50	25,1%	23,4%	100	20,0%	20,0%

TABLE A.3 : Choc réglementaire de la courbe des taux pour le calcul du SCR taux (Source : EIOPA, 2023).

A.9 Graphes supplémentaires des cas d'études

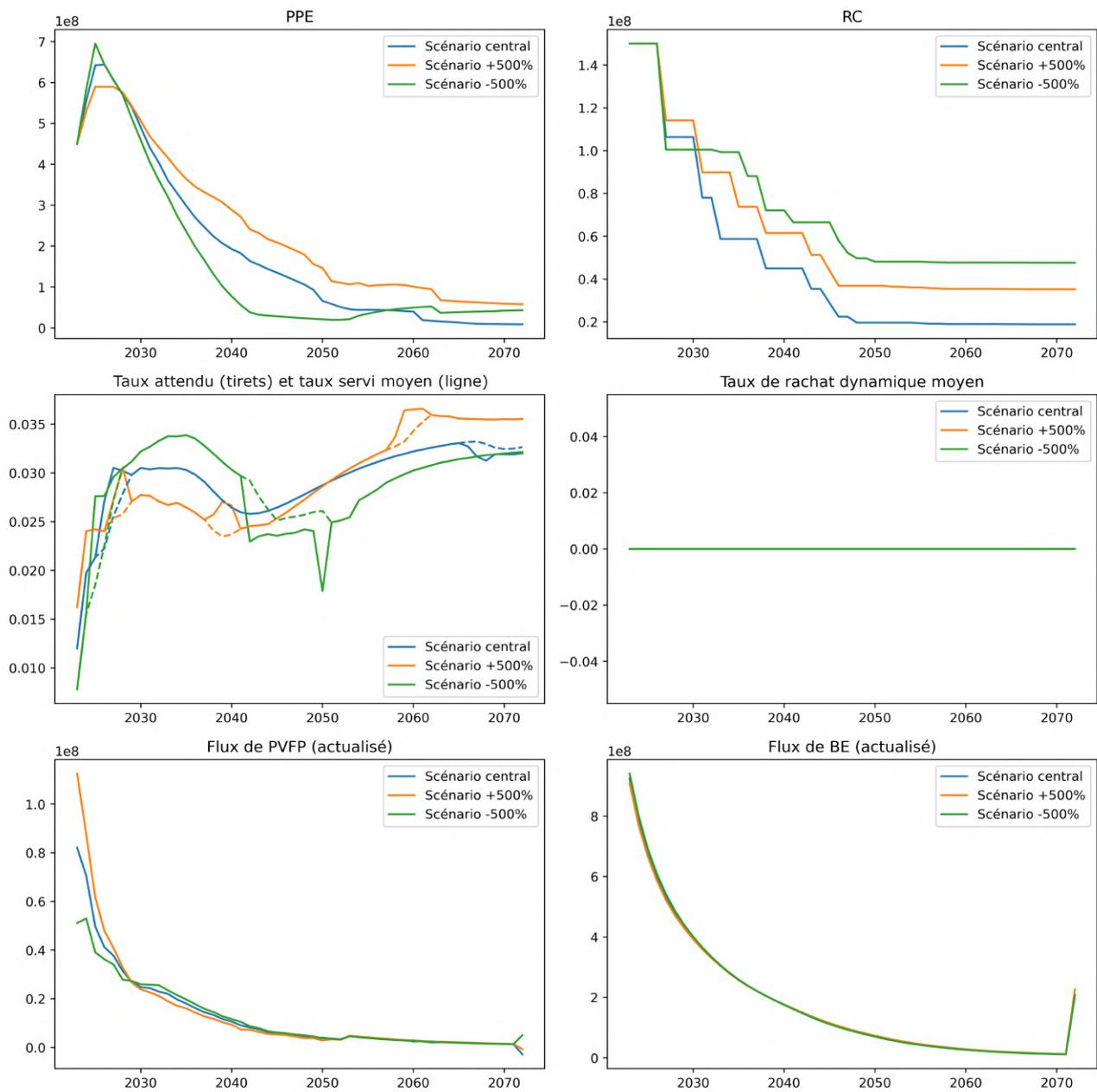


FIGURE A.5 : Evolution déterministe du scénario TMG 0%.

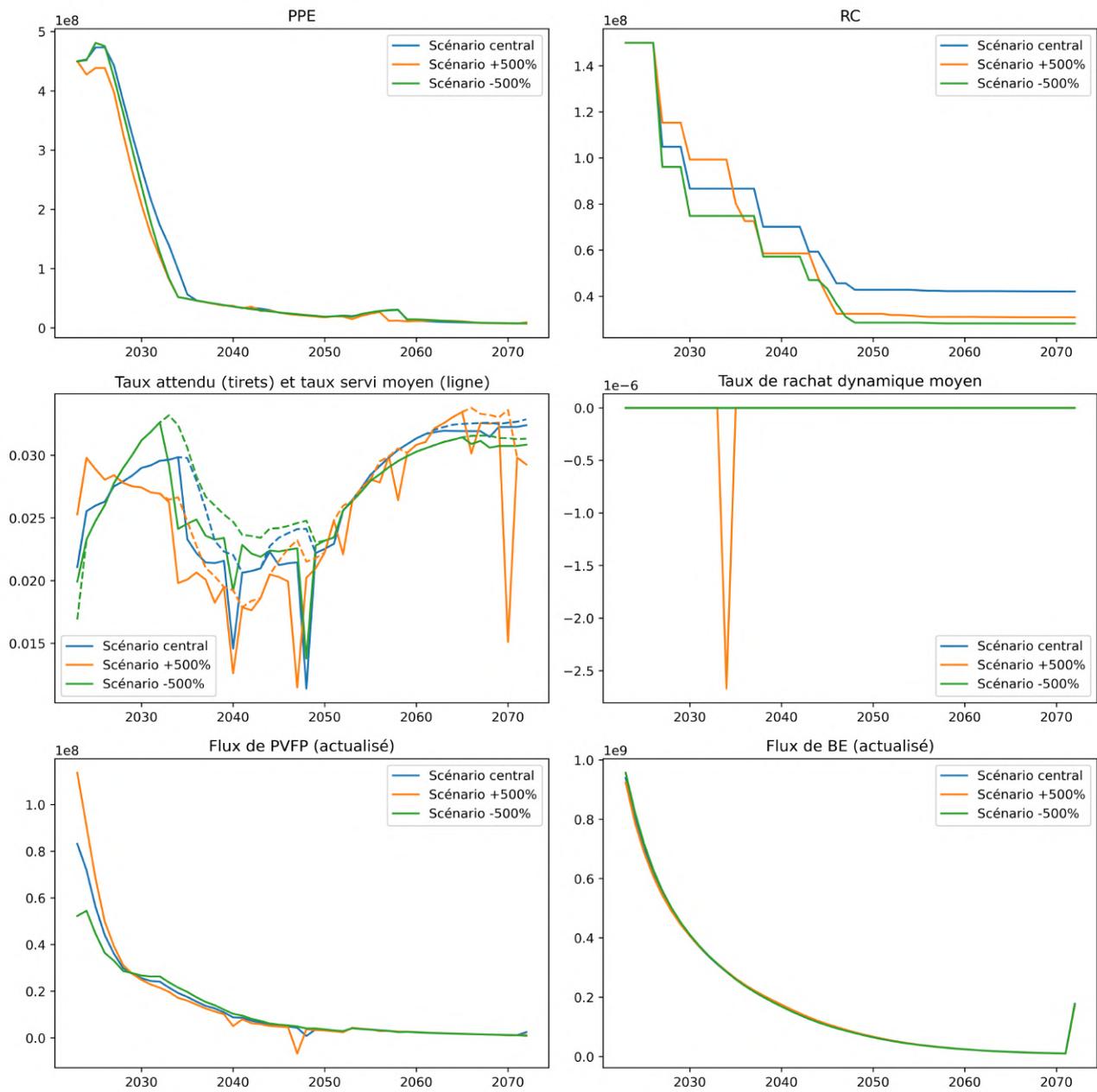


FIGURE A.6 : Evolution déterministe du scénario TMG + 100 bps.

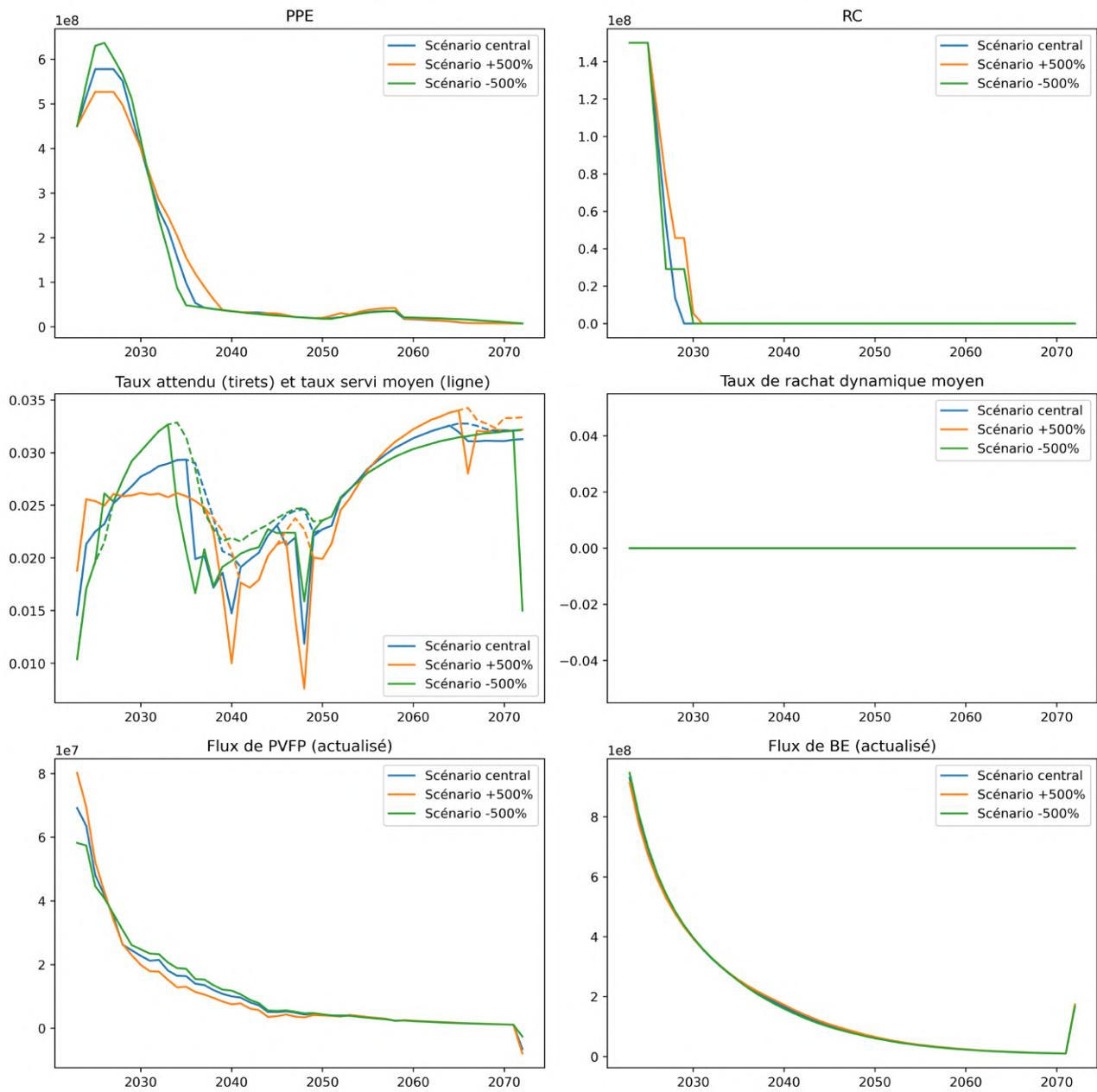


FIGURE A.7 : Evolution déterministe du scénario à obligations réparties uniformément (1 à 30 ans).

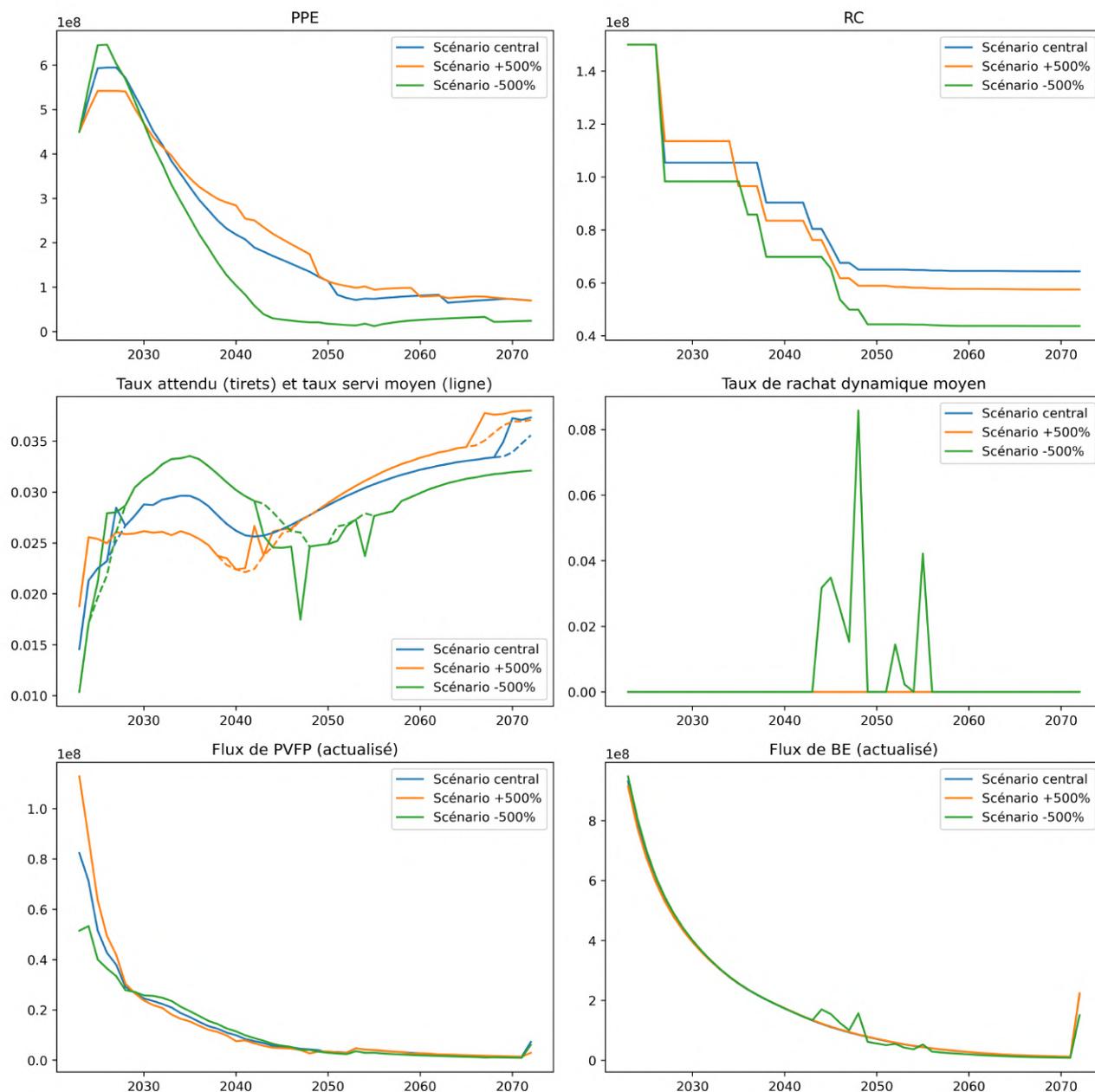


FIGURE A.8 : Evolution déterministe du scénario à rachats dynamiques plus sensibles.

Nom scénario	Type	BE det.	PVFP det.	BE sto.	PVFP sto.	TVOG (valeur)	TVOG (%VM0)	Indicateur sensibilité
CENTRAL	-500%	9 405 641 529	604 249 977	9 530 555 943	479 335 563	124 914 413	1,25%	0,621%
	0%	9 359 310 762	650 580 744	9 498 228 966	511 662 540	138 918 204	1,39%	
	500%	9 316 996 699	692 894 807	9 468 398 771	541 492 734	151 402 073	1,51%	
TMG = 0%	-500%	9 402 034 502	607 857 004	9 516 004 881	493 886 625	113 970 379	1,14%	0,658%
	0%	9 357 169 703	652 721 802	9 482 053 630	527 837 875	124 883 927	1,25%	
	500%	9 311 721 700	698 169 806	9 450 128 667	559 762 838	138 406 967	1,38%	
TMG + 100bps	-500%	9 409 443 179	600 448 327	9 671 675 233	338 216 273	262 232 054	2,62%	0,363%
	0%	9 364 293 067	645 598 439	9 643 220 036	366 671 470	278 926 969	2,79%	
	500%	9 325 574 983	684 316 523	9 635 302 558	374 588 948	309 727 574	3,09%	
Investissement obligataire uniforme (30 ans)	-500%	9 388 879 129	621 012 376	9 600 611 417	409 280 089	211 732 288	2,12%	-0,211%
	0%	9 402 950 035	606 941 471	9 610 830 004	399 061 502	207 879 969	2,08%	
	500%	9 429 646 105	580 245 400	9 621 756 024	388 135 482	192 109 919	1,92%	
Taux attendu = max(n3, r1, r10)	-500%	9 412 220 996	597 670 509	9 864 252 137	145 639 369	452 031 140	4,52%	1,125%
	0%	9 365 238 666	644 652 840	9 790 497 215	219 394 290	425 258 550	4,25%	
	500%	9 317 433 328	692 458 177	9 751 620 533	258 270 972	434 187 205	4,34%	
Rachats dynamiques plus sensibles	-500%	9 421 528 082	588 363 424	9 733 655 955	276 235 551	312 127 873	3,12%	0,775%
	0%	9 359 310 762	650 580 744	9 691 736 754	318 154 751	332 425 992	3,32%	
	500%	9 316 996 699	692 894 807	9 656 115 345	353 776 160	339 118 647	3,39%	
Combinaison des 2 scénarios précédents	-500%	9 421 528 082	588 363 424	10 240 289 140	-230 397 634	818 761 058	8,18%	1,854%
	0%	9 359 310 762	650 580 744	10 117 225 885	-107 334 379	757 915 123	7,57%	
	500%	9 316 996 699	692 894 807	10 054 681 660	-44 790 154	737 684 962	7,37%	
Population jeune	-500%	8 479 222 681	1 530 668 825	8 695 650 594	1 314 240 912	216 427 912	2,16%	-0,148%
	0%	8 458 905 796	1 550 985 710	8 699 230 572	1 310 660 934	240 324 776	2,40%	
	500%	8 443 798 821	1 566 092 685	8 710 453 090	1 299 438 416	266 654 269	2,66%	
Population âgée	-500%	9 744 851 260	265 040 246	9 920 117 777	89 773 729	175 266 517	1,75%	1,528%
	0%	9 684 238 219	325 653 286	9 840 430 253	169 461 252	156 192 034	1,56%	
	500%	9 625 551 343	384 340 162	9 767 163 626	242 727 880	141 612 282	1,41%	

FIGURE A.9 : Résultats agrégés sur les scénarios de sensibilité.