

**Mémoire présenté devant l'Institut du Risk Management  
pour la validation du cursus à la Formation d'Actuaire  
de l'Institut du Risk Management  
et l'admission à l'Institut des actuaires  
le**

Par : Anh Tuan Antoine NGUYEN

Titre : Calibrage d'un choc local du risque longévité en arrêt de travail

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

Membres présents du jury de l'Institut des  
actuaires :

---

---

---

Entreprise : AXA France

Nom : Anaïs NG LIET HING

Signature et Cachet :



Membres présents du jury de l'Institut du Risk  
Management :

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Anaïs NG LIET HING

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

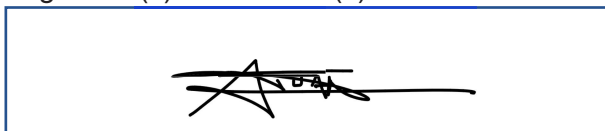
**Autorisation de publication et de mise en  
ligne sur un site de diffusion de documents  
actuariels**

*(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise



Signature(s) du candidat(s)



Secrétariat :

Bibliothèque :



## Table des matières

---

Résumé.....	5
Abstract .....	7
Note de synthèse.....	9
Synthesis note .....	15
Remerciements .....	21
Introduction.....	23
1 Contexte de l'étude.....	25
1.2. Prévoyance en France.....	25
1.2.1. Sécurité sociale française .....	25
1.2.2. Contrats prévoyance complémentaire .....	28
1.2.3. Provisions techniques.....	32
1.3. Solvabilité 2.....	36
1.2.1. Présentation de Solvabilité 2 .....	36
1.2.2. Estimation du SCR .....	38
1.2.3. Arrêt de travail et les modules de risques .....	40
2 Construction de tables prospectives.....	43
2.1. Objectif de l'étude .....	43
2.2. Données.....	43
2.2.1. Human Mortality Database .....	43
2.2.2. Données AXA.....	45
2.2.3. Comparaison des deux sources de données.....	47
2.3. Mortalité population nationale .....	49
2.3.1. Modèle Lee Carter .....	50
2.3.2. Modèle Age Period Cohort.....	52
2.3.3. Modèle Cairns Blake Dowd .....	54
2.3.4. Projection des modèles.....	55
2.3.5. Choix du modèle.....	58
2.4. Portefeuille AXA.....	62
2.4.1. Estimateur des moments de Hoem.....	62
2.4.2. Lissage Whittaker-Henderson .....	64
2.5. Modèle relationnel .....	69
2.6. Projection des modèles stochastiques .....	70
2.7. Calibrage du choc pour les Provisions Mathématiques .....	72

2.8.	Application du choc sur les provisions mathématiques d'invalidité.....	73
2.9.	Conclusion .....	76
3	Matrice d'évolution .....	77
3.1.	Objectif de l'étude .....	77
3.2.	Données.....	78
3.2.1.	Extractions.....	78
3.2.2.	Statistiques du portefeuille .....	79
3.3.	Méthode .....	80
3.3.1.	Estimateur de Kaplan Meier.....	80
3.3.2.	Construction des matrices.....	83
3.3.3.	Construction de lois de maintien choqués.....	86
3.3.4.	Estimation du choc bicentenaire.....	88
3.4.	Application.....	88
3.5.	Conclusion .....	90
4	Conclusion .....	91
5	Bibliographie .....	93
6	Annexes .....	95
6.1.	Choix de la plage d'étude .....	95
6.2.	Plafonnement des évolutions de mortalité.....	96

## Résumé

---

Dans le cadre de solvabilité 2 et plus particulièrement le calcul du capital de solvabilité requis, un scénario de longévité doit être modélisé pour les assureurs proposant des contrats de prévoyance. Dans la formule standard, ce scénario correspond à une diminution des taux de mortalité de 20% pour les produits de retraite, d'épargne ou de prévoyance.

Ce mémoire a pour objectif d'étudier deux approches permettant d'estimer un choc de longévité qui pourrait être associé spécifiquement à un portefeuille prévoyance.

Dans un premier temps, une étude a été réalisée en construisant des tables de taux de mortalité dont le calibrage a été effectué sur la population française issue des données *Human Mortality Database*. Ces tables sont ensuite ajustées au niveau des assurés couverts par un contrat de prévoyance collective AXA.

Le choc de longévité est obtenu en projetant ces tables de taux de mortalité dans lesquelles une volatilité est ajoutée pour créer différents scénarios de longévité.

Dans un second temps, un choc a été construit à partir des améliorations des probabilités de décès observées sur les salariés en invalidité du portefeuille d'AXA. Ces améliorations serviront à modifier de manière stochastique les probabilités de décès estimées dans la table du Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC). Ces tables de maintien modifiées permettront de créer un scénario de longévité en les appliquant sur les provisions mathématiques des invalides du portefeuille.

Ces deux chocs sont finalement comparés avec celui de la formule standard, afin d'étudier un choc plus adapté aux contrats de prévoyance.

Mots clés : Solvabilité 2, SCR, longévité, prévoyance, invalidité



## Abstract

---

In Solvency 2 framework and more specifically the assessment of the solvency capital required, a longevity risk has to be modeled by insurers offering group protection products. In standard formula, this scenario corresponds to a 20% decrease in mortality rates for pension, saving and protection products.

This paper offers two alternative stress level for longevity risk, that could be specifically adapted to a group protection portfolio.

The first approach consists in creating mortality tables, calibrated on the French population from the *Human Mortality Database*. These tables are then adjusted to the mortality level of policyholders covered by an AXA group protection product.

The longevity shock is obtained from stochastic projections of these mortality tables, in which a volatility is added.

The second approach is based on mortality improvements observed on AXA's long-term disabilities portfolio. These improvements are used to randomly modify the mortality estimated on the Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC) table. These modified survival tables will create a longevity risk.

Finally, these two shocks are compared with the stress level of standard formula in order to challenge it level for group protection business.

Key words: Solvency 2, SCR, longevity, protection, long term disability





## Note de synthèse

---

L'entrée en vigueur de la réglementation Solvabilité 2 en 2016 impose aux assureurs d'avoir un niveau de fonds propres suffisant pour honorer leurs engagements.

Ce montant, appelé Solvency Capital Requirement (SCR), peut être estimé en simulant des scénarios stressés sur le bilan économique d'un assureur. Ces scénarios sont décrits dans la formule standard partagée par la réglementation européenne. Un assureur peut cependant déroger à celle-ci lorsqu'il développe un modèle interne afin de représenter une vision plus précise des risques auxquels il est exposé.

Un risque de longévité doit être quantifié pour les contrats de prévoyance. Ce risque représente une longévité des salariés en invalidité plus importante que celle estimée dans le passif d'un assureur.

Dans le règlement délégué communiqué par la commission européenne, le scénario de longévité est matérialisé par une baisse soudaine et permanente de 20 % des taux de mortalité utilisés dans le calcul des provisions techniques.

Ce niveau de choc est similaire pour tous les contrats soumis au risque de longévité des modules *Health* et *Life* indiqués dans la formule standard. Par conséquent, le niveau de choc est identique pour un contrat collectif ou individuel mais également pour un contrat prévoyance, retraite ou épargne.

Ce mémoire propose ainsi deux scénarios de longévité qui pourraient être adaptés au portefeuille de prévoyance collective d'AXA France.

Dans un premier temps, le calibrage du choc est construit à partir de tables de mortalité prospectives. L'étude est réalisée sur des données de la population nationale française issues du site *Human Mortality Database* (HMD).

En utilisant les données de 1990 à 2020 de HMD, trois modèles sont construits pour estimer des taux de mortalité de la population française par sexe, âge et en fonction du temps :

- M1 - Lee Carter :  $\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \beta_x^2 \kappa_t^2$
- M3 - Age Period Cohort :  $\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \frac{1}{n_a} \kappa_t^2 + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^3$
- M5 - Cairns Blake Dowd :  $\text{logit } q(x, t) = \kappa_t^1 + \kappa_t^2 (x - \bar{x})$

dont les facteurs :

- $\beta$  permet de décrire le taux de mortalité selon l'âge  $x$ ,
- $\kappa$  permet de tenir compte du changement de taux de mortalité en fonction du temps  $t$ ,
- $\gamma_{t-x}^3$  permet d'ajouter un effet cohorte (génération),
- $n_a$  représente le nombre d'âges étudiés,
- $\bar{x}$  représente la moyenne des âges étudiés

Les deux premiers modèles estiment le taux de mortalité central  $m(x, t)$ , qui correspond au nombre de décès à un âge  $x$  rapporté au nombre de personnes vivantes d'âge  $x$  en moyenne sur l'année  $t$ .

Le dernier modèle estime la probabilité de décès  $q(x, t)$ , qui correspond au nombre de décès à un âge  $x$  rapporté au nombre de personnes vivantes d'âge  $x$  au début de l'année  $t$ .

Le modèle de *Lee Carter*, est l'un des modèles de mortalité les plus connus pour estimer des taux de mortalité. Ce modèle a la particularité d'être simple et intègre uniquement des facteurs en fonction de l'âge et du temps.

Le modèle *Age Period Cohort* est un modèle plus complexe que le modèle Lee Carter. Celui-ci capture les effets du temps mais également générationnels (cohortes) qui sont indépendants de l'effet âge.

Le modèle *Cairns, Blake and Dowd* a la particularité d'estimer les taux de mortalité essentiellement en tenant compte de l'effet du temps. L'âge n'est pas utilisé comme un coefficient mais comme une variable dans ce modèle.

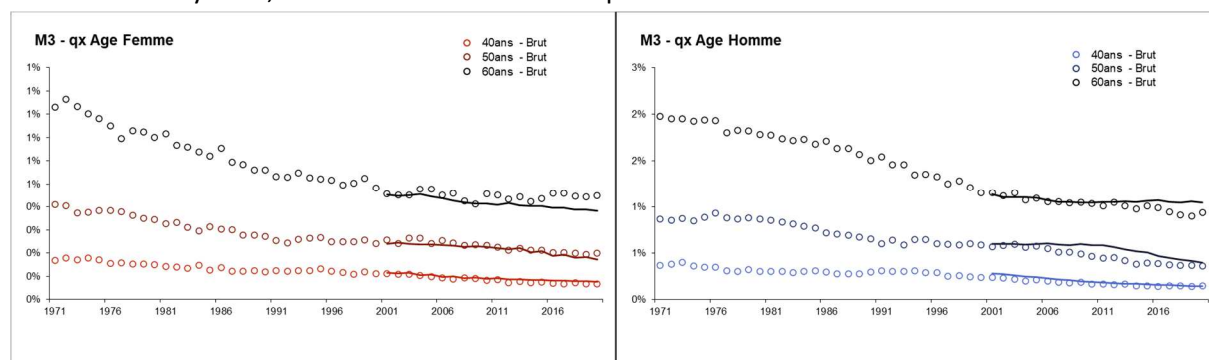
Une fois le calibrage des modèles sur la période 1990-2020 réalisé, il est possible d'estimer les taux de mortalité futurs en projetant les paramètres  $\kappa_t$  et  $\gamma_{t-x}$  qui dépendent du temps dans les modèles :

- Le paramètre  $\kappa_t$  principal ( $\kappa_t^2$  pour les modèles M1 et M3, et  $\kappa_t^1$  pour le modèle M5) sera modélisé par une régression linéaire.
- Le second  $\kappa_t^2$  présent dans le modèle M5 sera construit de manière plus simple en incrémentant la valeur précédente ( $\kappa_{t-1}^2$ ) par une constante.
- Le coefficient  $\gamma_{t-x}^3$  est quant à lui construit selon un modèle Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA).

Afin de sélectionner le meilleur modèle pour estimer les taux de mortalité de la population française, un backtesting est réalisé sur les données de 1971 à 2020.

Les 30 premières années sont utilisées pour calibrer les modèles et les 20 dernières ont servi à juger de la qualité des trois modèles projetés en les comparant avec les résultats réels.

Ainsi, en observant les résultats graphiques et les tests tels que le Standardized Mortality Ratio (SMR) ou le critère bayésien, le modèle M3 a été retenu pour les hommes et les femmes.



Les graphes ci-dessus permettent de comparer les résultats entre les probabilités de décès brutes et les probabilités de décès estimées à travers le modèle M3 sur la période 2001 et 2020.

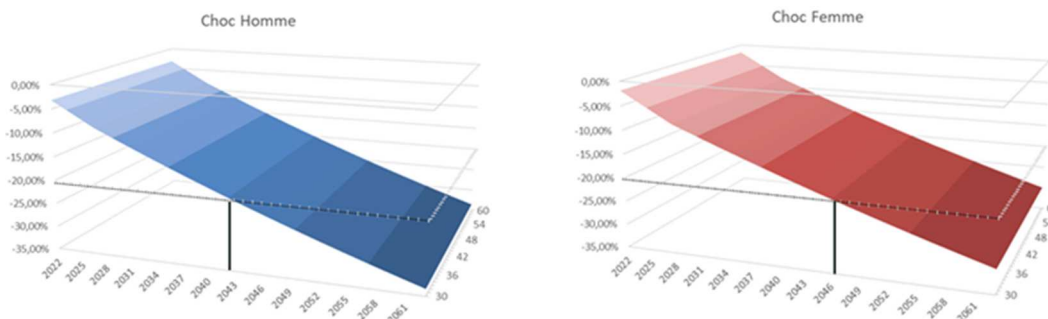
Les points présentent les probabilités de décès brutes obtenues sur la période 1971 à 2020 pour les âges de 40, 50 et 60 ans et les courbes représentent les probabilités de décès estimées sur la période 2001 à 2020 pour ces mêmes âges.

Le modèle M3 prédit des probabilités de décès très proches des résultats empiriques à 40 ans pour les femmes et les hommes.

Après cette première étape, les probabilités de décès des assurés en prévoyance collective d'AXA sont étudiées dans l'objectif d'ajuster les modèles calibrés sur la population nationale sur ce portefeuille. Cet ajustement est obtenu à partir du modèle de Brass qui permet de trouver une relation logistique entre les probabilités de décès de deux populations.

Une fois cet ajustement effectué, les modèles sont projetés de manière stochastique en modifiant la régression linéaire du paramètre  $\kappa_t$  par l'ajout d'un bruit. Cet élément vient modifier la trajectoire de la droite estimée par la régression linéaire et ainsi perturber l'amélioration des taux de mortalité dans le modèle.

Le choc de longévité est obtenu en calculant le rapport des probabilités de décès par sexe, âge et année entre le scénario sans bruit (central) et le scénario correspondant au quantile 99,5% :



Les graphes ci-dessus présentent les chocs obtenus en fonction du sexe, de l'âge et du temps.

Les chocs des femmes sont légèrement plus faibles que ceux des hommes.

En effet, le niveau de -20% est atteint en 2043 pour les hommes contrairement aux femmes pour lesquelles ce niveau est atteint en 2046.

Le choc de longévité se traduit par une amélioration des probabilités de décès plus importante que celle estimée par un assureur. Dans cette étude, la déviation de longévité non estimée est décroissante en fonction du temps. En observant le graphe des hommes, la déviation est seulement de -4% en 2022 puis atteint -20% en 2043.

Cette modélisation est différente du choc de la formule standard qui propose une amélioration des taux de mortalité constante de -20%.

Cependant, cette étude est construite pour les salariés actifs d'un contrat de prévoyance collective. Or le choc est appliqué sur les salariés en invalidité.

Une seconde étude vient ainsi compléter ce mémoire dans laquelle le choc est entièrement centré sur les données des salariés AXA en invalidité. L'objectif est d'analyser les évolutions des probabilités de décès observées sur ce portefeuille et de les utiliser sur les provisions mathématiques des invalides AXA pour estimer un scénario de longévité.

Ces évolutions sont analysées par année de survénance en invalidité et par ancienneté. Elles sont sauvegardées dans une matrice contenant les évolutions des probabilités de décès par année d'ancienneté notée  $HistEvol(a)$ .

Ces résultats sont utilisés par la suite pour créer des scénarios stochastiques de déviation des probabilités de décès. Ces scénarios viennent ainsi modifier l'estimation des provisions mathématiques des invalides du portefeuille.

Pour cela, les probabilités de décès contenues dans la table du Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC), qui sont exprimées en fonction de l'âge à la survenance de l'invalidité et par ancienneté, sont modifiées par une évolution de probabilité de décès observée sur le portefeuille d'AXA. Cette évolution est sélectionnée de manière aléatoire parmi les résultats obtenus pour ce niveau d'ancienneté :

$$tx(choc_i, x, a) = Aléa(HistEvol(a))$$

Avec

$x$  : âge entrée en invalidité

$a$  : ancienneté en invalidité en année

$choc_i$  : scénario  $i$  généré

$tx(choc_i, x, a)$  : taux d'évolution retenu pour le scénario  $choc_i$  pour modifier la probabilité de décès contenue dans la table de maintien du BCAC pour un âge en invalidité  $x$  et ancienneté  $a$

$HistEvol(a)$  : liste des évolutions des probabilités de décès observées sur le portefeuille pour une ancienneté  $a$

$Aléa()$  : fonction aléatoire permettant de récupérer une valeur dans une liste

Ainsi, plusieurs lois de maintien sont construites de la manière suivante :

$$l_{a+1}^x(choc_i) = l_a^x(choc_i) \times \left[ 1 - \left[ \left[ 1 - \frac{l_{a+1}^x(BCAC)}{l_a^x(BCAC)} \right] \times (1 + tx(choc_i, x, a)) \right] \right]$$

où

$x$  : âge entrée en invalidité

$a$  : ancienneté en invalidité en année

$l_a^x(BCAC)$  : nombre d'invalides à l'âge  $x$  et d'ancienneté  $a$  issu de loi de maintien du BCAC

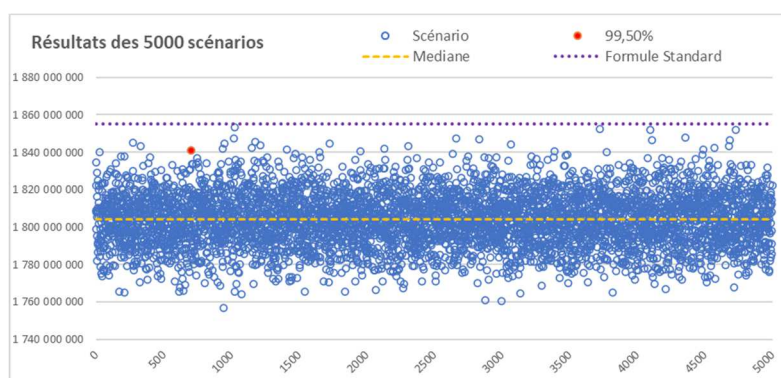
$choc_i$  : scénario  $i$

$l_a^x(choc_i)$  : nombre d'invalides à l'âge  $x$  et d'ancienneté  $a$  pour le scénario  $choc_i$

$tx(choc_i, x, a)$  : taux d'évolution retenu pour le scénario  $choc_i$  pour modifier la probabilité de décès contenue dans la table de maintien du BCAC pour un âge en invalidité  $x$  et ancienneté  $a$

A partir de cette méthode, 5 000 tables de maintien stochastiques sont construites. L'objectif est de calculer différents montants de provisions mathématiques (PM) des invalides présents au 31/12/2021.

Ces différents montants de PM sont ensuite ordonnés afin de déterminer la provision correspondant au 99,5% de ces différents scénarios :



Dans le graphe ci-dessus, chaque point bleu représente un scénario.

Le point rouge représente le scénario correspondant au quantile 99,5% des PM les plus élevées. Pour ce scénario, la PM globale se situe à 1,84 Mds €. Ce niveau est plus faible que la PM choquée depuis la formule standard (illustrée par la droite violette).

Cette seconde étude permet ainsi d'estimer un choc de longévité construit sur les salariés en invalidité du portefeuille d'AXA. Ce choc est obtenu de manière empirique à partir des améliorations des taux de mortalité observées. Similaire à la première étude, ce choc ne correspond pas à un taux unique comme la formule standard mais il est variable selon l'ancienneté en invalidité.

Ainsi dans le cadre de ce mémoire, deux chocs de longévité ont été étudiés pour des contrats de prévoyance collective.

	Niveau de choc	PM	Delta de PM	Choc équivalent
Central	-	1,81 Mds		-
Formule standard	-20%	1,85 Mds	0,045 Mds	-20%
Choc local 1	En fonction du sexe, temps, âge	1,82 Mds	0,015 Mds	-7%
Choc local 2	Données historiques	1,84 Mds	0,032 Mds	-14%

Ces deux études illustrent que le choc de la formule standard est conservateur pour ce périmètre. L'impact d'un risque de longévité est moins structurant étant donné que cette garantie couvre seulement la population des personnes en activité et prend fin à l'âge légal de départ à la retraite.

De plus, le risque de longévité concerne uniquement les rentiers dont leur état est consolidé. Cela concerne donc le périmètre des assurés en invalidité pour lequel l'âge moyen de survenance observé se situe autour de 50 ans.

Le risque de longévité est de plus courte durée pour des contrats de prévoyance (rente temporaire) que des contrats de retraite ou épargne (rente viagère), cela implique potentiellement un choc de longévité plus faible pour les contrats de prévoyance.

Ces deux études viennent ainsi corroborer cette intuition. Cependant, celles-ci possèdent plusieurs limites dans leur construction.

La première étude repose essentiellement sur les données historiques pour prédire le futur. Cette hypothèse est une des limites de cette méthode. Les avancées médicales pourraient avoir un impact significatif sur la mortalité dans le futur. La longévité serait ainsi très différente des résultats proposés par cette modélisation.

De plus, le modèle relationnel a permis d'ajuster les modèles des taux de mortalité sur des assurés en activité. Or ce choc est appliqué uniquement sur des salariés en invalidé dont le taux de mortalité est potentiellement plus important que celui des actifs.

L'observation des résultats par année de survenance dans la seconde étude montre que celle-ci présente de fortes volatilités malgré un âge moyen stable et un volume initial relativement conséquent.

L'étude peut être limitée au niveau de la robustesse de l'analyse des résultats par année de survenance, notamment pour les anciennetés les plus élevées pour lesquelles le volume de données est faible. Une approche en analysant les évolutions par un regroupement de deux ou cinq ans de survenance pourrait améliorer la fiabilité de cette étude.

## Synthesis note

---

Since Solvency II has been implemented in 2016, insurers must have a minimum amount of capital in order to meet their obligations.

This amount, called the Solvency Capital Requirement (SCR), is estimated by simulating stressed scenarios affecting the insurer's balance sheet. These scenarios are described in the standard formula shared by the European regulator. However, an insurer can develop its own internal model in order to better represent the risks it is exposed to.

A longevity risk must be assessed for group protection contracts. This risk represents a longevity of long-term disabilities, not anticipated in the mathematical reserves of the insurer.

The longevity scenario currently corresponds to a 20% decrease in the mortality rates used in the calculation of the technical reserves.

This shock level is the same for both Health and Life modules stated in standard formula. It is thus similar for a group or individual contract but also for a protection, pension or saving contract.

This paper offers two alternative stress level for longevity risk that could be specifically adapted to AXA France's group protection portfolio.

The first approach consists in a shock is built from prospective mortality tables. The study is elaborated from data of the French population from the Human Mortality Database (HMD).

Based on HMD data between 1990 and 2020, three models are built to estimate the mortality rates of the French population by sex, age and time:

- M1 - Lee Carter :  $\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \beta_x^2 \kappa_t^2$
- M3 - Age Period Cohort :  $\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \frac{1}{n_a} \kappa_t^2 + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^3$
- M5 - Cairns Blake Dowd :  $\text{logit } q(x, t) = \kappa_t^1 + \kappa_t^2 (x - \bar{x})$

with :

$\beta$  reflects the age effects where  $x$  denotes the age,

$\kappa$  reflects the period effects where  $t$  denotes the time,

$\gamma_{t-x}^3$  reflects the cohort effects,

$n_a$  is the number of ages covered,

$\bar{x}$  is the mean age

The first two models estimate the central rate of mortality  $m(x, t)$ , which corresponds to the number of deaths at age  $x$  divided by the averaged number of living persons of age  $x$  over a period  $t$ .

The last model estimates the probability of death  $q(x, t)$ , which corresponds to the number of deaths at age  $x$  divided by the number of living persons of age  $x$  at the beginning of the period  $t$ .

The *Lee-Carter* model is the most popular model for estimating mortality rates.

This model has the particularity of being simple and integrating age and time factors.

The *Age Period Cohort* is a more complex model than the Lee Carter model. This model takes into account the effects of time but also generational (cohorts) which are independent of the age effect.

The *Cairns, Blake and Dowd* model has the particularity of estimating mortality rate essentially by taking into account the effect of time. Age is not used as a coefficient but as a variable in this model.

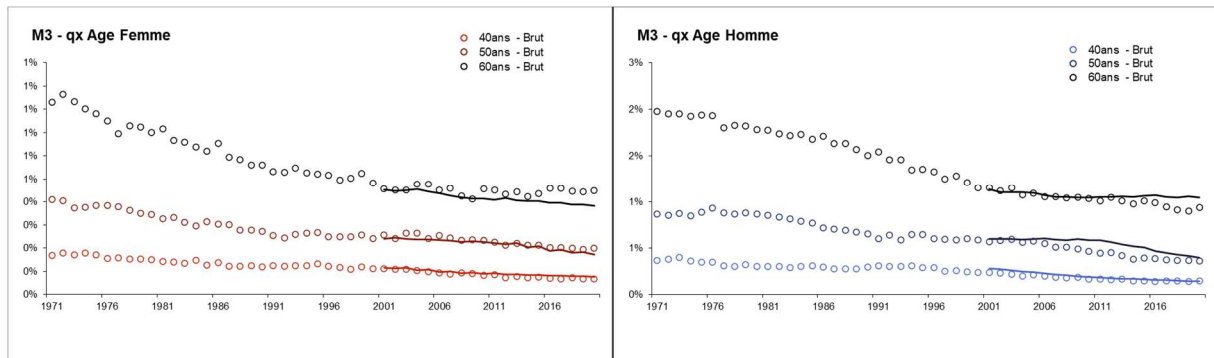
Once the models are calibrated over this period, future mortality rates can be estimated by projecting the parameters  $\kappa_t$  and  $\gamma_{t-x}$ :

- The main  $\kappa_t$  parameter ( $\kappa_t^2$  for M1 and M3 models, and  $\kappa_t^1$  for model M5) is modeled by a linear regression.
- The second  $\kappa_t$  ( $\kappa_t^2$  for M5 model) is constructed by incrementing the previous value ( $\kappa_{t-1}^2$ ) by a constant.
- The  $\gamma_{t-x}^3$  coefficient is modeled by an Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA) model.

In order to select the best model to estimate the French population mortality, a backtesting is performed by using data from 1971 to 2020.

The first 30 years are used to calibrate the models and the last 20 years are used to compare the real rates with these three projected models.

From graphical results and indicators such as the Standardized Mortality Ratio (SMR) or Bayesian criterion, the M3 model was selected for both men and women.



The graphs compare the results between the observed probabilities of death and the probabilities of death estimated through the M3 model over the period 2001 and 2020.

The dots show the observed probabilities of death from 1971 to 2020 for the ages of 40, 50 and 60 and the covers represent the estimated probabilities of death over the period 2001 to 2020 for these same ages.

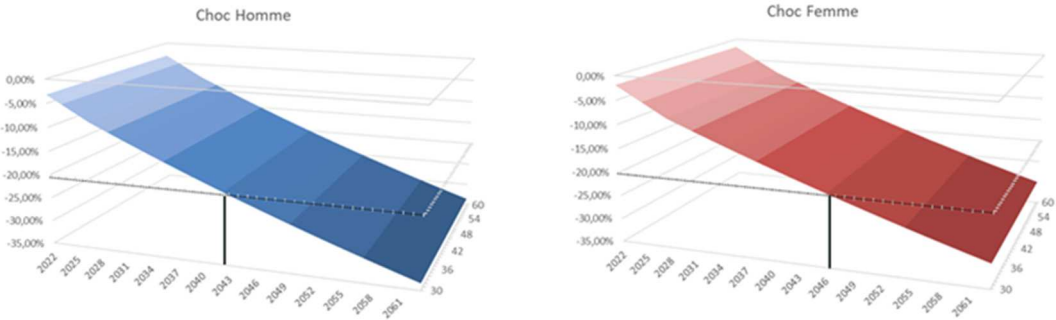
The M3 model predicts mortality rates are very close to the observed rates at age 40 for women and men.

The model thus obtained is then adjusted to AXA's group protection portfolio mortality. This adjustment is made with Brass model, which finds a logistic relationship between the death probabilities of both populations.



Once this adjustment is done, stochastic projections are made by adding a noise on the linear regression used for the parameter  $\kappa_t$ . This noise modifies the trajectory of the line estimated by the linear regression and thus disturbs the mortality rates improvement in the model.

The longevity shock then corresponds to the gap between the death probabilities of central scenario and the death probabilities of the scenario corresponding to the 99.5 percentil of these obtained projections:



The graphs above show the shocks obtained by gender, age and time. The shocks for women are slightly lower than those for men. Indeed, the level of -20% is reached in 2043 for men contrary to women for whom this level is reached in 2046.

The longevity shock is driven by an improvement in mortality rates which is not anticipated by insurers. These first results show that, this deviation is decreasing with time. The deviation in the graph for men is only -4% in 2022 and then reaches -20% in 2043.

This effect is not captured with the standard formula shock which is a flat value (-20%).

However, this study is built from a group life portfolio of active employees, whereas the shock is only applied to employees on long term disability.

A second study then completes this paper, focusing on the population of AXA’s employees being in long term disability. The objective is to analyze the evolution of mortality rates observed on this portfolio and to use them on the reserves of the long term disabilities to estimate a longevity scenario.

The mortality improvements are analyzed by year of disability occurrence and by duration. These results are then saved in a matrix containing the evolution of mortality rates by duration in disability noted HistEvol(a).

The results are used to create stochastic scenarios of mortality rate deviation scenarios that will modify the estimation of the reserves of the long term disabilities.

The mortality rates from Bureau Commun d’Assurances des Collectives (BCAC) table, which are calculated by age at disability and by duration, are adjusted with the evolution observed on AXA’s portfolio. This evolution is picked randomly among the results obtained by duration in disability:

$$tx(choc_i, x, a) = \text{Random}(\text{HistEvol}(a))$$

with

$x$  : age of disability entry



$a$  : duration in disability in years

$choc_i$  : scenario  $i$  generated

$tx(choc_i, x, a)$  : evolution rate retained for scenario  $choc_i$  to modify the mortality rate of the BCAC table for an age in disability  $x$  and duration  $a$

HistEvol( $a$ ) : list of mortality rate evolutions observed on the portfolio for a duration  $a$

Random() : random function to get a value in a list

Several survival tables are constructed as follows:

$$l_{a+1}^x(choc_i) = l_a^x(choc_i) \times \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{l_{a+1}^x(BCAC)}{l_a^x(BCAC)} \right] \times (1 + tx(choc_i, x, a)) \right]$$

with

$x$  : age of disability entry

$a$  : duration in disability in years

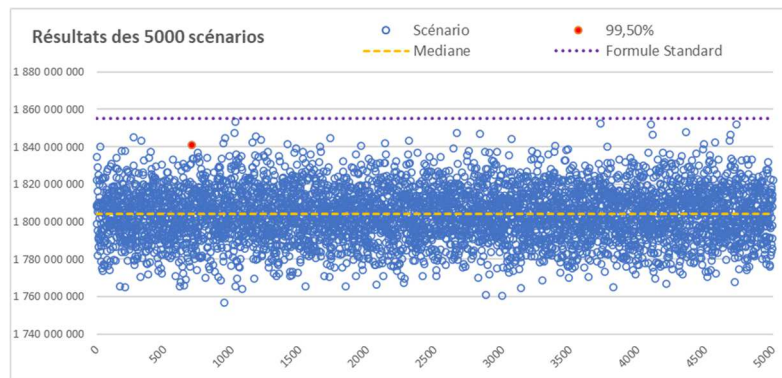
$l_a^x(BCAC)$ : number of disabled people at age  $x$  and duration  $a$  from BCAC table  $choc_i$ : the scenario  $i$

$l_a^x(choc_i)$  : number of disabled people at age  $x$  and duration  $a$  for the scenario  $i$

$tx(choc_i, x, a)$  : evolution rate retained for scenario  $choc_i$  to modify the death probability of the BCAC table for an age in disability  $x$  and duration  $a$

From this method, 5 000 stochastic survival tables are built in order to calculate different amounts of the reserves of the long term disabilities as at 31/12/2021.

These different reserves amounts are then be ranked to look for get the 99,5 percentil



In the graph above, each blue point represents a scenario.

The red point represents the scenario corresponding to the 99,5 percentil. For this scenario, the reserves amount to €1.84 billion. This level is lower than the reserves shocked from the standard formula (illustrated by the purple line).

This second study estimates a longevity shock based on the disabled employees of the AXA's portfolio. This shock is obtained empirically from the observed mortality improvements. Similar to the first study, this shock is not a flat rate as per the standard formula but it depends on the duration in disability.

Two longevity shocks were finally obtained for group protection with this paper:

	Niveau de choc	PM	Delta de PM	Choc équivalent
Central	-	1,81 Mds		-
Formule standard	-20%	1,85 Mds	0,045 Mds	-20%
Choc local 1	En fonction du sexe, temps, âge	1,82 Mds	0,015 Mds	-7%
Choc local 2	Données historiques	1,84 Mds	0,032 Mds	-14%

These results show that the shock of the standard formula is conservative for this scope. The impact of a longevity risk is less significant because this guarantee covers only the active population and ends at the legal retirement age.

Furthermore, the longevity risk only concerns disabled employees whose age at disability, when consolidated, is usually around 50.

As the longevity risk is shorter for protection contracts (temporary annuity) than for pension or savings contracts (life annuity), this potentially implies a lower longevity shock for protection contracts.

These two studies valid this intuition. However, there are several limitations in their construction. The first study relies mainly on historical data to predict the future. Medical advances, which can have a significant impact on mortality in the future are thus not captured. Longevity should be different from the results proposed by this modeling.

Moreover, the relational model has allowed to adjust the mortality rates on active policyholders, whereas this shock is only applied to disabled employees whose mortality rate is potentially higher than active policyholders.

Looking at the results by disability year in the second study shows that the evolution rate is highly volatile despite a stable average age and a relatively large initial volume.

The study may be limited in terms of the robustness with results analyzed by year of occurrence. An approach that would analyze changes by grouping two or five years of occurrence may improve the stability of this study.



## Remerciements

---

Tout d'abord, je tiens à remercier la Direction Technique Notoriété & Innovation et la Direction Data Santé et Collectives pour leur soutien et leur disponibilité pour réaliser ce mémoire.

Je tiens à remercier chaleureusement l'équipe Normes Etudes et Modèle et plus particulièrement à Anaïs Ng Liet Hing, Aminatou Bah et El Hadji Ndiaye pour leur expertise et leur conseil.

Je remercie également Katell Clere, Anne Fahy et Fabienne Cazals, qui m'ont mis dans les meilleures conditions professionnelles pour réussir cette formation.

Enfin un immense merci à ma famille et mes proches qui m'ont soutenu durant cette formation.



## Introduction

---

Les contrats de prévoyance collective permettent de couvrir les salariés d'une entreprise contre les aléas de la vie. Pour cela, ces contrats proposent généralement des couvertures en cas de décès et d'arrêt de travail.

Les garanties d'arrêt de travail se décomposent en deux parties. La première partie concerne l'incapacité temporaire de travail, qui consiste à verser des indemnités journalières pour maintenir la rémunération du salarié en cas de maladie ou d'accident. La seconde partie correspond à l'invalidité permanente, cette garantie permet de verser une pension lorsqu'un assuré se trouve dans un état d'invalidité physique ou mentale atténuant son état général ou sa capacité de travail.

Ainsi, les assureurs doivent avoir la capacité de respecter leurs engagements face à des risques techniques et financiers.

La directive Solvabilité 2 entrée en vigueur en 2016 a renforcé les exigences de solvabilité des assureurs afin d'éviter des risques de faillite. Pour cela, un capital de solvabilité requis (*Solvency Capital Requirement : SCR*) devra être immobilisé par les assureurs, ce montant est estimé à travers des approches par scénarios stochastiques pour couvrir un risque bicentenaire à horizon un an.

Dans le règlement délégué 2015/35, une méthode d'estimation appelée formule standard est proposée pour estimer ce capital à immobiliser. Le risque d'arrêt de travail se trouve à la frontière de deux modules de risque dans la formule standard : le module de risque santé non assimilé aux techniques d'assurance vie (*Non-SLT Health*) et le module de risque santé assimilé aux techniques d'assurance vie (*SLT Health*).

En effet, les contrats de prévoyance annuels peuvent être traités jusqu'à la consolidation des sinistres d'incapacité ou d'invalidité en attente à l'aide de méthodes techniques d'assurance non vie.

Après consolidation, les rentes sont modélisées dans le module *SLT Health*, dans lequel les méthodes d'assurance vie sont plus adaptées pour mesurer le risque en utilisant des lois biométriques.

Dans la formule standard, le scénario de longévité est caractérisé par une baisse de 20% des taux de mortalité utilisés dans le calcul des provisions techniques.

Le choc proposé dans la formule standard est identique pour le module *SLT Health – Longevity* et le module *Life – Longevity*. Cela signifie que le choc est similaire pour un contrat de prévoyance et un contrat de retraite mais également pour un contrat individuel et collectif.

Ainsi, ce mémoire a pour objectif de confronter ce niveau de choc, calibré au niveau européen, à des estimations calibrées sur le portefeuille prévoyance d'AXA France Collectives.

Deux méthodes seront réalisées dans ce mémoire, la première consistera à créer des tables de mortalité prospectives basées sur la population française qui seront par la suite ajustées au portefeuille d'AXA. La seconde méthode consistera à réaliser une matrice d'évolution basée sur les observations des taux de mortalité des invalides du portefeuille d'AXA, celle-ci sera utilisée pour générer plusieurs estimations des provisions mathématiques des sinistres en cours, en modifiant la loi de maintien des invalides du Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC).





# 1 Contexte de l'étude

---

Afin d'identifier les enjeux du risque arrêt de travail et les réflexions qui ont mené à cette étude, cette première partie présente le fonctionnement de la prévoyance en France et l'impact de Solvabilité 2 sur les contrats de prévoyance complémentaire depuis sa mise en vigueur.

## 1.2. Prévoyance en France

Les contrats de prévoyance collective sont des couvertures venant en complément des indemnités versées par la Sécurité sociale française.

La partie ci-dessous présentera dans un premier temps la part prise en charge par la Sécurité sociale française puis dans un second temps la part prise par les contrats de prévoyance complémentaire.

### 1.2.1. Sécurité sociale française

La Sécurité sociale française a été créée en 1945 dans le but de protéger la population française des risques sociaux.

Elle repose sur un principe de financement solidaire qui est établi en fonction du secteur d'activité professionnelle. Ces secteurs sont regroupés selon 3 régimes qui fonctionnent et proposent des couvertures différentes :

- Régime général : régime des salariés ainsi que des travailleurs indépendants depuis 2018
- Régime agricole : régime des salariés et exploitants agricoles
- Régimes spéciaux : régimes spéciaux tels que la SNCF ou les fonctionnaires...

Le régime général, qui couvre environ 90% de la population française, se divise en six branches qui sont chargées de la gestion d'un ensemble de risques :

- Branche maladie : prise en charge des dépenses de santé, elle couvre également les risques de maladie, maternité, invalidité et le décès.
- Branche famille : prestations familiales permettant de réduire les inégalités de niveau de vie
- Branche retraite : pensions versées aux retraités
- Branche recouvrement : collecte les cotisations et les contributions sociales
- Branche accidents du travail (accident du travail, maladie professionnelle) : indemnisation des risques professionnels tels que l'accident du travail, de trajet et les maladies professionnelles.
- Branche autonomie : prestations liées à l'autonomie des personnes âgées et des personnes handicapées (dépendance)

Ainsi, lorsqu'un salarié est en arrêt de travail, celui-ci aura une perte de revenu liée à son absence. La Sécurité sociale française va donc prendre en charge une partie de cette perte par la branche maladie ou la branche accidents du travail selon la cause de son arrêt de travail.

De plus, la prestation est différente selon la cause de l'arrêt (privée ou professionnelle) mais également de l'état de la santé de la personne (incapacité ou invalidité).

## **Incapacité temporaire**

L'article L321-1 du Code de la Sécurité sociale indique qu'une personne en incapacité de travailler peut recevoir des indemnités journalières versées par l'assurance maladie lorsqu'elle est constatée par le médecin traitant selon les règles définies par l'article L164-4-1.

### **Vie privée**

En cas d'arrêt qui n'est pas causé par à un accident de travail (vie privée), les indemnités sont versées après l'expiration d'un délai de carence de 3 jours et pour une durée maximale de 36 mois (3 ans). Une personne en arrêt seulement 2 jours ne sera donc pas indemnisée par la Sécurité sociale française.

L'indemnité journalière est égale à 50% du salaire journalier de base, dans la limite de 1,8 fois le Smic. Le salaire journalier est estimé sur la moyenne des salaires bruts des 3 derniers mois précédant l'arrêt.

### **Professionnelle**

En cas d'arrêt dû à un accident du travail, les indemnités sont versées sans délai de carence. Celles-ci sont croissantes en fonction des jours d'arrêt :

- 28 premiers jours : 60% du salaire journalier de base, plafonnées à 205,84€ au 1<sup>er</sup> janvier 2022
- A partir du 29ième : 80% du salaire journalier de base, plafonnées à 274.46€ au 1<sup>er</sup> janvier 2022
- Au-delà de trois mois : revalorisation en cas d'augmentation générale des salaires

Le salaire journalier de base est estimé à partir du salaire brut précédant l'arrêt.

## **Invalidité permanente**

Lorsqu'une personne dont la capacité de travail ou de gain est réduite, liée à une invalidité irréversible, celle-ci peut bénéficier d'une pension d'invalidité.

Le médecin conseil de la Sécurité sociale française établit le niveau d'invalidité lorsque l'état de l'assuré est stabilisé après une blessure, ou bien à l'expiration des prestations d'indemnités journalières ou à la suite d'une dégradation de l'état de santé de l'assuré.

### **Vie privée**

Le niveau d'invalidité est estimé selon les critères décrits dans l'article L341-3 :

- sa capacité de travail
- son état général
- son âge et ses facultés physiques et/ou mentales
- ses aptitudes et sa formation professionnelle

A partir du niveau d'invalidité, la Sécurité sociale française distingue 3 catégories d'invalidité sur lesquelles les pensions d'invalidité seront évaluées :

Catégorie d'invalidité	Calcul de la pension en % sur la base du salaire annuel moyen perçu pendant les 10 meilleures années d'activité	Montant mensuel minimum (01/07/2022)	Montant mensuel maxi
1 <sup>ère</sup> catégorie : Invalide capable d'exercer une activité rémunérée	30% T1	309,09 €	1 028,40 €
2 <sup>ème</sup> catégorie : Invalide incapable d'exercer une quelconque activité professionnelle	50% T1	309,09 €	1 714,00 €
3 <sup>ème</sup> catégorie : Invalide incapable d'exercer une quelconque activité professionnelle, doit en outre recourir à l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie	50% T1 + majoration pour tierce personne	309,09 € + 1 192,55 €	1 714,00 € + 1 192,55 €

Tableau n°1 : Catégories d'invalidité

La pension est versée jusqu'à 62 ans en l'absence d'activité professionnelle et à 67 ans en cas d'activité professionnelle. A cet âge, un salarié a la possibilité de recevoir sa pension de retraite.

### Professionnelle

En cas de maladie professionnelle, le niveau d'invalidité est estimé selon les mêmes critères qu'en invalidité liée à la vie privée. Il est cependant complété par un barème indicatif d'invalidité des maladies professionnelles qui figure en annexe du Code de la Sécurité sociale.

En fonction du taux d'invalidité obtenu, celui-ci donnera lieu à une indemnité sous forme de capital ou de rente d'incapacité permanente :

Taux d'invalidité	Prestation	Montant
Inférieur à 10%	Capital	Entre 443,98€ et 4 439,00€ selon le taux (01/07/2022)
Entre 10% et 50%	Rente trimestrielle	Taux x Salaire annuel sur les 12 derniers mois
Entre 50% et 80%	Rente mensuelle	Taux x Salaire annuel sur les 12 derniers mois
Supérieur à 80%	Rente mensuelle	Taux x Salaire annuel sur les 12 derniers mois + prestation complémentaire pour recours à tierce personne

Tableau n°2 : Prestations en fonction du taux d'invalidité

La Sécurité sociale française prend donc en charge partiellement les pertes de revenu d'une personne en incapacité ou en invalidité. Les contrats de prévoyance sont donc proposés afin de diminuer la part qui n'est pas prise en charge par l'assurance maladie.

## 1.2.2. Contrats prévoyance complémentaire

### **Historique**

Les contrats de prévoyance sont créés afin de couvrir la part de perte de revenu qui n'est pas indemnisée par la Sécurité sociale française.

La prévoyance est essentiellement proposée de deux manières :

- Prévoyance individuelle : contrat signé entre un assureur et un particulier
- Prévoyance collective : contrat signé entre un assureur et une entreprise dans le but d'assurer ses salariés

L'étude de ce mémoire portera sur les contrats de prévoyance collective qui peuvent être commercialisés par des assureurs, des institutions de prévoyance ou des mutuelles.

Contrairement aux contrats de santé, la prévoyance n'est pas obligatoire pour toute la population française à ce jour. La prévoyance s'est fortement développée et a évolué au cours du temps par l'application de plusieurs réglementations.

### **Convention collective nationale :**

Une convention collective est un accord écrit et négocié entre les syndicats de salariés et d'employeurs. Elle contient, pour un secteur donné, les règles particulières du travail applicables telles les conditions d'emploi, formation professionnelle, conditions de travail et les garanties sociales des salariés.

Ainsi, une Convention Collective Nationale (CCN) peut prévoir une obligation de couverture prévoyance des salariés d'une entreprise du secteur et éventuellement des garanties minimales.

La première obligation est apparue à travers la CCN de l'AGRIC en 1947, celle-ci a imposé aux employeurs du secteur privé de souscrire un contrat de prévoyance collective à ses cadres et assimilés cadres.

### **Loi de mensualisation (1978)**

Cette loi impose aux entreprises de maintenir une partie du salaire d'un salarié en arrêt de travail après un délai de carence de 7 jours en cas de maladie et sans délai en cas d'accident du travail.

Le niveau et la durée de maintien de salaire sont estimés en fonction de l'ancienneté du salarié dans l'entreprise ou éventuellement dans le secteur d'activité selon les dispositifs conventionnels :

Ancienneté	1 <sup>ère</sup> durée de versements	2 <sup>ème</sup> durée de versements
	90% du salaire brut	66.66% du salaire brut
1 à 6 ans	30 jours	30 jours
6 à 11 ans	40 jours	40 jours
11 à 16 ans	50 jours	50 jours
16 à 21 ans	60 jours	60 jours
21 à 26 ans	70 jours	70 jours
26 à 31 ans	80 jours	80 jours
Supérieur à 31 ans	90 jours	90 jours

Tableau n°3 : Loi de mensualisation

Les niveaux de maintien viennent en déduction des indemnités de la Sécurité sociale française et éventuellement d'un régime complémentaire de prévoyance.

L'entreprise peut gérer cette obligation par sa propre trésorerie ou elle peut faire appel à un contrat de prévoyance de « mensualisation » qui permet de couvrir spécifiquement cette obligation.

Ainsi les indemnités vont s'articuler graphiquement de la manière suivante :

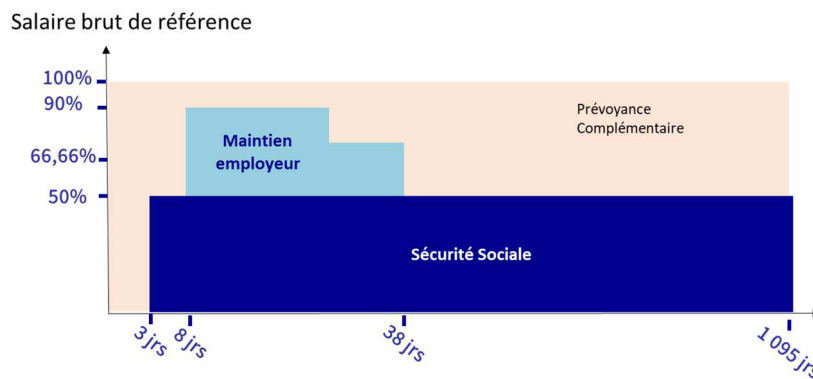


Schéma n°1 : Les indemnités en cas d'arrêt de travail en France

### Loi Evin (1989)

La loi Evin a fixé un ensemble de règles sur les couvertures de risques proposées notamment dans les contrats de prévoyance individuelle et collective telles que :

- La prise en charge des états pathologiques survenus antérieurement à l'adhésion.
- Proposer un maintien de couverture pour les salariés sortants de l'entreprise sans questionnaire médical pendant un délai de préavis.
- En cas de résiliation du contrat d'assurance, l'assureur doit continuer à verser les prestations aux salariés en incapacité ou invalidité déclarés avant la résiliation et de maintenir la garantie décès pour ces personnes.

Ainsi les contrats de prévoyance collective doivent être construits en tenant compte de ces différentes contraintes.

## **Produits de prévoyance complémentaire**

Les contrats de prévoyance collective proposent généralement plusieurs garanties :

- Couverture en cas décès
- Couverture en cas d'incapacité temporaire de travail
- Couverture en d'invalidité permanente

Généralement, les garanties et les cotisations sont exprimées en pourcentage de tranches de salaires. Ces dernières sont basées sur le Plafond Annuel de la Sécurité Sociale (PASS) :

- Tranche 1 : Partie du salaire limitée à 1 PASS (41 136€ en 2022)
- Tranche 2 : Partie du salaire comprise entre 1 PASS à 8 PASS (329 088 € en 2022)

Ces contrats sont proposés sous la forme de couverture annuelle, renouvelable par tacite reconduction.

### **Couverture décès :**

Les contrats de prévoyance proposent des couvertures en cas de décès de l'assuré. Les prestations peuvent être versées sous la forme d'un capital, d'une rente ou par une combinaison de ces deux types de prestations.

#### **Capital décès :**

En cas de décès de l'assuré, la garantie classique correspond à un versement d'un capital au bénéficiaire.

#### **Rente de conjoint :**

En cas de décès de l'assuré, deux types de rente peuvent être proposés à destination du conjoint survivant.

- Rente temporaire :

En cas de décès d'un assuré, le conjoint bénéficie d'une part des droits de retraite de l'assuré des régimes de la Sécurité sociale française et de l'AGIRC-ARRCO. Cette pension de réversion est accessible seulement lorsque le conjoint atteint 55 ans.

La rente temporaire des contrats prévoyance a pour objectif de verser une rente pour les conjoints ne bénéficiant pas encore de la pension de réversion. Celle-ci s'arrête à l'âge de 55 ans, correspondant à l'âge d'ouverture des droits de pension de réversion.

- Rente viagère :

Lorsqu'un salarié décède avant l'âge de départ à la retraite, le conjoint ne bénéficiera pas d'une pension de réversion correspondant à une carrière complète.

La rente viagère a pour objectif de compléter la part de pension de réversion manquante jusqu'au décès du conjoint.

### Rente éducation :

En cas de décès de l'assuré, une rente éducation peut être proposée pour les enfants à charge de l'assuré. Celle-ci correspond à une rente temporaire tant que l'enfant poursuit ses études jusqu'à 28 ans, la garantie peut être constante ou croissante afin de tenir compte des coûts de scolarité.

### Couverture d'incapacité temporaire de travail :

Les paragraphes précédents ont montré que les indemnités journalières versées par la Sécurité sociale française et l'employeur (loi de mensualisation) ne sont pas suffisantes pour couvrir la totalité du salaire d'un assuré.

Le contrat prévoyance vient ainsi compléter partiellement ou totalement la part restante.

Similaire au délai de carence, les contrats de prévoyance possèdent des franchises :

Franchise continue : l'assuré bénéficiera de prestations lorsqu'un nombre de jours consécutifs d'arrêts dépasse la franchise.

Franchise discontinuë : l'assuré bénéficiera de prestations lorsqu'un nombre de jours d'arrêts consécutifs ou non consécutifs mais sur une période définie (365 jours précédant l'arrêt de travail ou année civile) dépasse la franchise.

### Couverture d'invalidité permanente :

De manière similaire à la couverture d'incapacité temporaire de travail, la garantie d'invalidité vient compléter les prestations versées par la Sécurité sociale française.

La garantie est également exprimée selon l'origine de l'invalidité et le niveau d'invalidité (catégorie d'invalidité pour la partie privée et le taux d'incapacité pour la partie professionnelle).

Celle-ci est cependant temporaire quel que soit l'origine, la rente est généralement versée jusqu'à l'âge de départ à la retraite.

Ainsi, les contrats de prévoyance intègrent un certain nombre de garanties dont les prestations sont proposées sous la forme d'un capital ou d'une rente.

Bien que ces contrats soient des couvertures annuelles, les engagements de l'assureur peuvent être de très longues durées et difficiles à être évalués, par exemple le risque qu'une personne en arrêt de travail bascule en invalidité et pour lequel l'assureur versera une rente jusqu'à l'âge de départ à la retraite.

Des règles de provisionnement ont donc été imposées pour tenir compte des engagements pris par un assureur.

### 1.2.3. Provisions techniques

L'Autorité des Normes Comptables (ANC) impose aux assureurs d'intégrer des provisions techniques au passif de leur bilan comptable.

Il existe essentiellement deux types de provisions techniques pour les contrats de prévoyance :

- Provisions pour sinistre à payer : elles correspondent aux prestations dues par l'assureur pour des sinistres survenus avant la date d'inventaire mais pour lesquels ces prestations n'ont pas encore été versées à la date de l'exercice d'inventaire.
- Provisions mathématiques : elles correspondent à la valeur actuelle probable des engagements pris par l'assureur pour les sinistres survenus à la date d'inventaire.

#### Estimation des provisions mathématiques

L'ANC impose pour les garanties d'arrêt de travail de provisionner les prestations d'incapacité et d'invalidité à chaque exercice d'inventaire d'un assureur pour faire face à ses engagements.

Les provisions en arrêt de travail reposent sur des techniques d'assurance vie en utilisant des lois biométriques. En effet, les montants de provisions sont différents selon l'état de santé d'un assuré. Afin de comprendre ces différences, le schéma ci-dessous illustre les états physiques d'un salarié dans le cadre d'un contrat prévoyance collective :

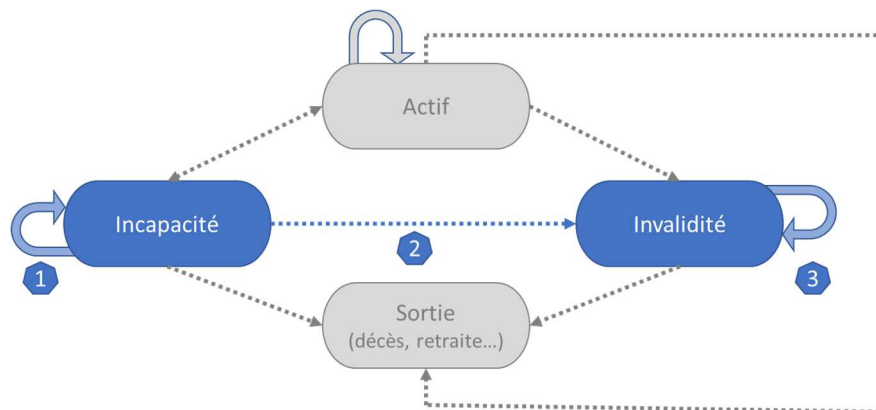


Schéma n°2 : Les états physiques d'un salarié

Dans le graphique ci-dessus, ce sont les éléments en bleu qui sont soumis à des provisions techniques, elles correspondent :

- Aux provisions au titre des assurés en incapacité à la date d'inventaire pour
  - des prestations d'incapacité à verser (1)
  - des rentes d'invalidité susceptibles d'intervenir ultérieurement (2)
- Aux provisions liées aux prestations d'invalidité à verser pour les assurés en invalidité en cours de service (3)

Pour estimer ces provisions techniques, l'ANC impose d'utiliser les lois produites par le Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC) ou d'utiliser des lois construites selon les



caractéristiques du portefeuille d'un assureur. Ces lois, dites d'expérience, devront être certifiées par un actuare indépendant agréé afin de pouvoir les utiliser dans les comptes sociaux d'un assureur.

De plus, un taux technique est intégré dans le calcul des provisions, celui-ci devra être inférieur à 75% du taux moyen des emprunts d'État (TME) calculé sur les vingt-quatre mois précédents sans dépasser la valeur de 4.5%.

Ainsi, le BCAC a réalisé 3 tables pour calculer les provisions mathématiques pour le risque d'arrêt de travail en 1993. Ces tables ont ensuite été modifiées en 2010 lorsque les règles de provisionnement des garanties en arrêt de travail sont apparues. Une dernière étude a été menée en 2013.

### Provision pour le maintien en incapacité

Ainsi, la loi maintien en incapacité du BCAC se présente de la manière suivante :

		Ancienneté													
		0	1	...	a	...	35								
Age x	23	$l_0(23)$	$l_1(23)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	$l_{35}(23)$
	24	$l_0(24)$	$l_1(24)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	$l_{35}(23)$
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	66	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Schéma n°3 : Représentation de la table de maintien en incapacité

La table du BCAC de 2010 permet de provisionner les assurés en tenant compte de l'âge d'entrée en incapacité (de moins 23 ans à 66 ans) et de l'ancienneté en incapacité (de 0 à 35 mois). Ces limitations d'âge et de période se rapprochent des limites de versements de la Sécurité sociale française.

La loi de maintien en incapacité consiste à suivre le nombre de personnes en arrêt de travail vivantes dans la durée selon leur âge à la survenance en incapacité. Par convention, le volume initial du nombre de personnes par âge est fixé à 100 000.

Afin de comprendre le fonctionnement et la lecture de la table, des premières notions actuarielles sont introduites.

Le nombre de personnes en incapacité à l'âge  $x$  et ayant  $a$  mois d'ancienneté dans cet état est noté  $l_{a(x)}$ .

A partir des valeurs  $l_{a(x)}$ , il est possible de déduire d'autres notations :

$p_{a(x)}$  : la probabilité qu'une personne en incapacité à l'âge  $x$  de survivre entre le mois  $a$  et  $a + 1$  :

$$p_{a(x)} = \frac{l_{a+1}(x)}{l_a(x)}$$

$q_a(x)$ : la probabilité qu'une personne en incapacité à l'âge  $x$  décède entre le mois  $a$  et  $a + 1$  :

$$q_a(x) = 1 - \frac{l_{a+1}(x)}{l_a(x)}$$

Et la relation suivante :

$$p_a(x) + q_a(x) = 1$$

A partir de la loi du BCAC, il est possible d'estimer la provision mathématique d'une personne en incapacité de la manière suivante :

$$PM = Rente \times \sum_{k=1}^{35-a} \frac{l_{a+k}^x}{l_a^x} \times \frac{1}{(1+tx)^k}$$

Avec

*Rente* : rente annuelle versée

$l_a^x$  : nombre de personnes en incapacité à l'âge  $x$  et  $a$  mois d'ancienneté

$tx$  : taux technique en vigueur

#### Provision pour le maintien en invalidité

Similaire à la loi de maintien en incapacité, le provisionnement des invalidités est exprimé selon deux paramètres : l'âge d'entrée en invalidité et l'ancienneté dans cet état.

		Ancienneté												
		0	1	...	a	...	40	41	42					
Age	20	$l_0(20)$	$l_1(20)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	$l_{42}(20)$
	21	$l_0(21)$	$l_1(21)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	61	x												

Schéma n°4 : Représentation de la table de maintien en invalidité

La table du BCAC de 2010 permet de provisionner les assurés en tenant compte de l'âge d'entrée en invalidité (de moins 20 ans à 61 ans) et de l'ancienneté en invalidité (de 0 à 42 ans).

A partir de la loi du BCAC, il est possible d'estimer la provision mathématique d'un invalide de la manière suivante :

$$PM = Rente \times \sum_{k=1}^{42-a} \frac{l_{a+k}^x}{l_a^x} \times \frac{1}{(1+tx)^k}$$

Avec

*Rente* : rente annuelle versée

$l_a^x$  : nombre de personnes en invalidité à l'âge  $x$  et  $a$  années d'ancienneté

$tx$  : taux technique

### Provision d'invalidité en attente

Cette provision permet de tenir compte d'une provision probable qu'une personne en incapacité devienne invalide dans le futur.

Cette table de passage d'incapacité en invalidité reprend donc les mêmes paramètres que la table de maintien en incapacité : l'âge d'entrée en incapacité et l'ancienneté dans cet état.

		Ancienneté												
		0	1	...	a	...	35							
Age	23	$s_0(23)$	$s_1(23)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	$s_{35}(23)$	
	x	24	$s_0(24)$	$s_1(24)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	$s_{35}(23)$
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		66	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Schéma n°5 : Représentation de la table de passage d'incapacité en invalidité

La loi de passage consiste à suivre le nombre de personnes ( $s_x$ ) en incapacité reconnues invalides par la Sécurité sociale au cours des mois.

A partir de cette table, il est possible d'estimer la provision mathématique d'invalidité en attente des personnes en incapacité de la manière suivante :

$$PM = Rente \times \sum_{k=1}^{35-a} \frac{s_{a+k}(x)}{l_a^x(incap)} \times \frac{1}{(1+tx)^k} \times PM_{inv}\left(x + \frac{a+k}{12}, 0, tx\right)$$

Avec

*Rente* : la rente annuelle versée

*tx* : le taux technique

$l_a^x(incap)$  : le nombre de personnes en incapacité à l'âge  $x$  et  $a$  mois d'ancienneté

$s_{a+k}(x)$  : le nombre de personnes en incapacité à l'âge  $x$  reconnus en invalidité à  $a + k$  mois d'ancienneté

$PM_{inv}\left(x + \frac{a+k}{12}, 0, tx\right)$  : provision mathématique d'une personne en invalidité à l'âge  $x + \frac{a+k}{12}$ , 0 d'ancienneté et au taux technique  $tx$

L'Autorité des Normes Comptables impose donc aux assureurs de tenir compte des provisions techniques selon des méthodes de calculs bien précises dans leur bilan comptable afin d'assurer leurs engagements. Ces engagements seront renforcés à travers une directive apparue en 2016.

## 1.3. Solvabilité 2

Contrairement à un cycle de production classique où une entreprise va estimer le prix de vente de son produit à partir de ses coûts (matières premières, transports, fabrication), l'assurance est basée sur un cycle de production inversé.

En effet, l'assureur demande une prime à un assuré en contrepartie de verser des prestations futures au bénéficiaire dont le coût est inconnu et aléatoire. Ainsi, l'assureur vend un produit sans en connaître le coût définitif.

Afin de garantir la protection des assurés et la préservation de la stabilité du système financier, les assureurs sont contrôlés et supervisés en France par l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR).

### 1.2.1. Présentation de Solvabilité 2

La solvabilité pour un assureur est évaluée par sa capacité à respecter ses engagements et de ses fonds propres pour y faire face.

Ainsi, ces ressources doivent être suffisantes pour couvrir l'intégralité de ses engagements mais également avoir la capacité de faire face à des événements imprévus.

Avant le 1<sup>er</sup> janvier 2016, les assureurs étaient soumis à la directive Solvabilité 1 dans laquelle une marge de solvabilité réglementaire était demandée aux assureurs pour faire face à ses engagements. Celle-ci était estimée de manière forfaitaire et ne tenait donc pas compte des risques de l'entreprise.

La directive européenne Solvabilité 2 a donc été mise en place en 2016 dans l'objectif d'évaluer au plus juste cette marge de solvabilité selon les risques encourus par l'activité de l'assureur.

Cette réforme a également pour but de créer un cadre européen dans le secteur de l'assurance. Pour cela, la réglementation repose sur une approche basée sur trois piliers.

#### Premier pilier

Le premier pilier a pour objectif de définir les exigences quantitatives, il définit les normes de calculs des éléments du bilan prudentiel.

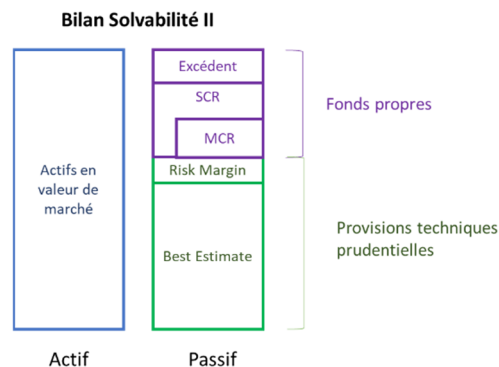


Schéma n°6 : Bilan en vision Solvabilité 2

Les actifs sont évalués en valeur de marché comme décrit l'Art 75 de la directive : « *montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes* ». Cette valorisation est différente de Solvabilité 1 dans laquelle les actifs étaient évalués en valeur comptable (coût historique).

Les passifs sont également estimés en valeurs économiques, c'est-à-dire à la valeur pour laquelle l'assureur pourrait les transférer.

Le passif peut être décomposé en 2 grandes parties : les provisions techniques prudentielles et les fonds propres.

Les provisions techniques prudentielles contiennent deux éléments :

- la meilleure estimation (*Best Estimate* notée BE), correspondant à la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs
- la marge de risque (*Risk Margin* notée RM), correspondant au montant supplémentaire pour garantir que la valeur des provisions techniques prudentielles soit égale au montant qu'une entreprise demanderait pour reprendre et honorer les engagements d'assurance.

Les fonds propres sont également découpés en plusieurs parties :

MCR (*Minimum Capital Requirement*) représente le niveau minimum de fonds propres, qui est estimé de manière forfaitaire.

Lorsqu'un assureur se trouve en dessous de ce seuil, l'ACPR imposera des mesures à l'assureur (plan de redressement ou retrait de l'agrément).

SCR (*Solvency Capital Requirement*) correspond au capital nécessaire pour couvrir une perte bicentenaire à horizon un an.

Ce niveau est évalué à travers des modules de risque correspondant à des scénarios défavorables qui impacteront les fonds propres de l'entreprise. L'objectif de cette approche est de prendre en considération tous les risques auxquels l'assureur est exposé.

### Deuxième pilier

Le deuxième pilier correspond aux exigences qualitatives.

La directive impose aux assureurs d'avoir une gouvernance transparente avec une répartition claire et une séparation appropriée des responsabilités.

L'objectif est d'obtenir une gouvernance efficace qui garantit une gestion saine et prudente de l'activité.

Pour cela, l'entreprise d'assurance doit mettre en place l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) qui correspond à un outil de management pour effectuer une évaluation interne des risques et de la solvabilité.

Le pilier 2 impose également de créer quatre fonctions clés dans l'entreprise :

- Gestion des risques : gère les risques, centralise les travaux de l'ORSA et informe le conseil.
- Fonction actuarielle : s'assure de la qualité du calcul des provisions techniques et de la politique de souscription et de réassurance.
- Conformité : établit la politique de conformité, identifie et évalue les risques de non-conformité.
- Audit interne : établit le plan d'audit, évalue l'efficacité du contrôle interne et peut alerter l'ACPR.

### Troisième pilier

Le dernier pilier correspond aux exigences de transparence des informations.

L'objectif est de partager des informations de l'entreprise qui sont accessibles aux autorités de contrôle mais également au public.

Le format des documents est également précisé dans ce pilier afin d'harmoniser les reportings des entreprises européennes.

Cette directive a donc eu un impact considérable pour les assureurs.

Les produits de prévoyance ayant des risques techniques sur du court et long terme, la partie suivante présentera les scénarios appliqués pour estimer le niveau de SCR du pilier 1 de Solvabilité 2 sur ce type de contrat.

### 1.2.2. Estimation du SCR

Pour évaluer l'exigence de solvabilité, la directive Solvabilité 2 propose deux possibilités :

- Formule standard : Méthode d'estimation calibrée au niveau européen, celle-ci peut être appliquée par tous les assureurs européens.
- Modèle interne (partiel ou total) : Méthode et structure spécifique à une entreprise pour disposer d'une vision plus économique des risques auxquels celle-ci est exposée.

Ces deux approches sont structurées sous la forme de modules de risques correspondant à des scénarios stressés. Les deux approches doivent couvrir au minimum les risques de souscription, de marché, de crédit et opérationnel.

#### **Formule standard**

Le graphe ci-dessous présente les modules de risque proposés par la formule standard :

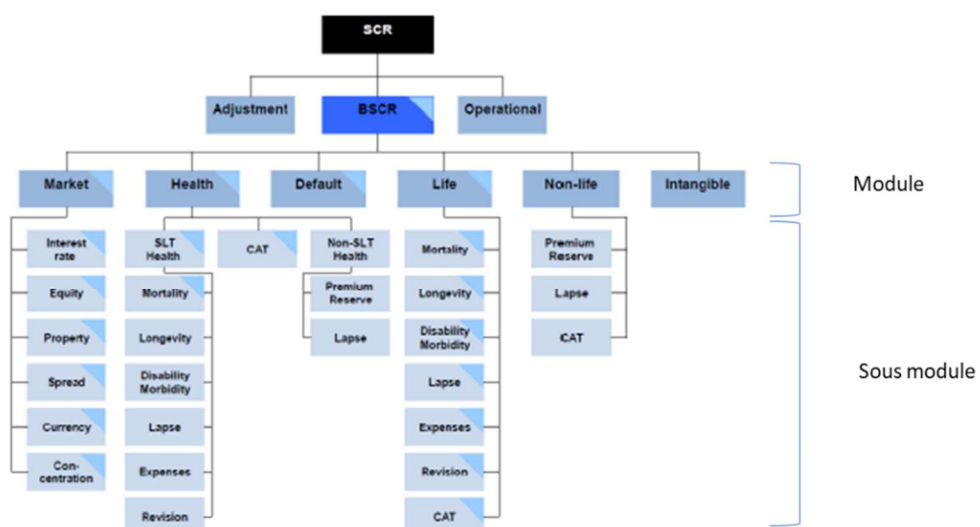


Schéma n°7 : Structure de la formule standard

Le SCR de la formule standard est obtenu en estimant dans un premier temps les SCR de chaque sous-module.

Les SCR des sous-modules sont obtenus en réalisant des scénarios stressés sur le portefeuille de l'assureur. Pour cela, des chocs viennent impacter les composantes du bilan prudentiel de l'entreprise. Ces chocs sont décrits notamment dans le règlement délégué.

Après l'application d'un choc, le SCR est obtenu en observant la variation de l'Actif et du Best Estimate :

$$SCR_{sous\text{-}module} = \Delta Actif - \Delta BE$$

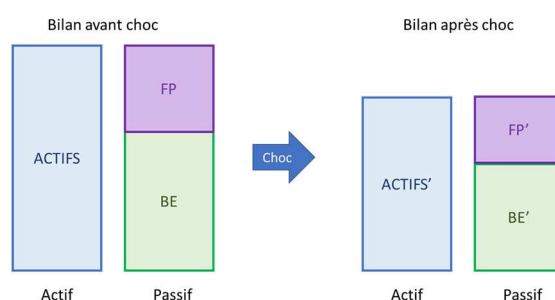


Schéma n°8 : Bilan choqué

Ce résultat peut être également observé comme une variation de fonds propres :

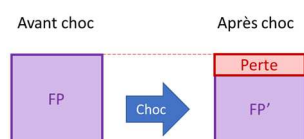


Schéma n°9 : Fonds propres choqués

$$SCR_{sous\text{-}module} = Fonds\ Propres_{sans\ choc} - Fonds\ Propres_{choqué}$$

Une fois que l'ensemble des SCR des sous-modules sont estimés, le SCR des modules peut être évalué en agrégeant les SCR des sous-modules par des matrices de corrélation. Cette méthode de regroupement permet de prendre en considération que ces chocs bicentennaires ne peuvent pas intervenir simultanément ou partiellement.

Une fois ces regroupements effectués, le SCR global est estimé par le calcul suivant :

$$SCR = BSCR - adj + SCR_{op}$$

Où :

- *BSCR* : Basic SCR contenant l'agrégation des modules de risque
- *adj* : ajustement permettant de prendre en considération des capacités d'absorption des risques (impôts sur les sociétés différés, provisions pour participation au bénéfice...)
- $SCR_{op}$  : SCR associé au risque opérationnel (par exemple la fraude), pour lequel il est pris indépendamment des autres risques.

## Modèle interne AXA

AXA a développé son propre modèle interne afin d'estimer une exigence de capital plus proche de ses risques mais également pour tenir compte de la diversification géographique des différentes entités du groupe AXA.

Le SCR est appelé STEC pour « *Short Term Economic Capital* » dans le modèle interne d'AXA.

La structure du modèle interne diffère de la formule standard mais présente également des modules et des sous modules de risque :

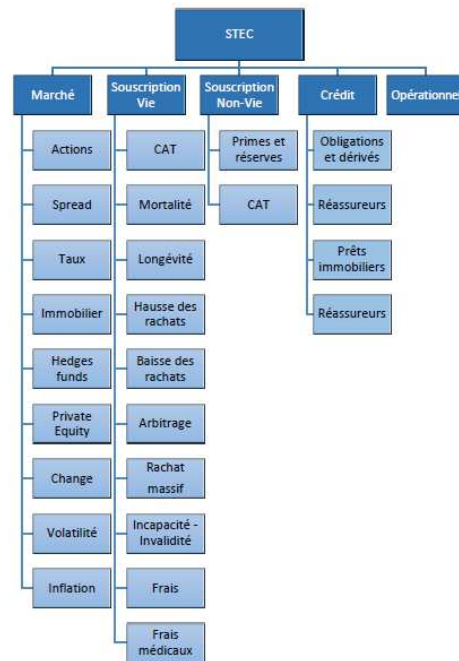


Schéma n°10 : Structure du modèle interne

De la même manière que la formule standard, les STEC des sous modules sont estimés en observant la variation des fonds propres avant et après l'application des chocs.

Les STEC des modules sont agrégés par des matrices de corrélation sur le même principe que la formule standard.

### 1.2.3. Arrêt de travail et les modules de risques

#### Formule standard

Le règlement délégué précise que les couvertures d'arrêt de travail des contrats de prévoyance sont intégrées dans le module Santé de la formule standard (*Health* dans le schéma n°10).

En effet, le module Santé contient les garanties proposant des prestations de soin mais également des indemnités financières en cas de maladie, d'accident, d'incapacité ou d'invalidité.

Cependant, lors de la première lecture des textes, les assureurs ont eu une difficulté à classer le risque d'arrêt de travail dans le sous module « *SLT Health* » ou « *NSLT Health* ».

En effet, lorsque les engagements sont estimés sur la base technique similaire à celle de l'assurance vie, ces derniers sont intégrés dans le module *SLT Health (Similar to Life Techniques)*. A l'inverse,



lorsque les engagements sont estimés sur la base de technique similaire à celle de l'assurance non-vie, ces derniers sont intégrés dans le module *NSLT Health (Non Similar to Life Techniques)*.

Les engagements liés à l'arrêt de travail sont un mélange des techniques d'assurance vie et de non-vie :

- Rentes d'invalidité sont estimés par des méthodes d'assurance vie (loi de maintien)
- Rentes d'incapacité et d'invalidité en attente sont des risques plus courts qui reposent sur des techniques d'assurance non-vie (provisions par des méthodes de cadencement) et des techniques d'assurance vie (loi d'incidence et de maintien)

Afin de préciser la classification du risque d'arrêt de travail, l'ACPR a publié les « *Orientations Nationales Complémentaires* » en 2013 :

*La garantie incapacité/invalidité peut être traitée dans le module "Santé non-SLT" dans la catégorie "income protection" jusqu'à consolidation (passage d'incapacité à invalidité) ; ceci signifie que le passage de l'incapacité à l'invalidité serait encore traité en "Santé non-SLT". Après consolidation, le contrat revient à une rente santé soumise au risque "Santé SLT" et classé en rente "Santé SLT".*

Par conséquent, lorsqu'un assuré se trouve dans la situation d'invalidité, le risque doit basculer dans le module *SLT Health* et l'engagement de l'assureur sera donc exposé aux sous modules de risque suivants :

- *Longevity* : Amélioration de l'espérance de vie des invalides
- *Expense* : Augmentation du niveau de frais pour gérer les rentes d'invalidité
- *Revision* : Augmentation du niveau de rente versée

Dans la formule standard, le niveau de SCR de longévité en santé est obtenu en appliquant une baisse soudaine et permanente de 20% des taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques. En observant l'exigence demandée pour le SCR de longévité de module Vie (*Life* dans le schéma n°10), le niveau de choc indiqué est similaire à celui du SCR de longévité du module Santé. Cette observation implique donc que le choc de longévité est au même niveau pour un contrat de prévoyance qu'un contrat de retraite.

Toutefois, la calibration des chocs a été réalisée au niveau européen, ce qui ne reflète pas parfaitement les spécificités de tous les assureurs.

### **Modèle interne AXA**

Dans le modèle interne AXA, le risque d'arrêt travail est identifié dans le sous-module « Incapacité-Invalidité ».

Ce sous-module a la particularité d'être un modèle hybride dans lequel des techniques d'assurance vie et d'assurance non-vie sont utilisées. Similaire aux approches indiquées dans la formule standard, l'exigence de capital pour le risque d'arrêt de travail est donc basée sur un mélange de ces deux techniques.

Un scénario de longévité est également intégré dans ce sous-module, le choc est quant à lui calibré au niveau du groupe AXA pour le portefeuille AXA France. Ce niveau de choc n'est donc pas spécifiquement calibré pour le portefeuille prévoyance collective.

### **Impact du choc longévité sur les Provisions Mathématiques**

Dans le paragraphe 1.1.3 Provisions techniques, les provisions mathématiques (PM) des invalides sont calculées selon la loi de maintien en invalidité du BCAC. Pour rappel, cette table est exprimée selon l'âge d'invalidité et son ancienneté dans cet état.

En considérant que cette loi est la meilleure estimation des provisions mathématiques (*Best estimate*), le choc de longévité sera donc appliqué de manière uniforme pour tout âge et ancienneté.

Ainsi, dans le scénario proposé par la formule standard, une loi de maintien est créée selon les paramètres suivants :

$$l_{a+1}^x(choc) = l_a^x(choc) \times [1 - [q_a^x(BCAC) (1 - 20\%)]]$$

$x$  : âge entrée en invalidité

$a$  : ancienneté en année

$q_a^x(BCAC)$ : probabilité de décès contenue dans la loi de maintien du BCAC pour un âge  $x$  d'entrée en invalidité et d'ancienneté  $x$ .

Elle peut s'écrire de la manière suivante :

$$l_{a+1}^x(choc_i) = l_a^x(choc_i) \times \left[ 1 - \left[ \left[ 1 - \frac{l_{a+1}^x(BCAC)}{l_a^x(BCAC)} \right] (1 - 20\%) \right] \right]$$

Avec

$x$  : âge entrée en invalidité

$a$  : ancienneté en année

$l_a^x(BCAC)$  : nombre de personnes vivantes entrées en invalidité à l'âge  $x$  et d'ancienneté  $a$  d'après la loi de maintien du BCAC.

Pour répondre à l'objectif du mémoire, des données du portefeuille de prévoyance collective d'AXA France seront présentées et étudiées dans les parties suivantes.

## 2 Construction de tables prospectives

---

### 2.1. Objectif de l'étude

L'objectif de cette première étude est de construire des tables de mortalité prospectives et d'en déduire par la suite un scénario correspondant à un choc de longévité.

Pour réaliser ce type d'étude, il est nécessaire d'analyser le comportement d'une population sur les années passées afin de déduire des modèles de taux de mortalité. Ces derniers sont ensuite projetés dans le temps afin de prédire des taux de mortalité future.

Il est donc indispensable d'avoir une quantité de données importantes sur le passé tant sur le nombre de personnes mais également sur le nombre d'années historiques.

Ainsi, le portefeuille d'invalides ou des actifs d'AXA ne seraient pas suffisants à ce jour pour mener ce type d'étude.

L'étude sera donc réalisée sur des données de la population nationale française en utilisant les données publiques du site *Human Mortality Database*.

L'utilisation des données de la population nationale permet de récupérer des données sur un historique de plus de cinquante ans. Celles-ci vont permettre de modéliser des taux de mortalité en utilisant plusieurs méthodes.

Cependant, les taux de mortalité de la population nationale ne reflètent pas exactement celle d'un portefeuille d'un assureur.

Les comportements de la mortalité des assurés du portefeuille prévoyance collective d'AXA seront donc étudiés dans un second temps afin de déterminer une relation entre la population nationale et le portefeuille d'AXA.

Les différents modèles calibrés sur la population nationale seront ainsi réajustés afin de se rapprocher des caractéristiques du portefeuille AXA.

Le choc de longévité sera ensuite obtenu en projetant les modèles selon des méthodes stochastiques.

### 2.2. Données

#### 2.2.1. Human Mortality Database

Afin d'étudier les taux de mortalité de la population nationale, les données publiques *Human Mortality Database* (HMD) accessibles sur le site <https://www.mortality.org> sont récupérées.

HMD recense des bases de données sur la population et la mortalité de plus de 40 pays à ce jour. Ces données sont mises à disposition notamment pour les chercheurs, les étudiants et les personnes qui souhaitent étudier la longévité.

Le site propose ainsi des données concernant la population française. Il est possible de récupérer des informations sur les naissances, le nombre de français et le nombre de décès.

Ces différentes données sont issues de publications officielles mais également du site de l'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE, [www.insee.fr](http://www.insee.fr)).

Dans le cadre de cette étude, deux sources de données sont téléchargées sur le site HMD:

- Deaths 1x1 : Cette table recense le nombre de décès par an et par sexe sur une période historique de 1816 à 2020
- Exposure to risk 1x1 : Cette table recense le nombre de personnes vivantes par an et par sexe sur une période historique de 1816 à 2020

Ces deux sources de données ont été actualisées le 12 août 2022 lors de l'étude de ce mémoire.

Pour l'étude de longévité, il ne sera pas nécessaire d'utiliser la totalité de ces données.

Seulement les 50 dernières années seront utilisées pour analyser et calibrer les taux de mortalité de la population nationale.

La limitation de cette période permet d'avoir suffisamment de recul afin de réaliser des calibrages et de représenter au maximum le futur.

Afin de visualiser l'intérêt d'utiliser des volumes de données conséquents pour modéliser les taux de mortalité, les graphes ci-dessous présentent l'espérance de vie selon l'âge et l'année d'observation :

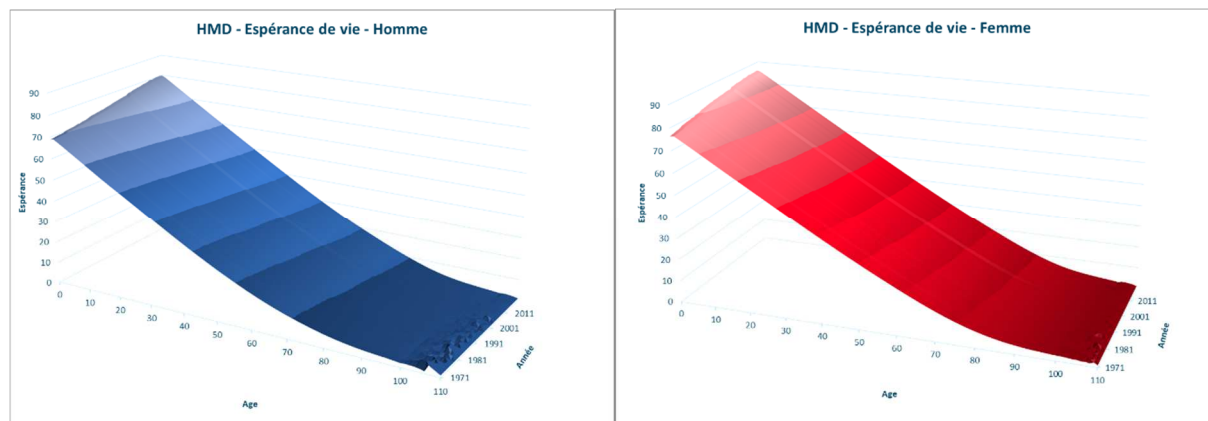


Schéma n°11 : Espérance de vie

L'espérance de vie a augmenté d'environ 10 ans au cours des cinquante dernières années.

L'amélioration de l'espérance de vie est légèrement plus élevée pour les hommes, mais reste cependant plus faible que celle des femmes. En effet, l'espérance est de 79,7 ans pour les hommes contre 85,7 ans pour les femmes en 2020.

L'utilisation des données sur une période historique conséquente va ainsi permettre de prendre en considération la diminution des taux de mortalité dans le temps dans les modèles.

### 2.2.2. Données AXA

Depuis 2017, les déclarations sociales nominatives (DSN) ont été instaurées dans l'objectif de simplifier et d'alléger les procédures administratives.

Ces déclarations mensuelles sont issues des systèmes de gestion des ressources humaines et contiennent les informations des salariés d'une entreprise. Elles ont pour objectif de remplacer les multiples déclarations sociales envoyées par l'entreprise ou les salariés par un canal unique et sécurisé.

Les DSN sont envoyées sur un point de dépôt unique afin que les organismes puissent accéder à ces données. Le schéma n°12 illustre ainsi les déclarations multiples avant l'arrivée de la DSN :

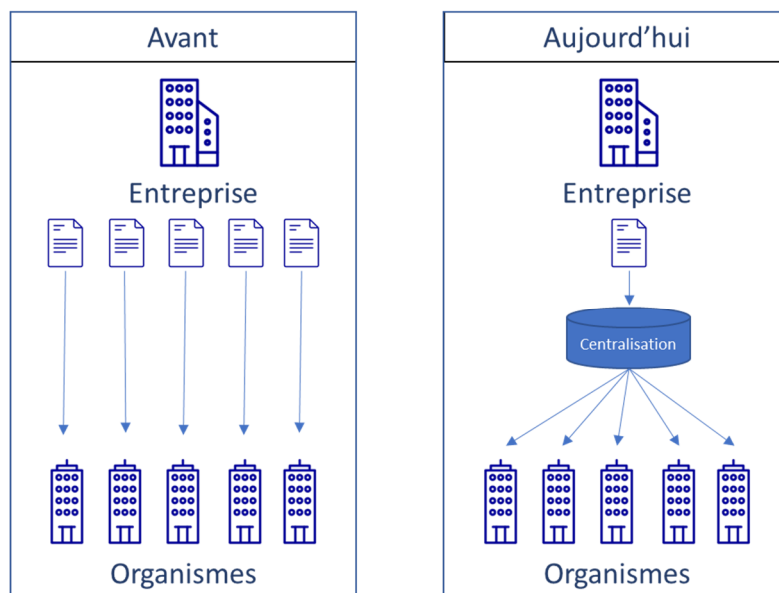


Schéma n°12 : Déclarations sociales avant et après l'arrivée des DSN

Les DSN sont devenues obligatoires en 2017 pour le secteur privé vers les organismes sociaux tels que Pole emploi, Urssaf.... Elles se sont également généralisées dans le secteur public depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2022.

Les entreprises n'ont pas l'obligation de partager leurs DSN vers les assureurs. Cependant, ces derniers demandent aux entreprises de partager leurs DSN afin de simplifier les démarches administratives pour la gestion de leur contrat d'assurance comme pour les appels de cotisations et les ouvertures de prestations.

A ce jour, AXA couvre une grande majorité du portefeuille salariés prévoyance et santé collectives. Ces données permettent également de réaliser de nombreuses études techniques et d'avoir une meilleure vision de l'exposition des risques encourus.

Pour ce mémoire, les données DSN suivantes sont récupérées pour analyser la mortalité du portefeuille d'AXA prévoyance collective :

Informations salarié	Identifiant unique (clé cryptée) Date de naissance Numéro de contrat d'assurance Date de début de contrat de travail Date de fin de contrat de travail Motif de fin de contrat de travail
----------------------	--

Cette base est ensuite complétée avec les informations des contrats AXA issues des systèmes de gestions internes :

Informations contrat	Numéro de contrat d'assurance Date d'effet du contrat d'assurance Date de fin de contrat d'assurance
----------------------	--

A partir de ces deux sources, de nombreux retraitements ont été réalisés afin de fiabiliser les données.

#### Sélection du périmètre prévoyance

En effet, les DSN réceptionnées par AXA ne concernent pas uniquement les contrats de prévoyance. Une jointure entre les numéros de contrat indiqués dans la DSN et les bases des contrats d'assurance collective d'AXA est réalisée. Cette étape a permis de sélectionner uniquement les contrats de prévoyance et ainsi de retirer les contrats de retraite et santé.

#### Dédoublonnage au niveau d'un assuré

Les DSN étant transmises de manière mensuelle, des dédoublonnages ont été réalisés afin de recenser qu'une seule fois un assuré pour chaque contrat d'assurance.

De plus, des retraitements spécifiques ont été réalisés sur certaines variables qui peuvent varier selon les dates des déclarations.

Par exemple lorsqu'un salarié change de contrat de travail comme le passage d'un contrat à durée déterminée à un contrat à durée indéterminée, la date de début de contrat de travail et la date de fin de contrat de travail de l'assuré seront ainsi différentes selon le mois observé.

Ainsi, des variables ont été traitées en plusieurs étapes :

#### Etape 1

Une première clé est générée contenant les informations suivantes [Identifiant unique - Date de naissance - Numéro de contrat d'assurance - Date de début de contrat de travail]. L'objectif est de récupérer la dernière vision du contrat de travail d'un assuré.

Pour cela, les variables ci-dessous sont traitées :

- Date de fin de contrat : récupération de la dernière date de fin de contrat
- Motif de fin de contrat de travail : récupération du motif de fin de contrat de la dernière date de fin de contrat

## Etape 2

Une fois que la vision de chaque contrat de travail d'un assuré est unique, il reste à agréger l'ensemble de ces contrats selon une nouvelle clé [Identifiant unique - Date de naissance - Numéro de contrat d'assurance] :

- Date de début de contrat de travail : récupération de la date d'effet du contrat de travail le plus ancien
- Date de fin de contrat : récupération de la date de fin de contrat du contrat le plus récent
- Motif de fin de contrat de travail : récupération du motif de fin de contrat du contrat le plus récent

Ainsi, un assuré associé à un contrat d'assurance apparaît qu'une seule fois dans cette base de données.

Dans cette base finale, un assuré peut cependant être présent plusieurs fois car la clé d'identification contient la variable « Numéro de contrat d'assurance ». En effet, un assuré a pu travailler dans deux entreprises assurées en prévoyance chez AXA durant la période 2017 et 2022, ce dernier apparaîtra donc deux fois dans cette base.

Il a été décidé de garder une vision au niveau d'une entreprise car les études menées en prévoyance collective sont réalisées au niveau d'une entreprise.

De plus, ces doublons n'impacteront pas l'étude car les périodes associées à ces contrats de travail ne peuvent pas se chevaucher.

### **Période d'exposition étudiée**

Cette dernière partie consiste à sélectionner la période d'exposition durant laquelle un assuré est associé à une couverture d'un contrat de prévoyance AXA :

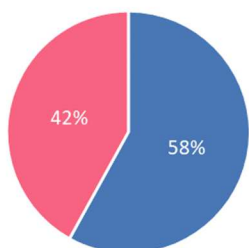
- Date de début d'exposition : récupération de la date la plus récente entre la date de début de contrat de travail et la date d'effet du contrat d'assurance
- Date de fin d'exposition : récupération de la date la plus ancienne entre la date de fin de contrat de travail et la date de fin du contrat d'assurance

### **2.2.3. Comparaison des deux sources de données**

Afin de comparer les deux populations, le schéma n°13 présente les résultats entre la période 2017-2020 et sur la tranche d'âge comprise entre 20 et 60 ans :

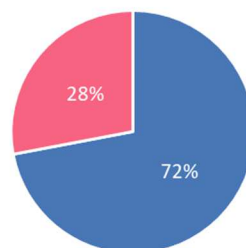
Exposition AXA 2017-2020

■ Homme ■ Femme



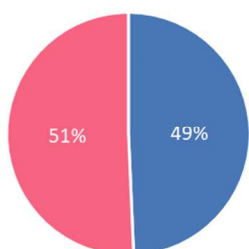
Décès AXA 2017-2020

■ Homme ■ Femme



Exposition HMD 2017-2022

■ Homme ■ Femme



Décès HMD 2017-2022

■ Homme ■ Femme

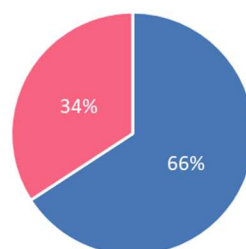


Schéma n°13 : Comparaison des données HMD et AXA

L'exposition du portefeuille AXA présente une majorité d'homme contrairement à la population nationale qui affiche quasiment une parité homme femme.

Les deux populations présentent une forte majorité de décès hommes, ce résultat est expliqué par une probabilité de décès des hommes plus élevée que celle des femmes.

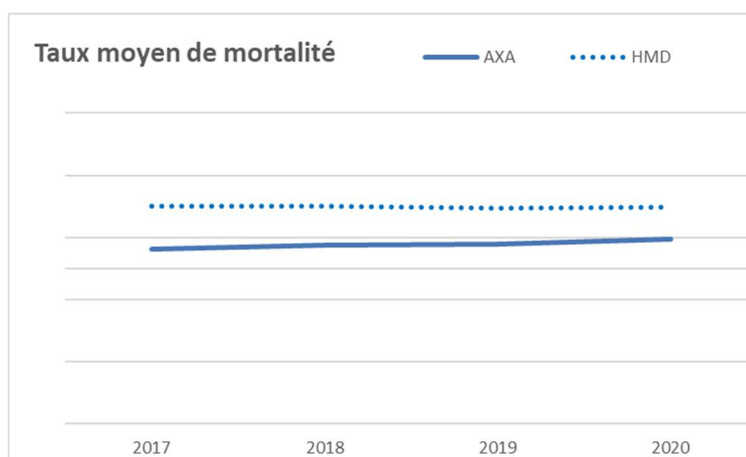


Schéma n°14 : Taux moyen de mortalité HMD et AXA

Le schéma n°14 présente une comparaison entre les taux de mortalité moyen entre la population nationale (HMD) et la population des actifs AXA.



Les axes de la courbe ont été retirés pour des raisons de confidentialité mais ce graphe permet de mesurer que le taux de mortalité d'AXA est plus faible que la population nationale sur la même tranche d'âge étudiée.

Ce résultat peut être expliqué par les caractéristiques du portefeuille d'AXA qui est composé d'une proportion de cadres plus importante que la population nationale.

Ce point est notamment lié par la convention collective des cadres qui impose une couverture de prévoyance pour cette population contrairement aux non-cadres.

### 2.3. Mortalité population nationale

Afin de construire des tables de mortalité prospectives, la première étape consistera à étudier la mortalité de la population nationale sur les années passées. Ces études permettront ainsi d'estimer des taux de mortalité selon des paramètres tels que l'âge et le temps. Pour cela, il existe de nombreux modèles permettant de réaliser cet exercice.

Dans le cadre de ce mémoire, trois modèles seront étudiés et calibrés sur la période 1990-2020 et sur les âges compris entre 30 et 70 ans.

En effet, les 30 dernières années semblent suffisamment pertinentes pour que le calibrage des taux de mortalité du passé reflète au mieux le futur. La tranche d'âge sélectionnée est choisie afin de refléter la tranche d'âge des salariés actifs qui sont assurés par un contrat de prévoyance collective.

Afin de comprendre les différents modèles présentés par la suite, la partie ci-dessous présentera des premières notions qui seront utilisées ultérieurement :

$x$  : âge

$t$  : année calendaire

$d(x, t)$  : nombre de décès d'âge  $x$  au cours de l'année  $t$

$l(x, t)$  : nombre de vivants d'âge  $x$  au début de l'année  $t$

$E(x, t)$  : nombre de vivants d'âge  $x$  en milieu d'année  $t$ , cette valeur se rapproche de la notion d'exposition à l'âge  $x$  sur la période  $t$

$q(x, t)$  : probabilité de décéder à l'âge  $x$  l'année suivante :

$$q(x, t) = \frac{d(x, t)}{l(x, t)}$$

$m(x, t)$  : taux de mortalité central sur une année

$$m(x, t) = \frac{d(x, t)}{E(x, t)}$$

Ainsi trois modèles seront étudiés ci-dessous, les deux premiers utiliseront la notion de taux de mortalité central contrairement au dernier modèle qui sera basé sur la notion de probabilité de décès.

### 2.3.1. Modèle Lee Carter

Le modèle de Lee Carter, noté M1, est l'un des modèles de mortalité les plus connus pour estimer des taux de mortalité. En effet, ce modèle a la particularité d'être simple et intègre uniquement des facteurs en fonction de l'âge et du temps :

$$\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \beta_x^2 \kappa_t^2$$

dont les facteurs :

$\beta_x^1$  permet de décrire le taux de mortalité selon l'âge  $x$ ,

$\kappa_t^2$  permet de tenir compte du changement de taux de mortalité en fonction du temps  $t$

$\beta_x^2$  permet de réajuster  $\beta_x^1$  selon l'impact de  $\kappa_t^2$

Ce modèle a pour conséquence de supposer que les taux de mortalité futurs continuent à s'améliorer au même rythme que par le passé, il ne tient pas compte des effets de générations (cohortes).

Des contraintes sont ajoutées dans ces modèles :

$$\sum_t \kappa_t^2 = 0$$

L'objectif est de considérer que chaque âge  $x$ ,  $\beta_x^1$  est égal à la moyenne sur la période étudiée.

$$\sum_x \beta_x^2 = 1$$

Cette seconde contrainte permet d'avoir une solution unique à l'équation.

#### **Résultats :**

Afin de visualiser le calibrage du modèle, les valeurs de  $\beta_x^1$ ,  $\beta_x^2$  et  $\kappa_t^2$  sont présentées ci-dessous.

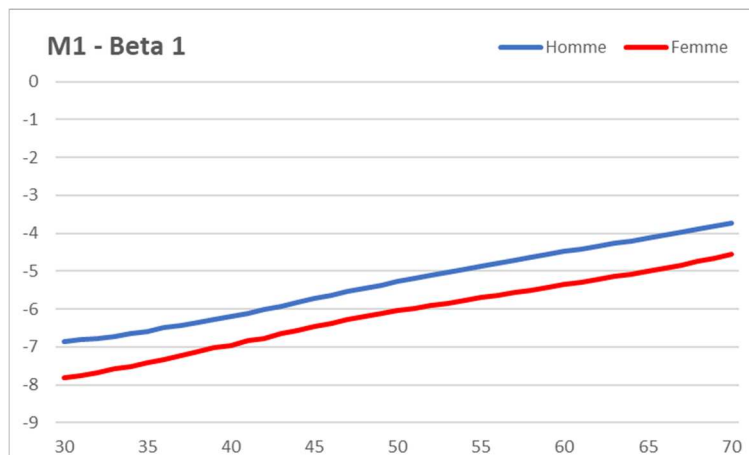


Schéma n°15 : Résultats des  $\beta_x^1$  du modèle M1

La valeur  $\beta_x^1$  augmente avec l'âge, cette valeur est indépendante du temps.

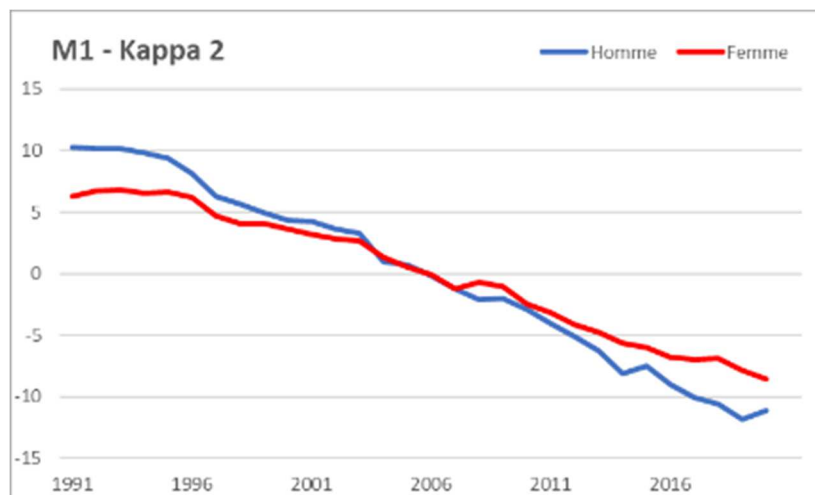


Schéma n°16 : Résultats des  $\kappa_t^2$  du modèle M1

La valeur  $\kappa_t^2$ , qui est décroissance, a pour objectif de diminuer les taux de mortalité lorsque les années sont plus récentes. Ce coefficient permet ainsi de tenir compte de l'amélioration des taux de mortalité dans le temps. Cependant, cette amélioration ne sera pas similaire selon les âges.

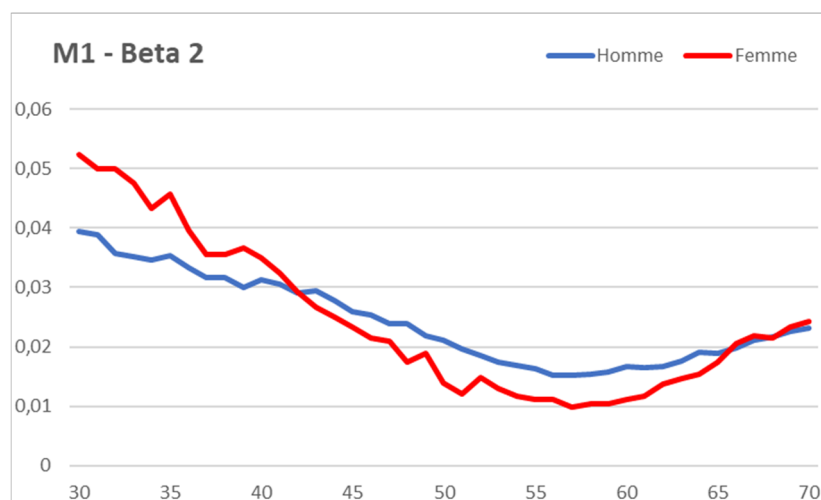


Schéma n°17 : Résultats des  $\beta_x^2$  du modèle M1

En effet, l'amélioration contenue dans  $\kappa_t^2$  a plus d'impact sur les âges jeunes grâce à la courbe décroissance de  $\beta_x^2$  jusqu'à l'âge de 58 ans. Cet effet remonte ensuite sur les âges 60 à 70 ans.

### 2.3.2. Modèle Age Period Cohort

Le modèle *Age Period Cohort*, noté M3, est un modèle plus complexe que le modèle Lee Carter. En effet, ce modèle capture les effets du temps mais également générationnels (cohortes) qui sont indépendants de l'effet âge :

$$\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \frac{1}{n_a} \kappa_t^2 + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^3$$

dont les facteurs :

$\beta_x^1$  permet de décrire le taux mortalité selon l'âge  $x$ ,

$\kappa_t^2$  permet de tenir compte du changement de taux de mortalité en fonction du temps  $t$ ,

$\gamma_{t-x}^3$  permet d'ajouter un effet cohorte

$n_a$  représente le nombre d'âges étudiés

De même que le modèle Lee Carter, des contraintes sont ajoutées :

$$\sum_t \kappa_t^2 = 0$$

Cette contrainte permet de considérer pour chaque  $x$  que  $\beta_x^1$  soit égale à la moyenne sur la période de calibrage.

$$\sum_t \sum_x \gamma_{t-x}^3 = 0$$

Cette seconde contrainte permet d'avoir une solution unique à l'équation.

#### Résultats

Similaire à l'étude du modèle Lee Carter, les valeurs de  $\beta_x^1$ ,  $\kappa_t^2$  et  $\gamma_{t-x}^3$  sont illustrées graphiquement ci-dessous afin de comprendre le calibrage du modèle.

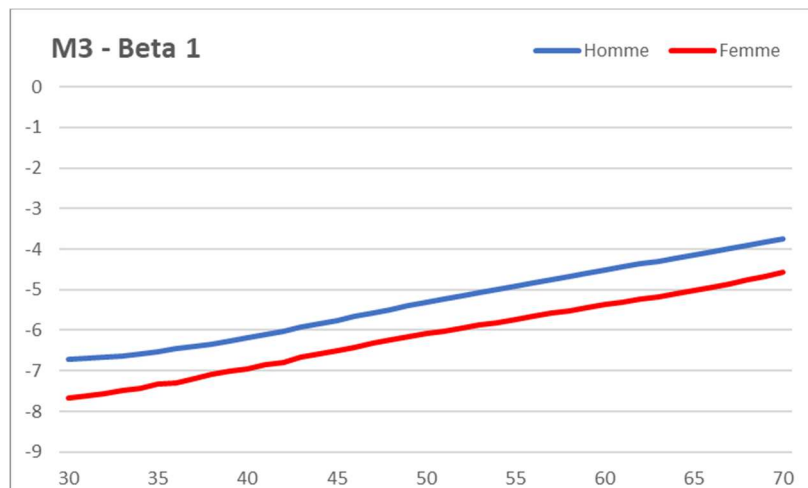


Schéma n°18 : Résultats des  $\beta_x^1$  du modèle M3

A travers les trois paramètres, les taux de mortalité augmentent ainsi lorsque l'âge augmente en tenant compte de la valeur  $\beta_x^1$  qui augmente en fonction de l'âge.

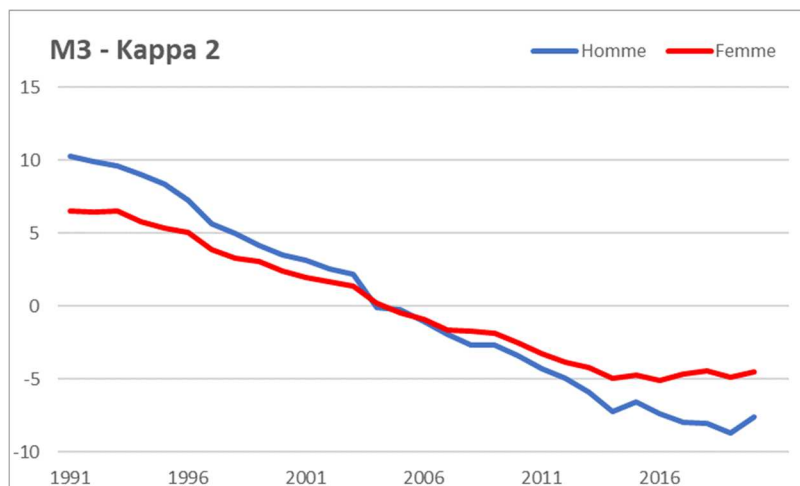


Schéma n°19 : Résultats des  $\kappa_t^2$  du modèle M3

De même que le modèle M1, le résultat diminue selon l'année d'observation à travers la valeur  $\kappa_t^2$  qui est décroissant lorsque l'année est plus récente.

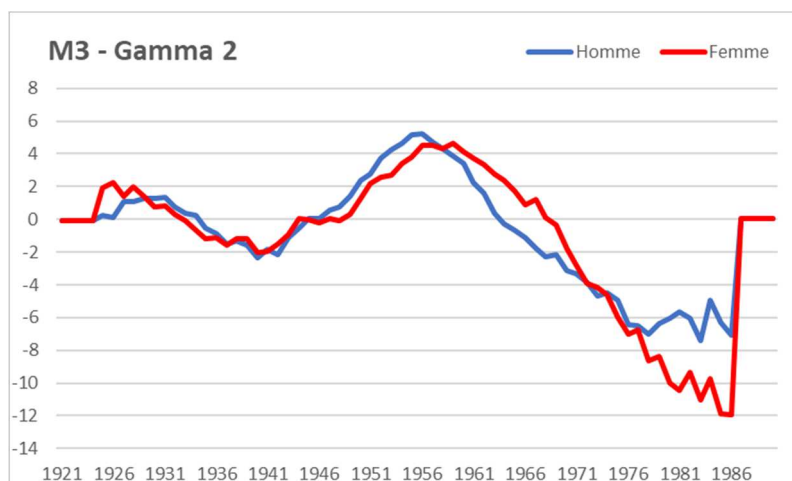


Schéma n°20 : Résultats des  $\gamma_{t-x}^3$  du modèle M3

La composante  $\gamma_{t-x}^3$  ajoute un effet générationnel dans les taux de mortalité, celle-ci affiche une tendance :

- Décroissante entre 1920 et 1940
- Croissante entre 1940 et 1956
- Décroissante sur les générations plus récentes.

Ainsi le modèle M3 illustre que le taux de mortalité d'une personne née en 1950 est plus élevée qu'une personne née en 1980.

### 2.3.3. Modèle Cairns Blake Dowd

Le modèle *Cairns, Blake and Dowd* (noté M5) est différent des deux modèles précédents. Ce dernier a la particularité d'estimer le taux de mortalité essentiellement en tenant compte de l'effet du temps. L'âge n'est pas utilisé comme un coefficient mais une variable dans ce modèle :

$$\text{logit } q(x, t) = \kappa_t^1 + \kappa_t^2(x - \bar{x})$$

dont les facteurs :

$\bar{x}$  représente la moyenne des âges étudiés

$\kappa_t^1$  permet de tenir compte du changement de taux de mortalité en fonction du temps  $t$ ,

$\kappa_t^2$  permet d'intégrer un second effet mais celui-ci diffère selon l'impact des âges étudiés

#### Résultats

Contrairement aux deux modèles précédents, le modèle M5 ne possède pas de coefficient dépendant de l'âge. Les valeurs de  $\kappa_t^1$  et  $\kappa_t^2$  sont présentées dans un premier temps.

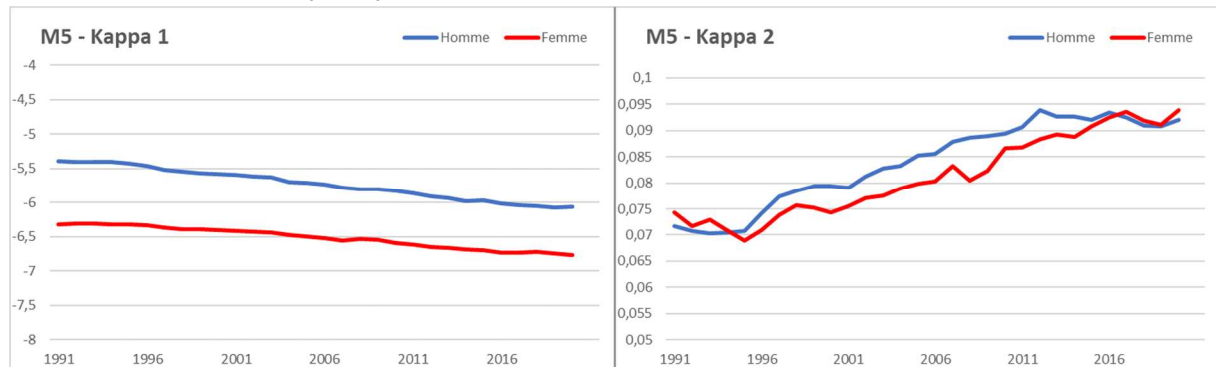


Schéma n°21 : Résultats des  $\kappa_t^1$  et  $\kappa_t^2$  du modèle M5

A travers les deux paramètres, le taux de mortalité diminue dans le temps avec le coefficient  $\kappa_t^1$ .

Le second paramètre  $\kappa_t^2$  n'est pas simple à interpréter individuellement. Le schéma n°22 représente l'impact ce paramètre en fonction de  $(x - \bar{x})$  pour les années 1991 et 2020.

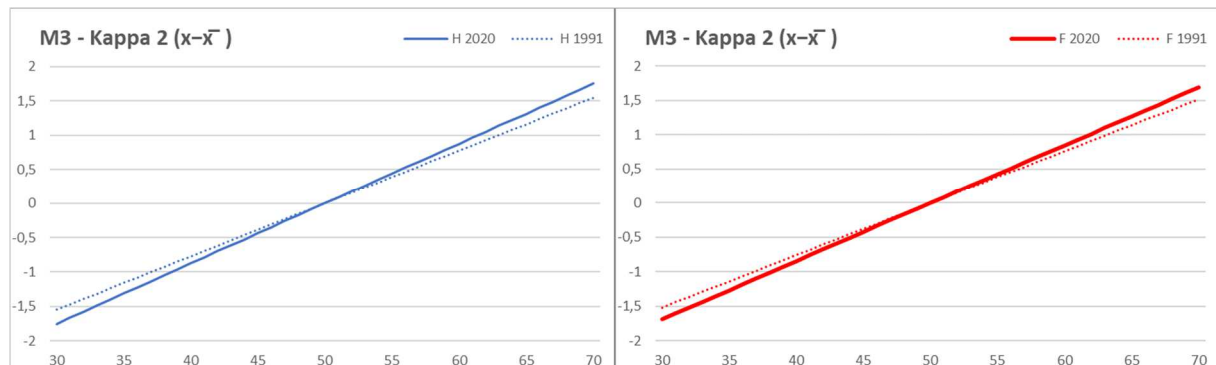


Schéma n°22 : Impact des  $\kappa_t^2$  des années 1991 et 2020 en fonction de l'âge

$(x - \bar{x})$  étant négatif entre 30 et 50 ans puis positif entre 50 à 70 ans, l'impact du coefficient  $\kappa_t^2$  estimé de manière croissante va ainsi avoir tendance à diminuer les taux des jeunes et augmenter les taux des plus âgés dans le temps.

Une fois le calibrage des trois modèles sur les données historiques (1990-2020) effectué, il reste à trouver une méthode pour projeter ces modèles.

### 2.3.4. Projection des modèles

Dans les trois modèles, il existe trois types de coefficients :  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$  et  $\gamma_{t-x}$ .

Le paramètre  $\beta_x$  ne varie pas en fonction du temps, ce paramètre est donc déjà estimé à partir des données historiques.

Les paramètres  $\kappa_t$  et  $\gamma_{t-x}$  varient en fonction de  $t$  qui représente le temps, il sera donc nécessaire de les projeter.

#### **Projection Kappa**

$\kappa_t$  est le paramètre qui évolue selon les années calendaires.

Les graphiques des  $\kappa_t^2$  des modèles M1 et M3 et  $\kappa_t^1$  du modèle M5 se rapprochent d'une droite décroissante. Ces coefficients peuvent donc être approchés par une droite linéaire.

Afin d'estimer les valeurs de  $\kappa_t$  pour les 60 prochaines années, ce coefficient sera donc projeté sous la forme d'une régression linéaire :

$$\kappa_t(t) = a_t + b_t t$$

Pour simplifier l'étude, le coefficient  $\kappa_t^2$  du modèle M5 sera projeté en estimant la moyenne des différences des  $\kappa_t^2$

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \kappa_t^2(t+1) - \kappa_t^2(t)$$

Avec  $n$  le nombre d'années étudiées

Ainsi, les  $\kappa_t^2$  projetés sont estimés de la manière suivante :

$$\kappa_t^2(t+1) = \kappa_t^2(t) + \Delta$$

#### **Projection Gamma**

$\gamma_{t-x}^3$  est le paramètre qui évolue selon les générations de naissance des assurés (cohortes).

Ce coefficient, présent dans le modèle M3, ne doit pas dépendre des années calendaires contrairement au paramètre  $\kappa_t^2$ .

L'objectif est donc de trouver une tendance sur les évolutions des  $\gamma_{t-x}^3$ .

Pour cela, le modèle ARIMA est adapté pour modéliser des séries temporelles.

$\gamma_{t-x}^3$  sera projeté selon un modèle Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA).

Un modèle ARIMA repose sur 3 processus : autorégressif, intégration et moyenne mobile :

- Les processus autorégressifs (AR) supposent que chaque point peut être prédit par la somme pondérée d'un ensemble de points précédents, plus un terme aléatoire d'erreur.
- Le processus d'intégration (I) suppose que chaque point présente une différence constante avec le point précédent.
- Les processus de moyenne mobile (MA) supposent que chaque point est fonction des erreurs entachant les points précédents, plus sa propre erreur.

Ainsi, un modèle ARIMA possède 3 paramètres : p est le nombre de termes auto-régressifs, d est le nombre de différences et q est le nombre de moyennes mobiles.

En effet, le modèle ARIMA semble adapté pour modéliser les générations. Le graphe ci-dessous illustre l'impact de l'observation des  $\gamma_t^3$  ou des  $(\gamma_t^3 - \gamma_{t-1}^3)$ , la différence des gammas devient ainsi stationnaire :

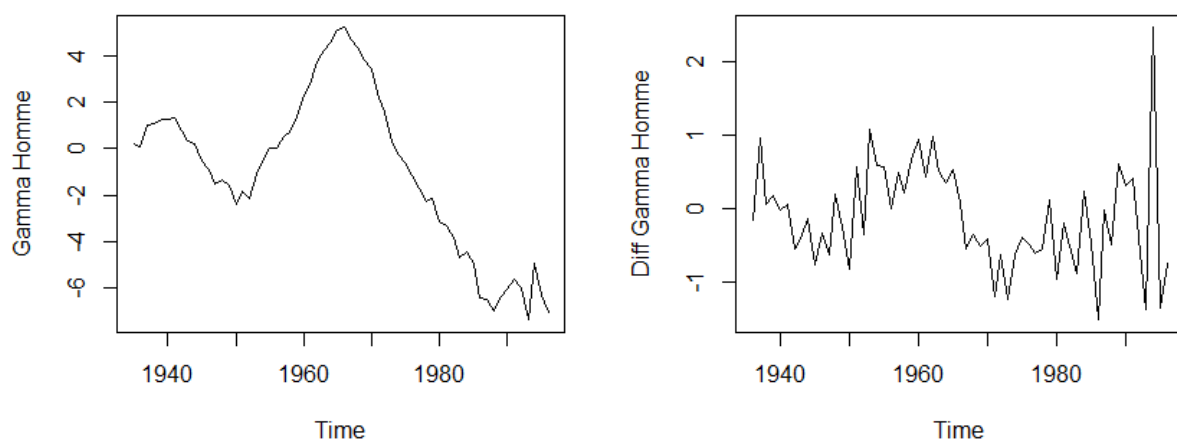


Schéma n°23 : Représentation des  $\gamma_t^3$  et  $(\gamma_t^3 - \gamma_{t-1}^3)$ ,

Les différents paramètres du modèle ARIMA seront testés, le meilleur modèle sera sélectionné selon les critères :

- La courbe des résultats
- Le critère d'AIC

### Critère d'information d'Akaike

$$AIC = 2k - 2 \ln(L)$$

où k est le nombre de paramètres à estimer du modèle et L est le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle.

Cet indicateur permet de mesurer la divergence entre le modèle ARIMA et les données brutes. L'objectif est de sélectionner les AIC les plus faibles.



		AR	I	MA	AIC
Femme		3	2	3	120
		3	1	1	121
		2	1	1	124
		3	2	0	126
		2	1	2	126

		AR	I	MA	AIC
Homme		3	1	0	125
		1	1	2	125
		3	1	1	127
		1	2	3	127
		1	2	2	128

Tableau n°4 : Résultats des AIC

Les AIC sont très proches, les résultats des prédictions sont également observés afin de choisir le meilleur modèle.

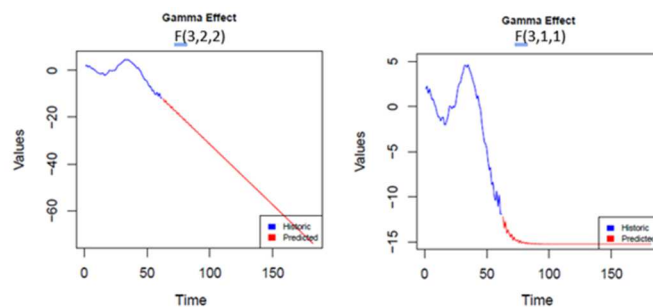


Schéma n°24 : Modélisation des  $\gamma_t^3$  femmes

Le modèle ARIMA(3,2,2) affiche une décroissance importante contrairement au modèle ARIMA(3,1,1) qui se stabilise à -15.

Pour rappel, les  $\gamma_t^3$  ont été construits de sorte que la somme des  $\gamma_t^3$  soit nulle.

Ainsi le modèle ARIMA(3,2,2) ne semble donc pas refléter cette contrainte, le second modèle est donc préféré pour la modélisation des femmes.

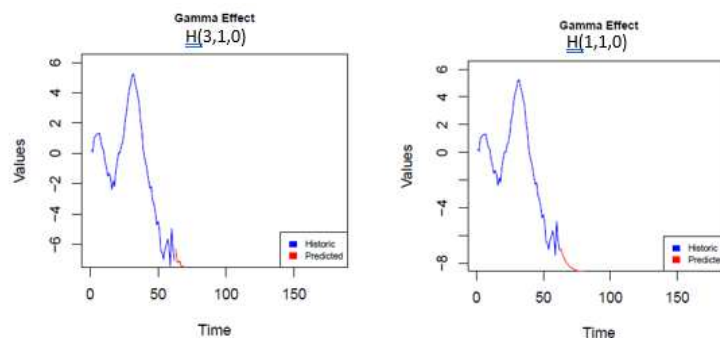


Schéma n°25 : Modélisation des  $\gamma_t^3$  hommes

Concernant les modèles des hommes, les deux modèles affichent des prédictions très proches.

Cependant, la courbe de prédiction du modèle ARIMA(3,1,0) est moins lisse que celle du modèle ARIMA(1,1,0). Le second modèle est également choisi pour les hommes.

A noter que la projection de ce paramètre reste mineure dans cette étude car les  $\gamma_{t-x}^3$  associés aux invalides du portefeuille AXA sont déjà estimés depuis les données historiques.

Dans le cadre de cette étude, les  $\gamma_{t-x}^3$  prédits ne seront donc pas utilisés pour le calibrage du choc.

Une fois le calibrage réalisé et la méthode de projection déterminée pour les trois modèles, il reste à choisir le meilleur modèle pour estimer les taux de mortalité de la population nationale. Pour cela plusieurs études sont réalisées pour sélectionner le modèle.

### 2.3.5. Choix du modèle

Les trois modèles intègrent des informations très différentes, le choix du modèle devra être sélectionné selon plusieurs analyses complémentaires.

L'objectif est donc de choisir le modèle qui reflète au mieux le comportement de la population. Pour cela, un backtesting est réalisé sur les 50 dernières années.

Les 30 premières années (1971 à 2000) serviront à calibrer les différents modèles et les 20 dernières seront utilisées pour mesurer les écarts entre les taux de mortalité réels et les prédictions obtenues par les modèles en projetant les paramètres  $\kappa_t$  et  $\gamma_{t-x}$ .

A partir des 20 dernières années, les résultats seront observés selon :

- Une analyse graphique : comparaison des résultats historiques et des différents modèles sur des âges et des générations
- Le ratio Standardized Mortality Ratio
- Le critère BIC

#### Analyse graphique :

Cette première partie consistera à étudier graphiquement les probabilités de décès obtenues selon les modèles et de les comparer avec les taux réels.

Pour ce faire, les âges 40, 50 et 60 ans mais également les générations 1960, 1970 et 1980 sont présentés sur les schémas n°26 à n°29 :

#### Résultats pour les femmes

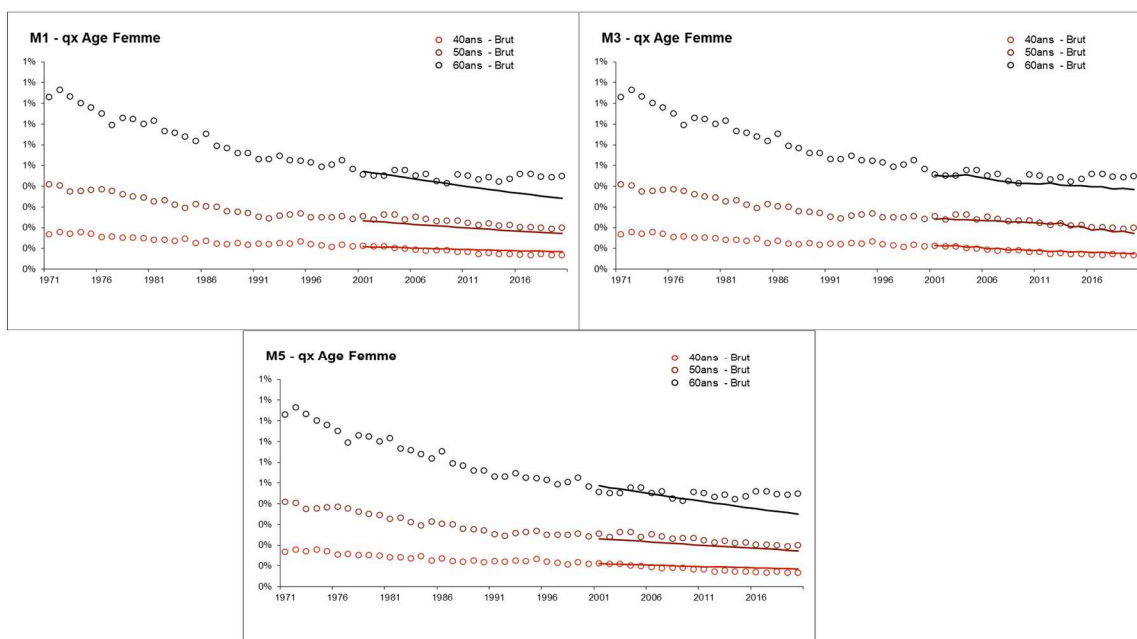


Schéma n°26 : Résultats par âge pour les femmes

Graphiquement, les trois modèles sont très proches des résultats réels pour les âges de 40 ans.

Néanmoins, le modèle M3 prédit mieux les résultats pour les âges de 50 et 60 ans. En effet les résultats des modèles M1 et M5 sur ces âges présentent des probabilités de décès très faibles par rapport aux probabilités de décès réels.

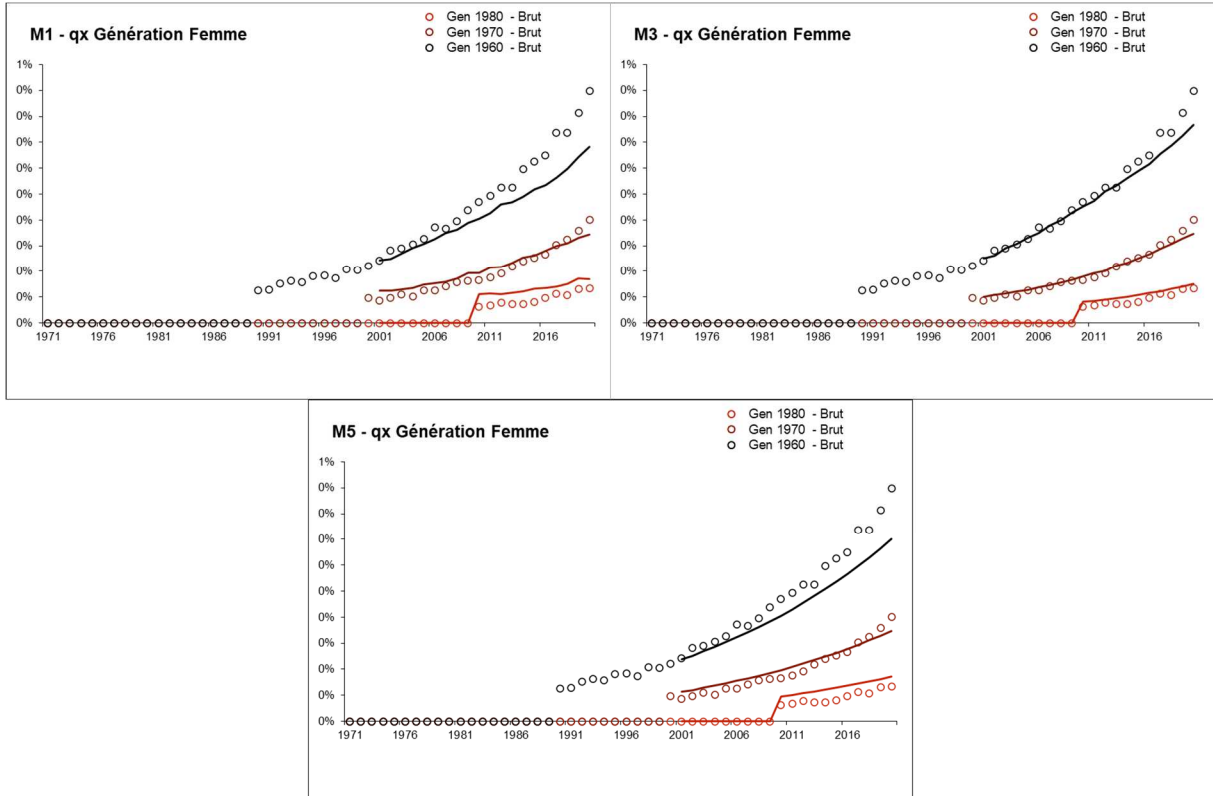


Schéma n°27 : Résultats par génération pour les femmes

Similaire aux résultats par âge, le modèle M3 prédit le mieux les taux. En effet, le modèle M3 se rapproche le plus des résultats réels pour les trois générations présentées.

Résultats pour les hommes

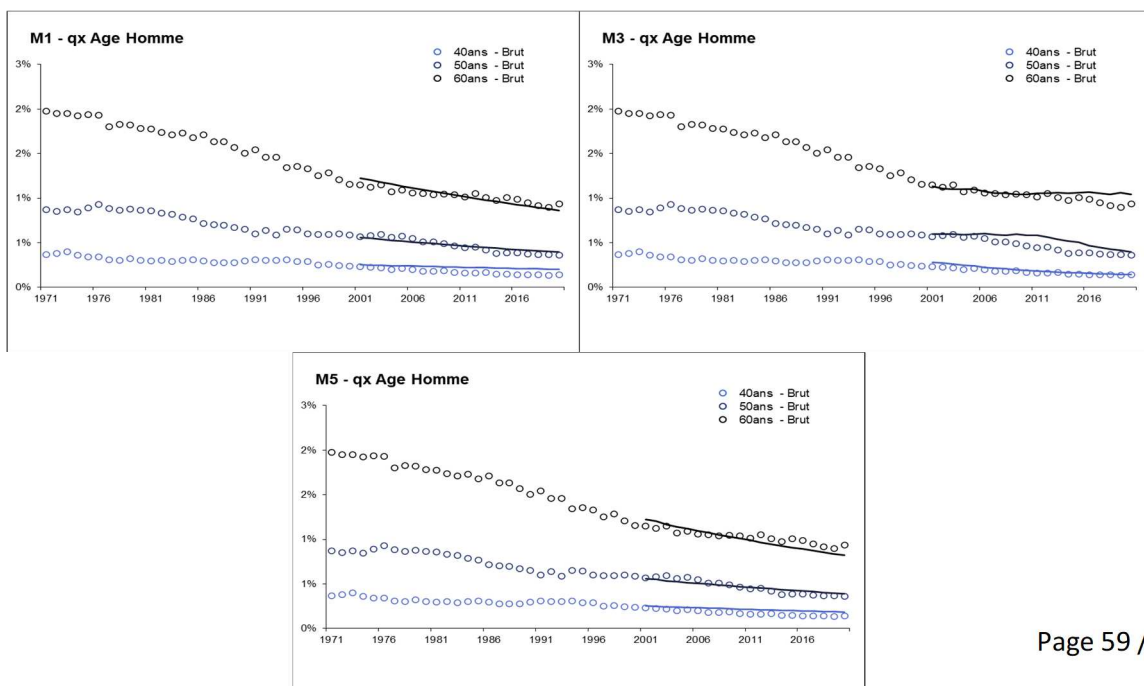


Schéma n°28 : Résultats par âge pour les hommes



Les résultats sont plus difficiles à interpréter pour les hommes.

Le modèle M3 prédit mieux pour les âges de 40 ans mais s'éloigne des résultats pour les âges de 50 et 60 ans. Les modèles M1 et M5 présentent les meilleures prédictions pour les âges 50 et 60 ans.

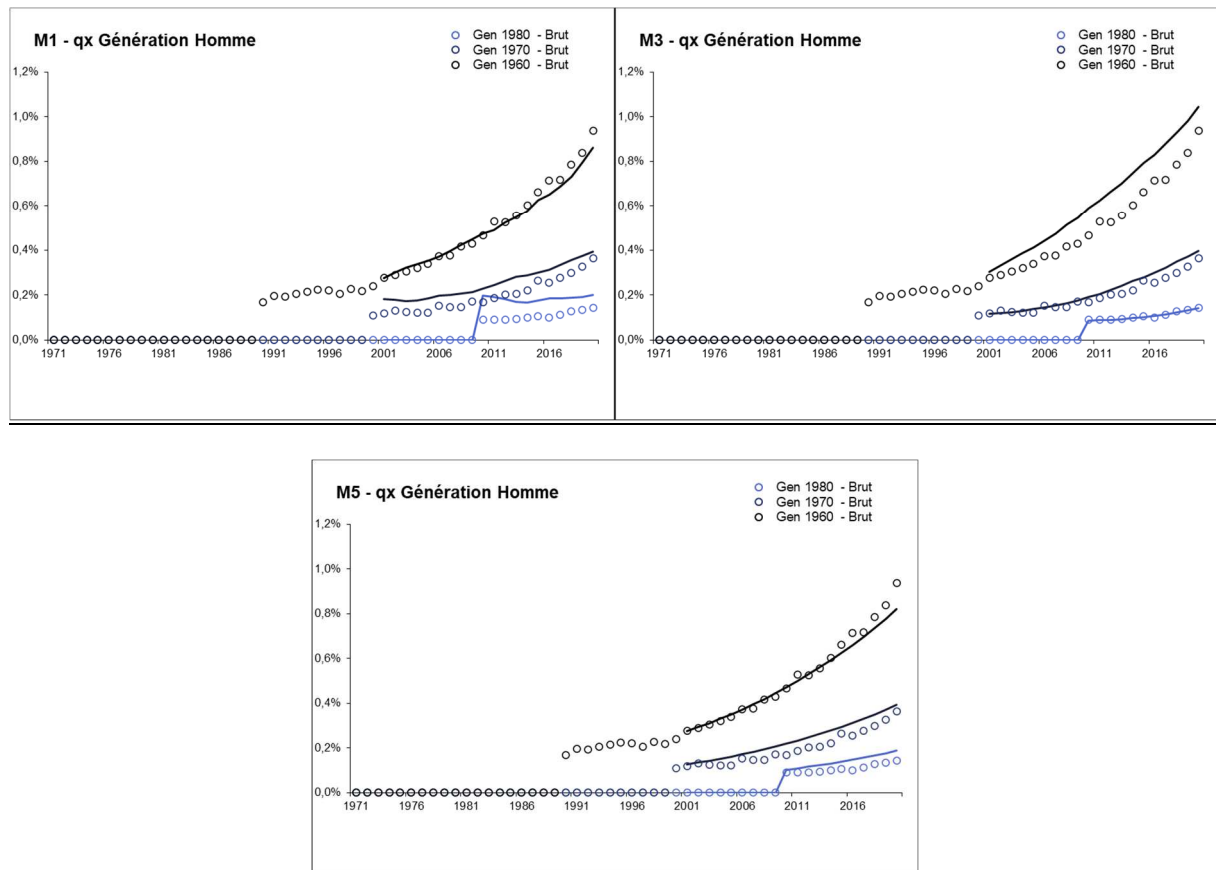


Schéma n°29 : Résultats par génération pour les hommes

Les résultats par génération montrent que le modèle M1 n'est pas assez précis pour les âges jeunes.

Quant au modèle M3, celui-ci possède la meilleure prédiction pour les âges jeunes et le moins précis pour les âges élevés. Le modèle M5 semble être un bon compromis pour les hommes.

**Standardizer Mortality Ratio (SMR) :**

Le Standardized mortality ratio est un coefficient permettant de mesurer le rapport entre le nombre de décès observés et le nombre de décès attendus selon les modèles :

$$SMR = \frac{q(x, t) E(x, t)}{\hat{q}(x, t) E(x, t)} = \frac{q(x, t)}{\hat{q}(x, t)}$$

Lorsque le SMR est

- Egale à 1, les probabilités de décès estimées par le modèle sont égales aux probabilités de décès brutes
- Inférieur à 1, le modèle estime plus de décès que la réalité, le modèle n'est pas assez prudent pour des études de longévité
- Supérieur à 1, le modèle estime moins de décès que la réalité, le modèle est prudent pour des études de longévité

## Résultats

Femme	30	40	45	50	60	1990	1980	1975	1970	1960
M1	61%	88%	102%	113%	112%	68%	78%	90%	104%	115%
M3	80%	92%	100%	105%	108%	83%	87%	98%	97%	104%
M5	71%	87%	102%	113%	109%	70%	79%	91%	103%	114%

Tableau n°5 : Résultats des SMR des modèles Femme

Le modèle M3 pour les femmes présente les meilleurs ratios, proches de 100%.

Homme	30	40	45	50	60	1990	1980	1975	1970	1960
M1	45%	77%	88%	98%	100%	58%	66%	77%	88%	101%
M3	102%	89%	86%	86%	96%	101%	96%	92%	82%	83%
M5	87%	80%	89%	99%	103%	77%	79%	84%	90%	102%

Tableau n°6 : Résultats des SMR des modèles Homme

De même que les résultats graphiques, il est difficile de sélectionner le meilleur modèle pour les hommes.

Cependant, le modèle M3 est le seul qui ne présente pas de taux inférieur à 80% contrairement au modèle M1 et M5 qui affichent des écarts très importants pour les âges jeunes et les générations les plus récentes.

## Bayesian Information Criterion

Enfin, un dernier critère est étudié pour choisir le modèle le plus adéquat : le critère bayésien.

$$BIC = -2 \ln(L) + k \ln(N)$$

Avec

L la vraisemblance du modèle estimée

N le nombre d'observation

k le nombre de paramètres

Cet indicateur permet donc de mesurer la divergence entre le modèle et les données brutes. La particularité de ce critère est qu'il fait également intervenir une pénalité proportionnelle au nombre de paramètres des modèles. Ainsi, il défavorise les grands modèles qui peuvent apporter trop d'informations et créer du sur-apprentissage.

## Résultats

	Homme	Femme
M1 Lee Carter	-9 122	-6 836
M3 APC	-7 083	-6 389
M5 CBD	-11 787	-8 836

Tableau n°7 : Résultats BIC

L'objectif du critère BIC est d'obtenir le niveau le plus proche de 0. Ainsi le modèle M3 est le meilleur modèle d'après le critère BIC.

### Modèle retenu

A travers ce backtesting, le modèle M3 est le plus adéquat pour modéliser les femmes à travers les différents tests graphiques ou techniques. Concernant les hommes, le choix sera porté également par le modèle M3. Ce dernier ne présente pas toujours les meilleurs résultats mais il est le seul à ne pas avoir de divergences trop importantes.

## 2.4. Portefeuille AXA

Une fois que les taux de mortalité de la population nationale sont calibrés selon un modèle précis, la partie suivante consistera à étudier les taux de mortalité du portefeuille d'AXA.

Pour cela, les données des déclarations sociales nominatives seront utilisées pour mesurer la mortalité de ce portefeuille.

En effet, les DSN permettent de suivre la présence d'un assuré dans le temps, celle-ci peut se terminer lorsqu'un salarié quitte l'entreprise, décède ou que l'entreprise résilie son contrat d'assurance collective.

Ainsi, il sera possible d'estimer la durée de présence d'un assuré en tenant compte de son âge selon la période étudiée.

A partir de ces durées de présence mais également des informations sur les décès, il sera possible de calculer des taux de mortalité notamment à partir de l'estimateur des moments de Hoem.

### 2.4.1. Estimateur des moments de Hoem

La méthode des moments de Hoem permet d'estimer de manière non paramétrique le taux de mortalité.

Cet estimateur prend l'hypothèse qu'entre deux âges successifs, la distribution des décès est linéaire.

Dans le but de présenter cet estimateur, des notations sont introduites :

- $n_x$  : le nombre de salariés vivants entre les âges  $x$  et  $x + 1$

- $i_x$  : le nombre de décès entre les âges  $x$  et  $x + 1$
- $q_x$  : la probabilité de décès pour un individu d'âge  $x$
- $[a_k; b_k] \subset ]x; x + 1]$  : l'intervalle dans lequel est observé le salarié  $k$  entre les âges  $x$  et  $x + 1$
- $X_k$  la variable aléatoire représentant le décès du salarié  $k$ .

Les variables  $X_k$  sont supposées indépendantes et identiquement distribuées. Etant donné que les décès surviennent linéairement entre  $x$  et  $x + 1$ , la variable  $X_k$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $(b_k - a_k)q_x$ .

Ainsi le nombre décès  $I_x$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n_x; (b_k - a_k)q_x)$ .

Le principe de cette méthode des moments est de maximiser la vraisemblance de cette loi selon  $q_x$ , ce qui revient à résoudre :

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax}_{q_x} L(q_x) &= \prod_{k=1}^{n_x} P_{k,q_x}(I_x = i_x) \\ \operatorname{argmax}_{q_x} L(q_x) &= \prod_{k=1}^{n_x} C_{n_x}^{i_x} [(b_k - a_k)q_x]^{i_x} [1 - (b_k - a_k)q_x]^{n_x - i_x} \end{aligned}$$

Trouver le maximum de la vraisemblance est équivalent à trouver le maximum de la log vraisemblance. Pour cela, il suffit de trouver la valeur de  $q_x$  qui annule la dérivée.

$$\frac{d \log L(\hat{q}_x)}{d q_x} = \sum_{k=1}^{n_x} \frac{i_x (1 - (b_k - a_k)\hat{q}_x) - (n_x - i_x)(b_k - a_k)\hat{q}_x}{(b_k - a_k)\hat{q}_x (1 - (b_k - a_k)\hat{q}_x)} = 0$$

Après simplification, nous trouvons :

$$\sum_{k=1}^{n_x} [i_x - n_x (b_k - a_k)\hat{q}_x] = 0$$

Les taux de mortalité peuvent donc être estimés de la manière suivante :

$$\hat{q}_x = \frac{i_x}{\sum_{k=1}^{n_x} (b_k - a_k)}$$

## Résultats :

Afin de présenter les résultats, le schéma n°30 illustre les taux de mortalité en fonction des âges et des années :

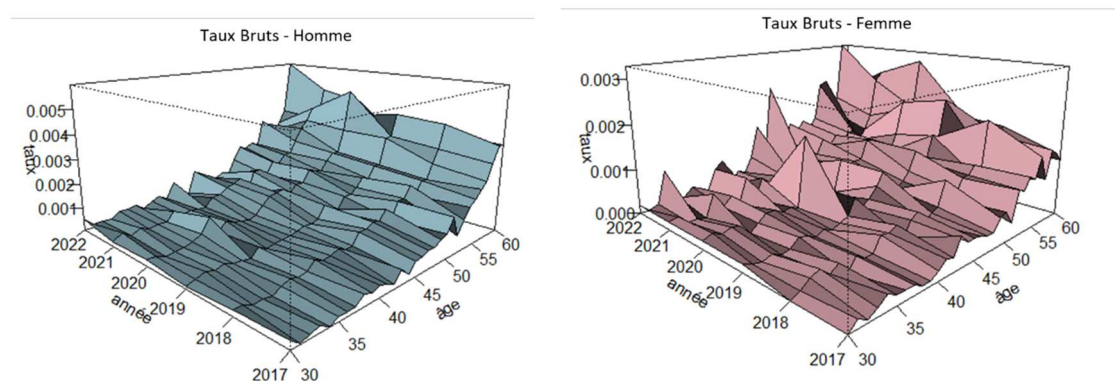


Schéma n°30 : Graphes représentant les probabilités de décès en fonction de l'âge et des années

En observant les échelles, les probabilités de décès des hommes sont plus élevées que celles des femmes.

Les taux des femmes sont plus volatils que ceux des hommes. Ce point est expliqué notamment par une forte présence de décès chez les hommes dans le portefeuille d'AXA. En effet, 28% des décès observés dans le portefeuille sont des femmes d'après le schéma n°13.

Ces données brutes nécessitent donc d'être lissées afin de pouvoir les utiliser par la suite. Pour cela, la méthode de Whittaker Henderson sera utilisée.

### 2.4.2. Lissage Whittaker-Henderson

Le modèle Whittaker-Henderson (WH) consiste à lisser des données en combinant un critère de fidélité et un critère de régularité. L'objectif de ce modèle est de chercher des valeurs minimisant une combinaison linéaire de ces deux critères.

Ce modèle est généralement utilisé à une dimension mais il est également possible de trouver une déclinaison de ce lissage à deux dimensions.

Ainsi, cette méthode permettra de lisser les probabilités de décès brutes par âge mais également par année d'observation.

La partie suivante va détailler la méthode Whittaker-Henderson à une dimension afin de comprendre l'approche à deux dimensions.

#### Modélisation à une dimension

La méthode de lissage de Whittaker-Henderson se base sur deux critères :

- F : un critère de fidélité

$$F = \sum_{x=1}^n w_x (q_x - \hat{q}_x)^2$$



- S : un critère de régularité

$$S = \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z \hat{q}_x)^2$$

où

$w_x$  : le poids attribué à chaque âge  $x$

$q_x$  : les probabilités de décès brutes estimées

$\hat{q}_x$  : les probabilités de décès lissées

$n$  : le nombre d'âges étudiés

$z$  : un paramètre du modèle correspondant à un entier positif

$$\Delta^z q_x = \sum_{j=0}^z C_j^z (-1)^{z-j} q_{x+j}$$

L'objectif est de minimiser

$$M = F + h S$$

où  $h$  est un paramètre du modèle qui détermine l'importance attribuée à la régularité par rapport à la fidélité.

Il est possible de résoudre ce problème d'optimisation de manière matricielle en posant :

- $Q = (q_x)_{x=1..n}$
- $\hat{Q} = (\hat{q}_x)_{x=1..n}$
- $W = \text{diag}((w_x)_{x=1..n})$ , une matrice diagonale contenant les poids  $w_x$  sur sa diagonale.
- $K_z$  la matrice de taille  $(n-z; n)$  et dont les termes sont les coefficients binomiaux d'ordre  $z$ .

Par exemple pour  $n = 4$  et  $z = 2$ , on obtient :  $K_z = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi  $F$  et  $S$  se réécrivent :

$$F = (Q - \hat{Q})' W (Q - \hat{Q}) \text{ et } S = (K_z \hat{Q})' (K_z \hat{Q})$$

L'expression de  $M$  peut être réécrite de la manière suivante avec les nouvelles expressions de  $F$  et  $S$  :

$$M = \hat{Q}' W \hat{Q} - 2 \hat{Q}' W Q + Q' W Q + h \hat{Q}' K_z' K_z \hat{Q}$$

En dérivant  $M$  par rapport à  $\hat{Q}$ :

$$\frac{\partial M}{\partial \hat{Q}} = 2W\hat{Q} - 2WQ + 2hK_z'K_z\hat{Q}$$

Cette expression doit être nulle à l'optimum, ce qui aboutit à la valeur de  $\hat{Q}$  :

$$\hat{Q} = (W + hK_z'K_z)^{-1}WQ$$

Les probabilités de décès peuvent être lissées selon deux paramètres  $z$  et  $h$  permettant ainsi de lisser les taux selon l'âge ou l'année d'observation.

Dans le cadre de ce mémoire, le lissage doit être réalisé à l'horizontale pour les années calendaires mais également à la verticale pour les âges : le modèle de WH à deux dimensions est appliqué.

### Modélisation à deux dimensions

Whittaker Henderson à deux dimensions reprend les principes du modèle à une dimension. Pour les taux bruts, une notion d'année  $j$  est ajoutée dans le modèle.

Ainsi, la donnée  $Q$  ne représente plus un vecteur mais une matrice :

$$Q = (q_{xj})_{x=1..n, j=1..t}$$

Avec  $x$  correspondant à l'âge et  $j$  les années calendaires.

- $F$  : le critère de fidélité s'écrit donc de la manière suivante :

$$F = \sum_{x=1}^n \sum_{j=1}^t w_x (q_{xj} - \hat{q}_{xj})^2$$

- Dans le cadre du lissage à deux dimensions, deux indices seront calculés pour la régularité verticale et horizontale

$$S_v = \sum_{j=1}^t \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta_v^z \hat{q}_{xj})^2$$

$$S_h = \sum_{j=1}^t \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta_h^z \hat{q}_{xj})^2$$

L'objectif est de minimiser

$$M = F + \alpha S_v + \beta S_h$$

Ce problème est résolu grâce à un réarrangement des éléments pour se ramener au cas unidimensionnel.

Ainsi, il est nécessaire de définir un vecteur  $u$  de taille  $n \times t$ :

$$u_{q(x-1)+j} = \hat{q}_{xj}$$

Il s'agit en fait de prendre pour les  $q$  premiers éléments du vecteur  $u$  la première ligne de la matrice  $Q$  puis les éléments de la seconde ligne et ainsi de suite.

Une matrice de poids  $w^*$  est également créée, elle est réalisée en reprenant sur la diagonale les lignes de la matrice  $w_{ij}$  :

$$w_{q(x-1)+j, q(x-1)+1}^* = w_{ij}$$

Les matrices  $K_z^v$  et  $K_y^h$  sont définies de la même manière.

Finalement, les probabilités de décès lissées sont égales à :

$$q = (w^* + \alpha K_z^{v'} K_z^v + \beta K_y^{h'} K_y^h)^{-1} w^* u$$

### **Applications**

La difficulté de Whittaker Henderson est de trouver les bons paramètres pour obtenir une surface lissée sans perdre de l'information.

Pour cela, plusieurs sensibilités ont été réalisées sur les paramètres  $v$  et  $h$ . Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixés à 2 par défaut.

La sélection des modèles sera réalisée à partir de deux tests :

- SMR
- Test des signes

### **Standardized Mortality Ratio - SMR**

L'étude SMR expliquée dans la partie 2.3.5 dans le cadre de la sélection des modèles de taux. Ce calcul est à nouveau utilisé mais cette fois ci dans l'objectif de mesurer la différence entre les taux bruts et les taux lissés :

$$SMR = \frac{q(x, t)}{\hat{q}(x, t)}$$

Où  $q(x, t)$  représente les probabilités de décès brutes et  $\hat{q}(x, t)$  représente les probabilités de décès lissés obtenues par Whittaker-Henderson.

### **Application**

	v	h	SMR
Femme	2	2	103.5%
	3	3	102.9%
	4	4	102.7%
	5	5	101.0%
	3	5	100.9%

	v	h	SMR
Homme	2	2	100.9%
	3	3	99.93%
	4	4	100.04%
	5	5	100.59%
	4	4	100.04%

**Tableau n°8 : Résultats des SMR taux lissés**

Les résultats sont très proches de 100% selon les paramètres.

Les résultats les plus proches de 100% sont indiqués dans la dernière ligne du tableau.

### **Test des signes**

Il est également possible de mesurer la qualité du lissage en observant les différences entre les taux bruts et les taux lissés à partir du test des changements de signe.

Si le signe de la différence de  $q_x - \hat{q}_x$  a une probabilité de  $\frac{1}{2}$  d'être positif.

$$P(q_x - \hat{q}_x > 0) = P(q_x - \hat{q}_x < 0) = \frac{1}{2}$$

Et que les âges sont indépendants, la probabilité que  $q_x - \hat{q}_x$  et  $q_{x+1} - \hat{q}_{x+1}$  n'aient pas le même signe est donc aussi de  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
& P((q_x - \hat{q}_x) \text{ et } (q_{x+1} - \hat{q}_{x+1}) \text{ de signes } \neq) \\
&= P((q_x - \hat{q}_x) > 0)P((q_{x+1} - \hat{q}_{x+1}) < 0) + P((q_x - \hat{q}_x) < 0)P((q_{x+1} - \hat{q}_{x+1}) > 0) \\
&= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il est ainsi possible d'introduire que l'indicatrice  $1_{\{(q_x - \hat{q}_x) \text{ et } (q_{x+1} - \hat{q}_{x+1}) \text{ de signes opposés}\}}$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

Pour une plage de N observations, la somme notée  $S_+^-$  :

$$S_+^- = \sum_{i=1}^{N-1} 1_{\{(q_{x_i} - \hat{q}_{x_i}) \text{ et } (q_{x_{i+1}} - \hat{q}_{x_{i+1}}) \text{ de signes opposés}\}}$$

Cette variable suit une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(N - 1; \frac{1}{2}\right)$ , le nombre moyen de changements de  $\frac{N-1}{2}$ .

Il est donc possible d'en déduire un test en faisant l'approximation gaussienne, en s'appuyant sur la statistique :

$$Z = \frac{2S_+^- - (N - 1)}{\sqrt{N - 1}}$$

### Application

	v	h	Z	p-value		v	h	Z	p-value
Femme	2	2	0,63	0,26	Homme	2	2	0,45	0,33
	3	3	-0,45	0,33		3	3	-0,99	0,16
	4	4	-0,99	0,16		4	4	-0,45	0,33
	5	5	-1,17	0,12		5	5	0,45	0,33
	3	5	-1,35	0,09		4	4	0,45	0,33

Tableau n°9 : Résultats des tests taux lissés

En prenant le risque de première espèce  $\alpha$  à 5%

$$\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0,1) = 1,96$$

Les différentes valeurs de Z sont inférieures à  $\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0,1)$ , il est donc possible de retenir ces différents lissages.

### Résultats retenus :

A travers les ratios SMR et les tests des signes, les lissages suivants sont retenus :

	z	v	y	h
Homme	2	3	2	5
Femme	2	4	2	4

Tableau n°10 : Paramètres des modèles WH

Les graphes ci-dessous permettent de visualiser l'impact du lissage.

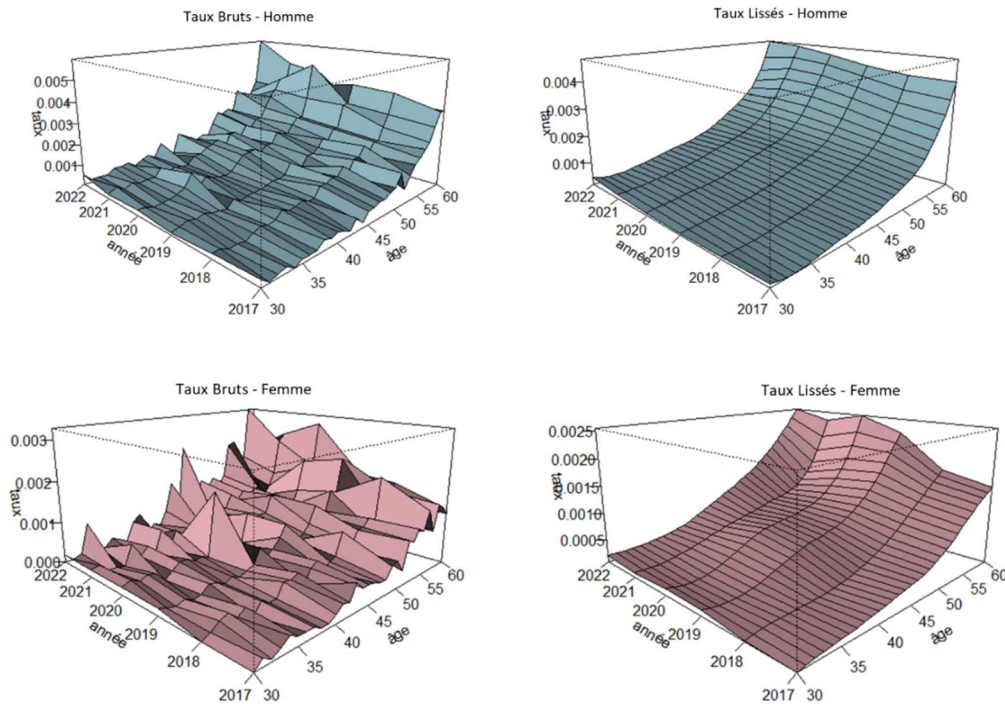


Schéma n°31 : Résultats des probabilités de décès après lissage par Whittaker-Henderson

Après avoir estimé les probabilités de décès du portefeuille AXA, la partie suivante consistera à trouver une relation entre ces résultats et les taux de mortalité obtenus depuis les modèles calibrés sur la population nationale.

## 2.5. Modèle relationnel

Le volume de données du portefeuille AXA ne permettant pas de modéliser les taux de mortalité de façon paramétrique, l'objectif de cette partie est d'ajuster les modèles estimés depuis la population nationale au portefeuille AXA.

Pour ajuster les modèles calibrés, il est nécessaire de trouver un modèle relationnel entre les probabilités de décès de la population nationale et le portefeuille AXA. Pour cela le modèle de Brass est utilisé.

En effet, le modèle de Brass permet de trouver un modèle relationnel entre les probabilités de décès des deux populations à partir d'une fonction logistique :

$$\text{logit } q_x^{AXA}(t) = \alpha + \beta \text{logit } q_x^{HMD}$$

En minimisant la différence des deux termes, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  pourront être déterminés :

$$\alpha + \beta \text{logit } q_x^{HMD} - \text{logit } q_x^{AXA}(t) = 0$$

Résultats :

	Homme	Femme
$\alpha$	-0,12	-0,11
$\beta$	1,15	1,13

Tableau n°11 : Paramètres du modèle de Brass

Le paramètre  $\beta$  est le coefficient le plus structurant dans la relation entre les deux populations. Ainsi, lorsque ce coefficient est supérieur à 1, la courbe des  $q_x^{HMD}$  est réajustée à la baisse. Le coefficient  $\alpha$  vient également diminuer la courbe mais son impact est bien plus faible.

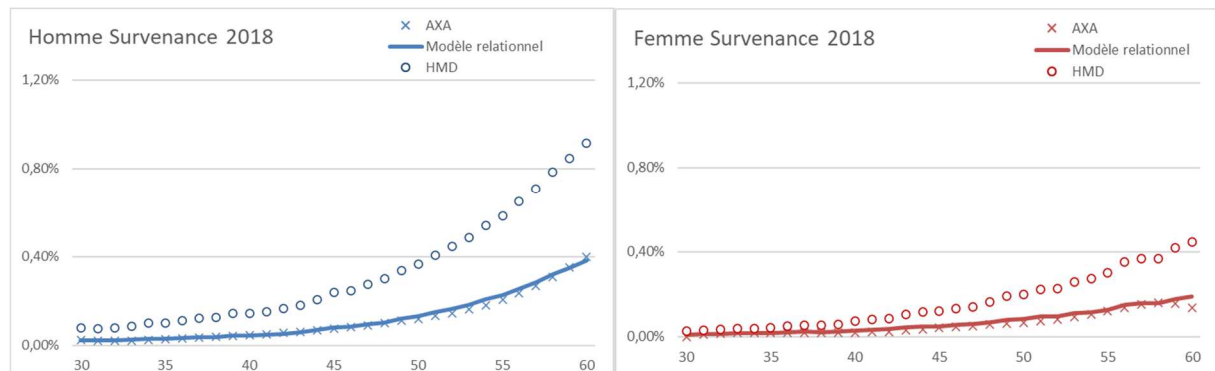


Schéma n°32 : Comparaison des probabilités de décès AXA et le modèle relationnel

Une fois que le modèle M3 est ajusté au portefeuille AXA, il sera possible de projeter le modèle pour estimer un choc de longévité.

## 2.6. Projection des modèles stochastiques

Une fois les modèles Cairns Blake Dowd ajustés au portefeuille AXA, il est enfin possible de projeter ces modèles dans les années futures de manière stochastique afin d'estimer un choc de longévité.

Pour rappel, le modèle M3 choisi pour les hommes et les femmes s'écrit de la manière suivante :

$$\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \frac{1}{n_a} \kappa_t^2 + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^3$$

Avec

$\beta_x^1$  permettant de décrire le taux de mortalité selon l'âge  $x$

$\kappa_t^2$  permettant de tenir compte du changement du taux de mortalité en fonction du temps  $t$

$\gamma_{t-x}^3$  permettant d'ajouter un effet cohorte

$n_a$  représentant le nombre d'âge

Dans le paragraphe 2.3.4, le paramètre  $\kappa_t^2$  est projeté sous la forme d'une régression linéaire et  $\gamma_{t-x}^3$  est projeté à partir d'un modèle ARIMA.

Pour modifier la projection des taux de mortalité, le coefficient  $\kappa_t^2$  sera soumis à des perturbations.

### **Estimation du scénario choc :**

Pour réaliser plusieurs scénarios de projection, la construction des  $\kappa_t^2$  sera stressée afin de modifier la régression linéaire et par conséquent générer des déviations des taux de mortalité.

Pour cela, la première valeur projetée de  $\kappa_t^2$  sera calculée selon la formule suivante :

$$\kappa_t^2(t + 1) = a_t + b_t(t + 1) + \sigma \varepsilon_{t+1}$$

Avec

$\varepsilon_{t+1}$  représentant un bruit blanc suivant une loi normale centrée réduite

$\sigma$  représentant l'écart type observé entre les  $\kappa_t^2$  historiques et ceux estimés par la régression

En ajoutant ce résultat à l'historique des  $\kappa_t^2$ , les paramètres de la régression linéaire seront recalculés :

$$\kappa_t^2(t + 1) = a'_t + b'_t(t + 1)$$

Cette méthode va permettre de réaliser 5 000 scénarios proposant des trajectoires différentes.

Ces simulations sont par la suite triées selon la courbe des  $\kappa_t^2$ .

Le scénario dont la courbe décroissante correspond au quantile à 99.5% parmi les 5000 scénarios sera identifié afin de représenter le scénario de longévité bicentenaire.

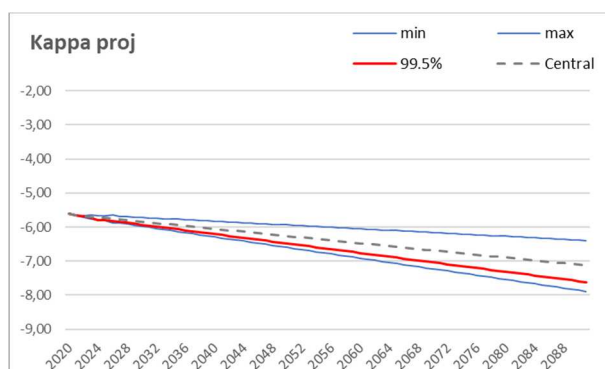


Schéma n°33 : Projection stochastique des  $\kappa_t^2$  du modèle M3

Le graphe ci-dessus présente les différentes trajectoires de  $\kappa_t^2$  projetées entre 2020 et 2090.

La droite en pointillé gris représente le scénario central, c'est-à-dire la projection de kappa sans avoir ajouter de bruit dans le modèle.

La droite en rouge représente le scénario 99,5% le plus extrême reflétant ainsi le scénario de longévité.

Ainsi, le scénario de longévité à travers ce modèle représente une déviation progressive des taux de mortalité dans le temps. En effet, les courbes rouges et en pointillé gris sont très proches en 2030. Cependant l'écart va s'agrandir dans le temps et notamment sur la fin de projection.

## 2.7. Calibrage du choc pour les Provisions Mathématiques

Pour calibrer le choc Solvabilité 2 qui sera appliqué sur les salariés en invalidité, il est nécessaire de récupérer la projection du scénario central et le scénario à 99,5%.

Les probabilités de décès  $q_x$  des deux scénarios seront par la suite reconstruites selon le modèle M3 :

$$\ln m(x, t) = \beta_x^1 + \frac{1}{n_a} \kappa_t^2 + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^3$$

Puis le modèle relationnel est ajouté pour obtenir des probabilités de décès ajustées au portefeuille d'AXA:

$$\text{logit } q_x^{AXA}(t) = \alpha + \beta \text{logit } q_x^{HMD}$$

Il est donc possible d'estimer les taux d'amélioration des probabilités de décès du choc S2 par âge, sexe et pour une année précise. Pour cela, il suffit d'observer la variation entre le scénario central et le scénario à 99,5%:

$$tx(\text{sexe}, x, t) = \frac{q_x^{AXA}(\text{sexe}, t, 99.5\%)}{q_x^{AXA}(\text{sexe}, t, \text{central})} - 1$$

### Résultats

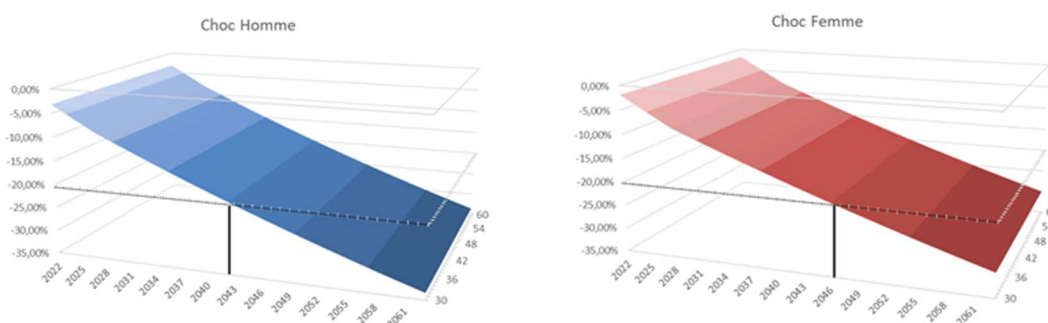


Schéma n°34 : Représentation graphique des chocs

Les graphes ci-dessus sont très similaires pour les deux sexes.

Cependant, lorsque les valeurs sont observées attentivement, les chocs des femmes sont légèrement plus faibles que ceux des hommes.

En effet, le niveau de -20% est atteint en 2043 pour les hommes contrairement aux femmes pour lesquelles ce niveau est atteint en 2046.



A travers cette étude prospective, l'amélioration de la longévité d'une population est réalisée de manière progressive contrairement au choc de la formule standard.

Le niveau de la formule standard est atteint seulement après 20 ans de projection.

Ainsi le choc de la formule standard semble être conservateur. Ce point sera également illustré en appliquant ces chocs dans le calcul de provisions mathématiques des salariés en invalidité.

## 2.8. Application du choc sur les provisions mathématiques d'invalidité

Une fois que les chocs de longévité pour les hommes et les femmes sont obtenus à partir des tables prospectives, ces valeurs devront être intégrés dans la table de maintien en invalidité du BCAC.

Les chocs sont exprimés en fonction du sexe, du temps et de l'âge à cet instant :

$$\text{choc}(\text{sexe}, t, \text{age}(t))$$

Ces paramètres ne sont pas similaires à la table du BCAC, qui est exprimé en fonction de l'âge d'entrée en invalidité et de son ancienneté dans cet état :

$$l_{a(t)}^x(\text{BCAC})$$

Avec

$x$  : âge entrée en invalidité

$a(t)$  : ancienneté en invalidité à l'instant  $t$

Afin d'identifier les liaisons entre les sources, un exemple avec deux assurés est présenté ci-dessous :

	Age survénance en invalidité	Ancienneté en 2021
Assuré 1	40	1
Assuré 2	40	11

Tableau n°12 : Exemple de données

Les deux assurés sont en invalidité à l'âge de 40 ans, le provisionnement sera calculé selon la table du BCAC à l'âge de 40 ans et en fonction de l'ancienneté de ces assurés.

Pendant, les chocs sont exprimés en fonction du sexe, de l'âge des assurés et à une date précise. Les informations ci-dessous ne sont pas suffisantes pour utiliser ces tables.

L'âge en 2021 et le sexe doivent être mentionnés pour utiliser les chocs :

	Age survénance en invalidité (x)	Ancienneté en 2021 (a)	Sexe	Age en 2021 age(t)	Génération
Assuré 1	40	1	Homme	41	1980
Assuré 2	40	11	Femme	51	1970

Tableau n°13 : Exemple de données – informations supplémentaires

Une relation a été identifiée pour trouver une connexion entre les deux tables :

$$x + a(t) = age(t)$$

Avec

$t$  : année calendaire

$x$  : âge entrée en invalidité, information de la table BCAC

$a(t)$  : durée en invalidité d'un invalide à un instant  $t$ , information de la table BCAC

$age(t)$  : âge d'un invalide à l'instant  $t$ , information de la table choquée

En observant cet exemple, il est donc possible d'avoir plusieurs tables du BCAC selon le sexe, l'âge de survenance et l'année de naissance (génération).

Ainsi, des tables du BCAC choquées sont créés de la manière suivante :

$$l_{a+1}^x(choc, gen, sexe) = l_a^x(choc, gen, sexe) \times \left[ 1 - \left[ \left[ 1 - \frac{l_{a+1}^x(BCAC)}{l_a^x(BCAC)} \right] \times (1 - choc(sexe, t, x + a)) \right] \right]$$

Avec

$x$  : âge entrée en invalidité

$a$  : ancienneté

$l_a^x(BCAC)$  : nombre de personnes vivantes entrées en invalidité à l'âge  $x$  et d'ancienneté  $a$  à l'instant  $t$  d'après la loi de maintien du BCAC.

$choc(sexe, t, x + a)$  : choc associé pour un assuré selon son sexe et âge  $x + a$  à cet instant  $t$

$l_{a+1}^x(choc, gen, sexe)$ : nombre de personnes vivantes entrées en invalidité à l'âge  $x$ , d'ancienneté  $a$  et en tenant compte de son année de naissance et de son sexe.

L'ajout de la notion de génération et de sexe duplique fortement le nombre de tables choquées.

Pour optimiser les temps de calculs, une cartographie des invalides est réalisée selon les paramètres suivants :

- Age à la survenance
- Ancienneté
- Génération
- Sexe

Ainsi, les tables choquées seront générées seulement pour les valeurs présentes dans cette cartographie.

En observant le portefeuille de salariés en invalidité d'AXA au 31/12/2021, il sera donc nécessaire de construire 3500 lois de maintien.

Il sera donc possible de calculer les provisions mathématiques au 31/12/2021 pour chaque âge d'invalidité, ancienneté, génération et sexe de la manière suivante :

$$PM(x, a, gen, sexe) = Rente(x, a, gen, sexe) \times \sum_{k=1}^{42-a} \frac{l_{a+k}^x(choc, gen, sexe)}{l_a^x(choc, gen, sexe)} \times \frac{1}{(1+tx)^k}$$

Il reste ensuite d'agréger l'ensemble de ces provisions :

$$PM = \sum_x \sum_a \sum_{gen} \sum_{sexe} PM(x, a, gen, sexe)$$

Avec

- x : âge survenance de l'assuré
- a : ancienneté en 2021 de l'assuré
- gen : année de naissance de l'assuré
- sexe : sexe de l'assuré

### **Résultat :**

	Niveau de choc	PM	Delta de PM
Central	0%	1,81 Mds	
Formule standard	-20%	1,85 Mds	0,045 Mds
Choc local 1	En fonction du sexe, temps, âge	1,82 Mds	0,015 Mds

Tableau n°14 : Résultat du choc local 1

Le résultat ci-dessus présente un montant de provision bien plus faible que la valeur estimée selon la formule standard.

Ce résultat était attendu d'après les graphes des chocs présents à la fin du paragraphe 2.7 illustrant que le niveau de choc de -20% est atteint seulement en 2043.

Ce choc permettrait donc de diminuer l'augmentation des PM dans un scénario de longévité de 65% par rapport à la formule standard et ainsi diminuer fortement le niveau de SCR longévité.

## 2.9. Conclusion

En construisant des tables de mortalité prospectives, le choc de longévité se traduit par une déviation croissante des taux de mortalité dans le temps. Ainsi le choc est relativement faible les premières années de projection et devient plus structurant dans le temps.

Le choc de -20% de la formule standard est atteint seulement à partir de l'année 2043 à travers cette étude. Ce niveau se présente donc comme un majorant pour le risque de longévité en prévoyance.

Cependant, cette étude comporte de nombreuses limites.

Les modèles des taux de mortalité sont construits sur les données historiques afin d'estimer le futur. Cela suppose donc que le futur est un reflet du passé. Or, les recherches médicales pourraient avoir un impact structurant sur la longévité à l'avenir.

De plus, le modèle relationnel est actuellement estimé sur 4 années. Ce point pourrait être amélioré en tenant compte d'un historique plus conséquent selon la disponibilité des données HMD et AXA.

Enfin, le modèle relationnel a permis d'ajuster les modèles des taux de mortalité sur les assurés actifs des contrats de prévoyance collective. Cependant, le choc de longévité est appliqué sur les taux de mortalité des invalides qui ne présentent potentiellement pas des comportements similaires.

Ainsi, une seconde étude de taux de mortalité sera concentrée cette fois-ci sur le portefeuille des invalides.

## 3 Matrice d'évolution

---

### 3.1. Objectif de l'étude

Dans cette seconde partie, le portefeuille des salariés en invalidité sera étudié pour estimer un second choc. Contrairement à la première étude, il ne sera pas possible d'utiliser des méthodes de tables prospectives pour cette partie. En effet, cette méthode nécessite d'avoir une quantité de données très importante pour calibrer les différents modèles.

De plus, la calibration d'un modèle relationnel entre la population nationale et un portefeuille d'invalides ne semble pas judicieux. En effet, les invalides étant une population plus à risque, le niveau de mortalité est potentiellement plus important que la population nationale. Il n'est donc pas possible de considérer que ces deux populations ont des caractéristiques similaires.

Pour rappel, la loi du BCAC pour les rentes en invalidité est exprimée selon deux paramètres : l'âge d'entrée en invalidité et l'ancienneté dans cet état.

Cette table ne comporte pas de paramètre générationnel. Celle-ci n'intègre donc pas un effet de longévité selon l'année de naissance de l'invalidé ou l'année de survenance en invalidité.

Ainsi, cette seconde partie sera entièrement centrée sur les données du portefeuille d'invalides. L'objectif consistera à étudier les évolutions des taux de mortalité sur l'historique des invalides du portefeuille. Ces évolutions seront utilisées sur les calculs des provisions mathématiques des invalides du portefeuille pour estimer un scénario de longévité.

Les résultats seront observés selon l'année de survenance en invalidité et l'ancienneté dans cet état.

Ces évolutions représenteront ainsi des dégradations ou des améliorations des taux de mortalité du portefeuille.

A partir de ces résultats, il sera donc possible de construire un scénario de longévité basé sur les résultats historiques. Pour cela, les taux de mortalité contenus dans la table du Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC), qui sont exprimés en fonction de l'âge à la survenance de l'invalidité et par ancienneté, sont modifiés par une évolution des taux de mortalité observée sur le portefeuille d'AXA. Cette évolution est sélectionnée de manière aléatoire parmi les résultats obtenus pour ce niveau d'ancienneté.

Cette étude peut schématiser de la manière suivante :

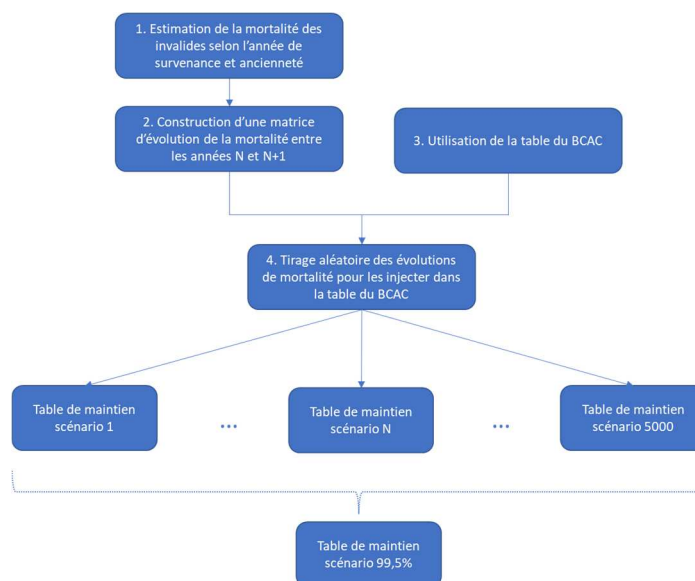


Schéma n°35 : Schématisation de la seconde étude

## 3.2. Données

### 3.2.1. Extractions

Afin de mener cette seconde étude, les données des salariés en invalidité du portefeuille d'AXA France Collective sont extraites depuis les systèmes informatiques.

AXA peut faire appel à des gestionnaires délégués pour la gestion des prestations des sinistres en arrêt de travail. La première étape consistera à extraire les données des invalides des bases de données en gestions directe et déléguée.

L'objectif de l'extraction est de récupérer les informations suivantes :

Information de l'assuré	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Numéro de sinistre</li> <li>- Numéro de contrat</li> <li>- Date de naissance</li> <li>- Sexe</li> </ul>
Information du sinistre	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Date de survenance</li> <li>- Motif de l'arrêt</li> <li>- Date de passage en invalidité</li> <li>- Catégorie d'invalidité</li> <li>- Date de dernière prestation</li> <li>- Motif de fin de prestation</li> </ul>

A partir de ces informations, il sera possible de quantifier les durées d'invalidité de chaque rentier.

### 3.2.2. Statistiques du portefeuille

L'extraction du portefeuille d'AXA a permis de récupérer plus de 50 000 salariés en invalidité.

Etat des invalides au 31/12/2021

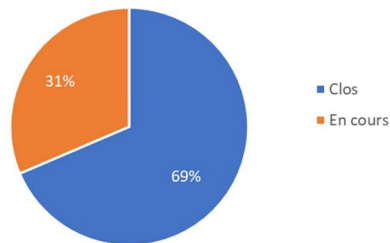


Schéma n°36 : Etat des salariés en invalidité du portefeuille AXA

A ce jour, environ 69% des sinistres en invalidité extraits sont clôturés.

L'objectif de l'étude est d'observer ces bénéficiaires selon l'année d'entrée en invalidité.

Le portefeuille d'AXA contient des invalides depuis plus de 50 ans, le schéma n°37 présente les invalides selon l'année d'entrée en invalidité lors des 40 dernières années.

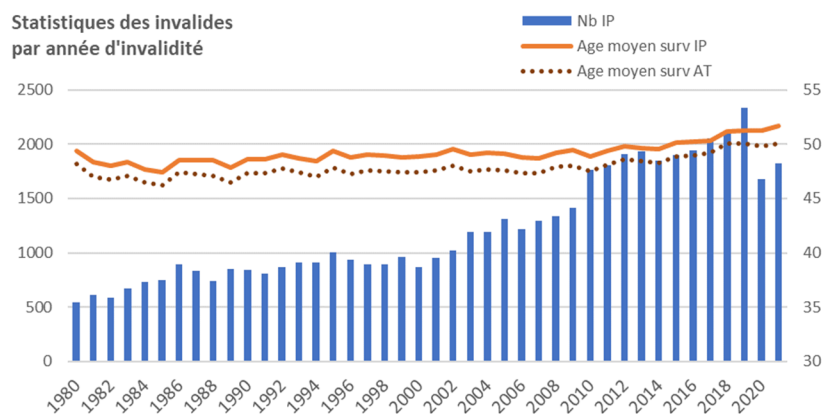


Schéma n°37 : Statistiques des salariés en invalidité par année de survenance

Ce schéma présente plus de 500 invalides par an depuis 1980.

Le portefeuille d'AXA prévoyance collective étant croissant, cela explique l'augmentation du nombre d'invalides sur les 10 dernières années.

Le nombre d'invalidités permanentes (IP) est en baisse en 2020 et 2021 par rapport à l'année 2019. Ce résultat est potentiellement expliqué par la pandémie Covid 19.

L'âge moyen d'entrée en invalidité est de 50 ans sur la période d'analyse. Ces assurés ont été classés en invalidité environ 1 an et un trimestre après la date de survenance de leur arrêt.

Depuis les dix dernières années, une tendance haussière de l'âge à la survenance en IP est observée.

Le volume de données est relativement conséquent afin de pouvoir analyser les invalides par année de survenance en invalidité.

L'âge moyen à la survenance est légèrement en hausse sur cette période mais celui-ci est stable lorsque que l'analyse est réalisée en observant deux années consécutives.

Ainsi, ces résultats confortent l'idée d'étudier le portefeuille par année d'entrée en invalidité.

### 3.3. Méthode

La première partie consistera à étudier les probabilités de survies des rentiers du portefeuille.

Ces assurés seront observés selon leur année d'entrée en invalidité et en fonction de leur ancienneté dans cet état.

Afin de représenter ces informations, des lois de maintien sont construites par l'estimateur de Kaplan Meier.

#### 3.3.1. Estimateur de Kaplan Meier

Kaplan Meier est un estimateur non-paramétrique de la fonction de survie, qui a la particularité de prendre en compte les phénomènes de troncature et de censure contenus dans les données.

##### Censures :

Soit  $C$  une variable aléatoire positive.

La variable aléatoire est dite censurée à droite si au lieu d'observer  $T$  on observe le couple  $(X, \delta)$  où :

$$X = \min (T, C) \text{ et } \delta = 1_{T \leq C}$$

Ainsi, quand la variable  $T$  est censurée par  $C$  on observe la série d'observations  $(X_i, \delta_i)_{i=1..n}$ .

Il y a alors deux types d'observations :

- celles qui vérifient  $\delta_i = 1$  c'est-à-dire  $X_i = T_i$  : ce sont des durées complètes.
- celles qui vérifient  $\delta_i = 0$  c'est-à-dire  $X_i = C_i$  : ce sont des durées censurées (ou incomplètes).

##### Troncatures :

Une donnée est considérée tronquée à gauche si :

Soient  $X$  et  $Z$  deux variables aléatoires avec  $Z$  indépendante de  $X$ . Il y a troncature à gauche lorsque  $X$  n'est observable que si  $X > Z$ .

De même, il y a troncature à droite si  $X$  n'est observable que si  $X < Z$ .

Les censures et troncatures sont fortement présentes dans des données de survies où les observations sont souvent incomplètes.



### Kaplan Meier :

Soit  $(T_i)_{i=1,\dots,n}$  un échantillon de données de durée indépendant et identiquement distribué.

La fonction de survie  $S(t) = P(T > t)$ , il est possible d'estimer  $S$  par

$$\hat{S}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{T_i > t}}{n}$$

Cependant, dans le cas de données censurées, il n'est pas possible d'observer  $T$  mais le couple  $(X, \delta)$ .

L'estimateur empirique sur les données non censurées s'écrit donc

$$\hat{S}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{(X_i > t) \cap (\delta_i = 1)}}{\sum_{i=1}^n 1_{\delta_i = 1}}$$

Ce résultat fournit une estimation biaisée car les censures sont ignorées.

L'estimateur de Kaplan-Meier permet de prendre en compte le phénomène de censure (ainsi que les troncatures) lors de l'estimation.

L'estimateur de Kaplan-Meier s'écrit :

$$\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{t_i > t} 1 - \frac{d_i}{n_i}$$

$d_i$  est le nombre de sorties observées à l'instant  $t_i$ ,

$n_i$  est la population exposée (ou à risque) à cet instant

On note  $q_i = \frac{d_i}{n_i}$  le taux de sortie à l'instant  $t_i$ .

$$n_i = n_{i-1} - d_{i-1} + \omega_i - c_i,$$

où  $\omega_i$  et  $c_i$  sont respectivement le nombre de troncatures et le nombre de censures à  $t_i$ .

### Application

Pour la construction de la loi de maintien, il n'y a pas de troncature à gauche pour les invalides car il n'y pas de franchise.

Cependant, les censures sont présentes dans cette étude. Les évènements suivants ont été comptabilisés :

- le transfert des invalides : il est possible qu'une entreprise demande le transfert des engagements d'un assureur en cas de résiliation du contrat d'assurance vers un nouvel assureur. A la suite de ce transfert, l'assureur tenant ne possède plus d'informations sur ces invalides transférés.
- Un assuré dépassant l'âge de départ à la retraite. L'engagement de l'assureur s'arrête à l'âge légal de départ à la retraite pour les invalides, au-delà de cette date l'assureur ne possède plus d'informations sur ces assurés.

En appliquant l'estimateur de Kaplan Meier, une matrice de  $I_x$  est obtenue :

		Année en invalidité													
		1971	1972	...	année	...	2019	2020	2021						
Ancienneté a	0	$I_0(1971)$	$I_0(1972)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	1	$I_1(1971)$	$I_1(1972)$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			
		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				
		x	x	x	x	x	x	x	x	x					
		x	x	x	x	x	x	x							
		x	x	x	x	x									
		x	x	x											
		x	x												
		x													
		x													
	42	x													

Schéma n°38 : Représentation de la matrice des  $I_x$

Les résultats sont présentés sous la forme d'un triangle.

Lorsque la somme de l'année de survenance et de l'ancienneté dépasse 2021, le résultat n'est pas disponible à ce jour car l'année 2021 correspond à la dernière année d'observations des données.

Les résultats sont présentés sous la forme d'un graphique :

Evolution des  $I_x$  par année de survenance

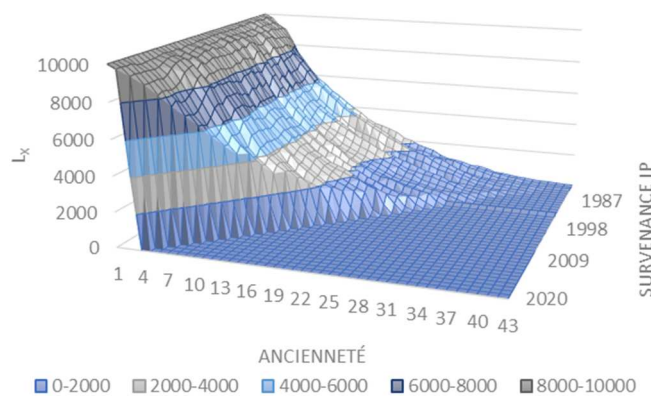


Schéma n°39 : Représentation des  $I_x$  par année de survenance

En observant le schéma n°39, des bandes de couleurs illustrent que le nombre d'invalides ( $I_x$ ), pour une ancienneté, est très proche quel que soit l'année de survenance.

En effet, pour les anciennetés inférieures à 4 ans, les résultats sont compris dans la bande grise représentant des  $I_x$  situés entre 10 000 et 8 000.

Cependant, les délimitations de couleur forment des vagues, qui représentent des améliorations ou détériorations du taux de mortalité d'une année à l'autre.

Ainsi les observations graphiques permettent d'indiquer que les taux de mortalité ne sont pas constants dans le temps. Il sera donc possible d'étudier des évolutions des taux mortalité en fonction de l'ancienneté.

### 3.3.2. Construction des matrices

#### **Matrice des probabilités de décès selon l'année d'invalidité et l'ancienneté**

Après avoir construit des lois de maintien par année de survénance, il sera possible d'en déduire une matrice de probabilité de décès  $q_x$  selon l'année d'entrée en invalidité et l'ancienneté dans cet état :

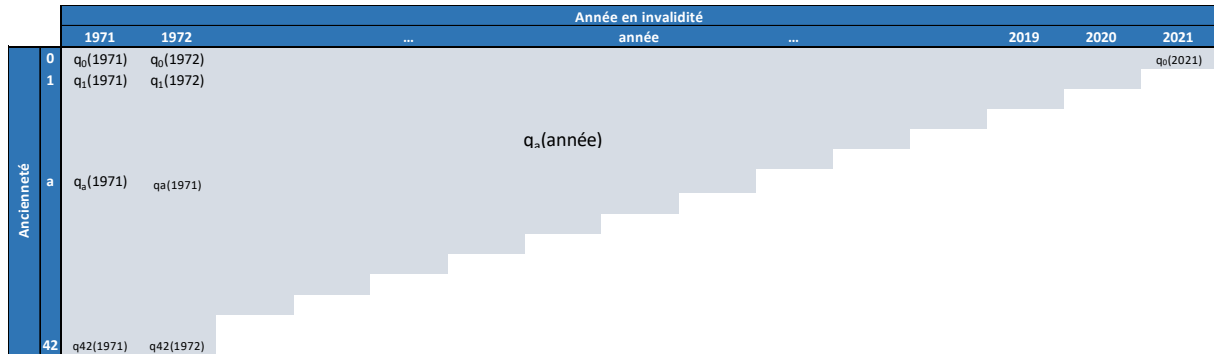


Schéma n°40 : Représentation de la matrice des probabilités de décès

Similaire à la loi de maintien, cette matrice sera remplie sous la forme d'un triangle.

La première colonne de gauche représentera l'année d'entrée en invalidité la plus ancienne (dans l'exemple : 1971). Celle-ci sera potentiellement remplie jusqu'à la dernière ligne représentant 42 ans d'ancienneté.

La dernière colonne, représentant l'année de survénance 2021, sera remplie uniquement pour l'ancienneté 0 étant donné que les données sont arrêtées au 31/12/2021.

Le schéma n°41 présente les probabilités de décès selon l'ancienneté et l'année de survénance :

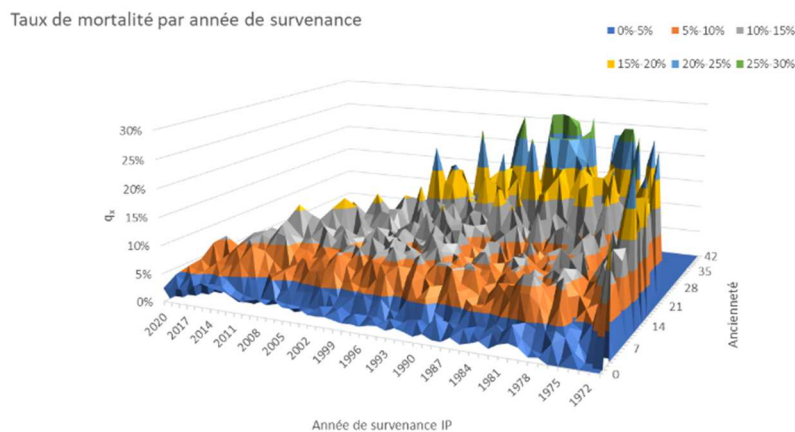


Schéma n°41 : Probabilités de décès selon l'ancienneté et l'année de survénance

De la même manière que le schéma n°38, les probabilités de décès sont dans les mêmes ordres de grandeur selon l'ancienneté.

Cependant, les probabilités de décès par année sont plus volatiles notamment sur les anciennetés les plus élevées.

En effet, la quantité d'invalides devient très faible pour les anciennetés les plus élevées. Il ne semble donc pas opportun d'utiliser les valeurs les plus élevées.

## Matrice d'évolution selon l'année en invalidité et l'ancienneté

L'étape suivante consiste à construire une matrice d'évolution des probabilités de décès.

A partir de cette matrice, il est possible d'observer les évolutions des probabilités de décès des invalides par année d'ancienneté.

Pour cela, le rapport des probabilités de décès de l'année N et N+1 sera calculé par la formule suivante :

$$Evol_a(AAAA + 1) = \frac{q_a(AAAA + 1)}{q_a(AAAA)} - 1$$

Où

AAAA : l'année d'entrée en invalidité

a : le nombre d'année d'ancienneté dans l'état d'invalidité

$q_a(AAAA)$  : la probabilité de décès d'un salarié en invalidité l'année AAAA et dans cet état depuis a années.

Une seconde matrice est donc générée :

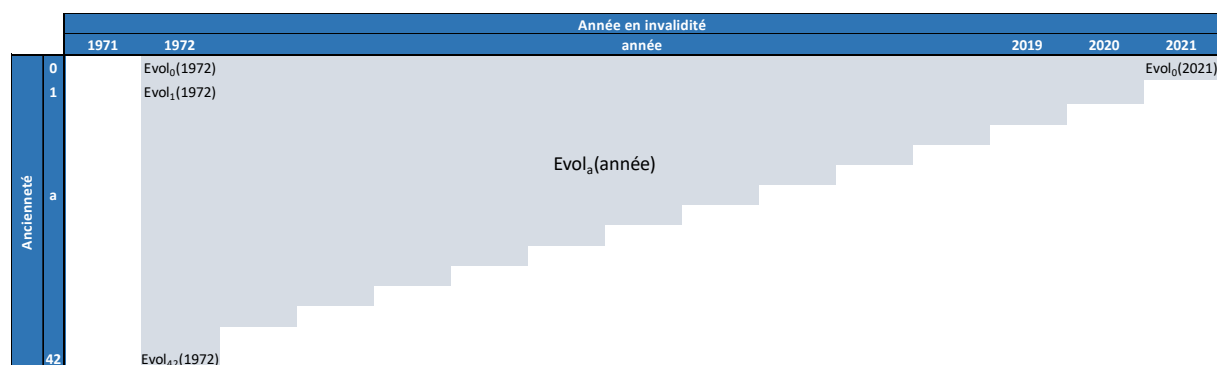


Schéma n°42 : Représentation de la matrice des évolutions des taux de mortalité selon l'ancienneté

Ces évolutions représentent donc les augmentations et les baisses des probabilités de décès observées sur le portefeuille. Ci-dessous les résultats obtenus :

	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0	74%	-41%	55%	25%	-34%	45%	-10%	-26%	16%	-10%	26%	19%	-9%	4%	48%	-12%	3%	50%	-34%
1	-49%	46%	-4%	-41%	54%	-35%	30%	-32%	66%	-33%	61%	-23%	36%	-56%	35%	-30%	93%	-2%	-21%
2	-4%	71%	-17%	-22%	20%	-43%	71%	-1%	-5%	-15%	67%	-7%	-27%	-21%	12%	-2%	16%	-5%	6%
3	28%	56%	-6%	-3%	-49%	13%	50%	-13%	22%	-9%	-8%	-8%	12%	22%	-21%	-9%	-1%	4%	-13%
4	-18%	25%	-31%	50%	-22%	-5%	49%	-10%	-26%	1%	14%	-9%	32%	2%	-6%	-3%	-22%	-1%	20%
5	-29%	-2%	16%	13%	-14%	20%	-4%	3%	5%	-14%	-11%	11%	24%	-15%	0%	-8%	2%	-11%	-9%
6	11%	3%	-14%	26%	-22%	2%	33%	-30%	25%	-14%	20%	-18%	11%	-9%	5%	-10%	-9%	3%	6%
7	18%	-7%	-13%	22%	1%	3%	-1%	9%	-22%	44%	-25%	15%	-3%	-10%	3%	3%	-18%	8%	3%
8	5%	-5%	40%	-6%	-13%	12%	-20%	43%	-13%	-22%	-10%	24%	-3%	35%	-24%	30%	-20%	10%	-4%
9	18%	-27%	45%	25%	-26%	-16%	34%	-21%	25%	-25%	-2%	4%	-6%	32%	-8%	6%	21%	-4%	5%
10	13%	38%	15%	-30%	24%	-4%	-19%	40%	-19%	32%	12%	-25%	-7%	16%	15%	-5%	3%	10%	5%
11	-10%	56%	-12%	-15%	32%	-10%	-9%	-22%	53%	-17%	12%	-18%	24%	1%	-22%	44%	23%	-27%	6%
12	-19%	28%	-9%	50%	13%	-37%	16%	-15%	42%	-7%	-19%	33%	-11%	15%	-16%	59%	-28%	-17%	3%
13	14%	-13%	29%	-48%	113%	4%	-4%	3%	13%	-8%	3%	-14%	-18%	33%	39%	-7%	-1%	-5%	-30%
14	-29%	-1%	89%	-2%	-39%	0%	100%	-36%	9%	-16%	-4%	-5%	31%	7%	6%	30%	-29%		12%
15	-23%	19%	-15%	14%	41%	-15%	5%	-37%	71%	-7%	-9%	25%	3%	-6%	1%	-29%	40%		
16	-26%	22%	6%	-18%	53%	30%	-16%	-14%	5%	-47%	50%	24%	4%	36%	-23%	-15%			
17	-17%	-8%	24%	36%	5%	-14%	9%	-4%	25%	-40%	-14%	77%	2%	-17%	-8%				
18	-13%	6%	10%	-36%	18%	13%	32%	-9%	-13%	23%	-21%	31%	-12%	-8%					
19	14%	50%	-40%	87%	-10%	25%	-3%	3%	-26%	58%	-58%	112%	-13%						

Schéma n°43 : Extrait de la matrice des évolutions des taux de mortalité selon l'ancienneté

Dans le schéma n°43, les cellules en vert représentent les évolutions négatives, cela implique donc une diminution du taux de mortalité entre deux années.

A l'inverse les cellules en rouge traduisent une augmentation du taux de mortalité entre deux années.

Enfin, les cellules en blanc sont essentiellement des taux qui n'ont pas pu être calculés, à cause des taux de mortalité nuls. Ce résultat est essentiellement présent à gauche de la matrice représentant les années les plus anciennes et la partie basse du tableau qui représentant les anciennetés les plus élevées. En effet, ce sont les parties pour lesquelles les données sont moins volumineuses.

Le schéma n°44 présente les répartitions des évolutions positives et négatives par année d'ancienneté :

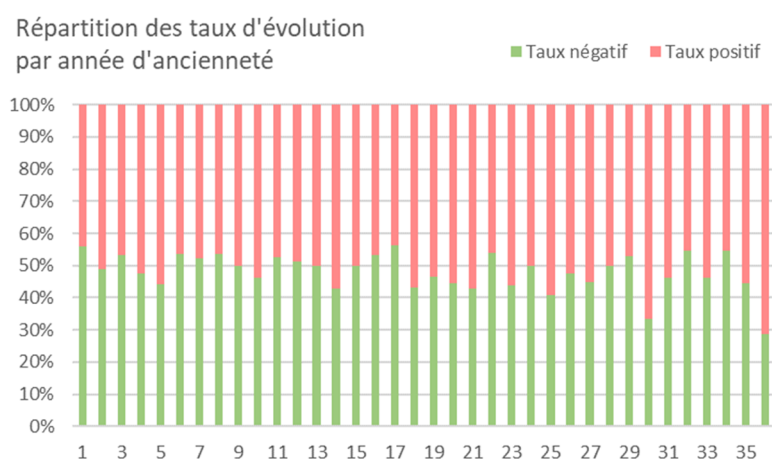


Schéma n°44 : Répartition des évolutions par année d'ancienneté

Les taux positifs et négatifs sont très équilibrés les 30 premières années. Cependant les taux d'évolution sont plus volatils lorsque les taux sont positifs. En effet les variations peuvent dépasser les 100%.

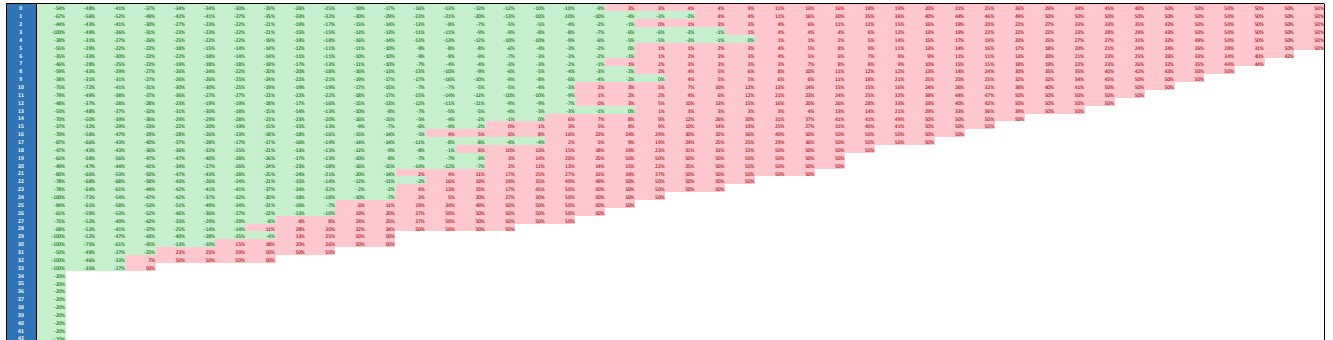
A partir de ces premières analyses, il a été décidé d'apporter des restrictions sur les taux d'évolution. Les taux compatibles sont uniquement les taux pour lesquels le nombre d'expositions sont supérieures à 10 afin d'apporter de la robustesse sur les évolutions calculées.

De plus, les taux positifs ont été plafonnés à 50%, ce plafonnement n'aura pas d'impact sur le calibrage du choc de longévité car ce sont les taux négatifs qui seront structurant pour cette étude.

L'ajustement à 50% est également justifié par la suite de ce mémoire.

De plus, cette table sera complétée par le niveau de choc de la formule standard sur les anciennetés pour lesquelles aucune évolution n'a pas pu être estimée. Ainsi, le niveau de -20% sera automatiquement attribué pour les anciennetés au-delà de 32 ans.

Une fois les réajustements et les restrictions effectués, la matrice des évolutions des probabilités de décès se présente donc de la manière suivante (les taux d'évolution ont été triés dans l'ordre croissant selon l'année d'ancienneté pour visualiser les taux positifs et négatifs):



**Schéma n°45 :** Matrice des évolutions des taux de mortalité selon l'ancienneté - HistEvol(a)

Cette matrice présente donc plusieurs améliorations et dégradations des probabilités de décès. Il sera donc possible de construire plusieurs tables de maintien avec ces valeurs.

### 3.3.3. Construction de lois de maintien choqués

Afin d'estimer l'équivalent d'un choc bicentenaire, plusieurs tables de maintien seront construites à partir de la loi du BCAC. Pour cela, cette table initiale sera modifiée en ajoutant de manière aléatoire des évolutions des probabilités de décès observées sur le portefeuille d'AXA.

Ces tables générées vont ainsi permettre de simuler stochastiquement des niveaux de provisions mathématiques des invalides et en déduire un scénario de longévité.

La partie ci-dessus présentera en détail la construction d'une table de maintien pour un scénario.

Pour cela, 100 000 invalides seront considérés pour chaque âge au départ de la table :

	18 ans	...	x ans
Ancienneté 0	$l_0^{18} = 100\ 000$	...	$l_0^x = 100\ 000$

**Tableau n°15 :** Construction loi maintien – partie 1

Pour projeter ces individus un an plus tard, les probabilités de décès entre 0 et 1 an d'ancienneté issues de la loi du BCAC seront reprises :

	18 ans	...	x ans
Probabilité de décès entre 0 et 1 an d'ancienneté	$q_0^{18} = 1 - \frac{l_1^{18}(BCAC)}{l_0^{18}(BCAC)}$	...	$q_0^x = 1 - \frac{l_1^x(BCAC)}{l_0^x(BCAC)}$

**Tableau n°16 :** Construction loi maintien – partie 2

Ces résultats vont être modifiés en ajoutant une amélioration ou une détérioration des probabilités des décès.

Pour cela, les évolutions des probabilités des décès des invalides ayant 0 ancienneté seront extraites de la matrice d'évolution. L'historique des évolutions des invalides à 0 ancienneté ont été stockée dans un vecteur noté HistEvol(0).

Pour chaque âge, une valeur du vecteur HistEvol(0) sera tirée de manière aléatoire pour le scénario stochastique choc i :

	18 ans	...	x ans
Evolution taux de mortalité entre 0 et 1 an d'ancienneté pour le scénario choc i	$tx(choc_i, 18, 0) = \text{Aléa}(\text{HistEvol}(0))$	...	$tx(choc_i, x, 0) = \text{Aléa}(\text{HistEvol}(0))$

Tableau n°17 : Construction loi maintien – partie 3

Ainsi les nouvelles probabilités de décès seront estimées de la manière suivante :

	18 ans	...	x ans
Taux de mortalité entre 0 et 1 an d'ancienneté pour le scénario choc i	$q_0^{18} \times (1 + tx(choc_i, 18, 0))$		$q_0^x \times (1 + tx(choc_i, x, 0))$

Tableau n°18 : Construction loi maintien – partie 4

Enfin, il sera possible d'estimer le nombre d'invalides vivants ayant 1 an d'ancienneté dans le scénario choc i :

	18 ans	...	x ans
Ancienneté 1 pour le scénario choc i	$l_1^{18} = l_0^{18} \times (1 - q_0^{18} \times (1 + tx(choc_i, 18, 0)))$		$l_1^x = l_0^x \times (1 - q_0^x \times (1 + tx(choc_i, x, 0)))$

Tableau n°19 : Construction loi maintien – partie 5

Ainsi, la loi de maintien du scénario stochastique i sera construite par la formule générique suivante :

$$l_{a+1}^x(choc_i) = l_a^x(choc_i) \times \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{l_{a+1}^x(BCAC)}{l_a^x(BCAC)} \right] \times (1 + tx(choc_i, x, a)) \right]$$

Avec

x : âge entrée en invalidité

a : ancienneté en année

$l_a^x(BCAC)$  : nombre de personnes vivantes entrées en invalidité à l'âge x et d'ancienneté a d'après la loi de maintien du BCAC.

$choc_i$  : scénario stochastique choc i

$l_a^x(choc_i)$  : nombre de personnes vivantes entrées en invalidité à l'âge x et d'ancienneté a obtenu pour le scénario stochastique i

$tx(choc_i, x, a)$  : taux d'évolution retenu pour le scénario  $choc_i$  pour modifier la probabilité de décès contenue dans la table de maintien du BCAC pour un âge en invalidité x et ancienneté a

A partir de ces nouvelles tables de maintien, il est possible d'estimer les montants de provisions mathématiques pour chaque scénario.

### 3.3.4. Estimation du choc bicentenaire

La construction de ces lois va permettre de calculer les PM des rentiers invalides en cours de service au 31/12/2021 pour chaque scénario choqué :

$$PM_{choc_i}(x, a) = Rente(x, a) \times \sum_{k=1}^{42-a} \frac{l_{a+k}^x(choc_i)}{l_a^x(choc_i)} \times \frac{1}{(1+tx)^k}$$

$PM_{choc_i}(x, a)$  : provisions mathématiques, du scénario choc  $i$ , des invalides entrés en invalidité à l'âge  $x$  et ayant  $a$  d'ancienneté

$Rente(x, a)$  : rente totale des salariés entrés en invalidité à l'âge  $x$  et ayant  $a$  d'ancienneté

$l_a^x(choc_i)$  : nombre de personnes vivantes entrées en invalidité à l'âge  $x$  et d'ancienneté  $a$  obtenu pour le scénario stochastique  $i$   $tx$  : taux technique

Une fois les PM par âge et ancienneté calculées, il suffira de sommer les différents montants pour obtenir les PM totales du scénario choqué  $i$  :

$$PM_{choc_i} = \sum_{x=18}^{62} \sum_{a=0}^{42-a} PM_i(x, a)$$

Le scénario bicentenaire sera obtenu en réalisant 5 000 scénarios choqués. Une fois ces simulations réalisées, il suffira d'ordonner l'ensemble des scénarios selon le montant de PM totales. Le choc retenu correspondra au quantile 99.5% des PM les plus élevées.

## 3.4. Application

Le schéma n°46 permet de visualiser l'ensemble des résultats :

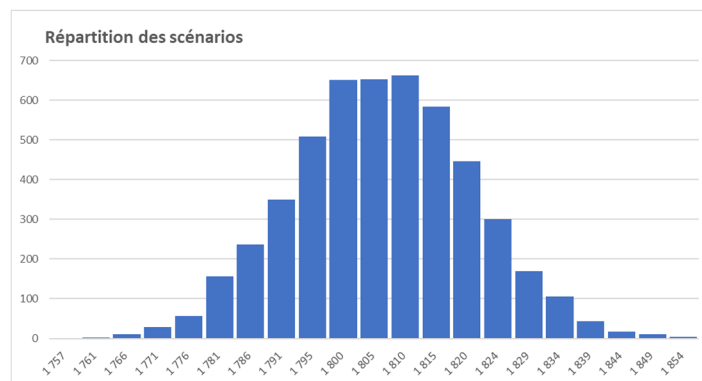


Schéma n°46 : Histogramme présentant la répartition des 5 000 scénarios selon les montants de PM



La médiane des 5 000 scénarios se situe au niveau de 1,805 milliards d'euros (Mds €). Ce niveau est très proche du montant de PM issues de la table de maintien du BCAC (1,81Mds).

Ce niveau est obtenu grâce au plafonnement des évolutions positives au-delà de 50%. Sans ce plafonnement, la médiane se situerait à 1,79 Mds €. Ce réajustement a donc permis de rapprocher la médiane au niveau du résultat obtenu à partir de la table du BCAC (1,81Mds).

En annexe 6.2, une simulation sans plafonnement a été réalisée afin d'illustrer les effets sur la médiane mais également montrer que ce plafonnement n'impacte pas le calibrage du choc de longévité car ce sont les taux négatifs qui sont structurant pour cette étude.

Les résultats sont observés également sous la forme d'un nuage de point :

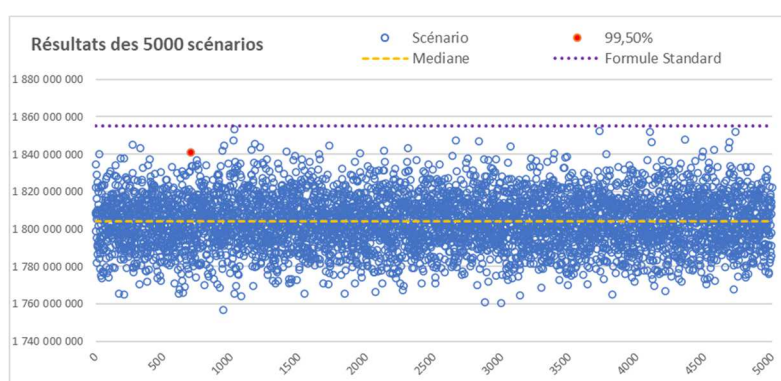


Schéma n°47 : Résultats des scénarios du deuxième calibrage

Dans le schéma n°47, chaque point bleu représente un scénario.

Le point rouge représente le scénario correspond au quantile 99,5% des PM les plus élevées. Pour ce scénario, la PM globale se situe à 1,84 Mds €. Ce niveau est plus faible que la PM choquée depuis la formule standard (illustrée par la droite violette).

	Niveau de choc	PM	Delta de PM
Central	0%	1,81 Mds	
Formule standard	-20%	1,85 Mds	0,045 Mds
Choc local 2	Données historiques	1,84 Mds	0,032 Mds

Tableau n°20 : Résultat du choc local 2

Le résultat ci-dessus présente un montant de PM bien légèrement faible que la valeur estimée selon la formule standard.

### 3.5. Conclusion

L'estimation du choc de longévité sur la base du comportement des taux de mortalité des invalides présente également un niveau plus faible que celui de la formule standard.

L'étude des probabilités de décès par année de survie permet d'observer de fortes améliorations et dégradations des taux. Ainsi, ces résultats ont permis de construire un scénario extrême de longévité.

A travers cette étude, le niveau de choc permettrait de diminuer le montant de SCR longévité de 28%.

Cette étude permet d'avoir une modélisation centrée sur les invalides du portefeuille AXA. Elle a pour objectif de chercher un maximum de volatilité en observant les résultats par année de survie.

La robustesse de l'étude diminue pour les années d'ancienneté les plus élevées liée au faible volume de données à ces niveaux d'ancienneté. Ce point aurait pu être renforcé en analysant les années de survie par groupe de 2 ou 5 ans.

Cependant, le regroupement des années par 2 diminuerait le nombre d'évolutions des taux de mortalité observées par 2 également.

## 4 Conclusion

---

Dans le cadre de ce mémoire, deux chocs de longévité ont été appliqués pour les contrats de prévoyance collective.

	Niveau de choc	PM	Delta de PM	Choc équivalent
Central	-	1,81 Mds		-
Formule standard	-20%	1,85 Mds	0,045 Mds	-20%
Choc local 1	En fonction du sexe, temps, âge	1,82 Mds	0,015 Mds	-7%
Choc local 2	Données historiques	1,84 Mds	0,032 Mds	-14%

Tableau n°21 : Résultats des chocs locaux

La première étude est basée sur la construction de tables de mortalité prospectives.

Dans cette étude, le choc de longévité n'est pas constant mais progressif dans le temps. En effet, l'amélioration de la longévité est relativement faible les premières années pour atteindre 20% seulement au bout de 20 ans et 35% après 40 ans.

Ainsi, le choc de longévité de cette méthode est équivalent à un choc instantané de -7%.

Cependant, cette étude repose essentiellement sur les données historiques pour prédire le futur. Cette hypothèse est une des limites de cette méthode. Les avancées médicales pourraient avoir un impact significatif sur la mortalité dans le futur. La longévité serait très différente des résultats proposés par cette modélisation.

De plus, le modèle relationnel de Brass, qui repose seulement sur 4 années, a permis d'ajuster les probabilités de décès de la population nationale aux assurés actifs. Or ce choc est appliqué uniquement sur les salariés en invalidité dont les probabilités de décès sont potentiellement plus importantes que celles des actifs.

Une seconde étude vient ainsi compléter ce mémoire dont l'objectif est d'étudier cette fois-ci le portefeuille des invalides AXA.

Le choc de longévité pour cette étude est directement construit à partir des améliorations de probabilités de décès observées sur les invalides du portefeuille.

A travers cette étude, le choc de longévité se rapprocherait d'un choc instantané de -14%.

En observant les résultats par année de survénance, cette étude présente de fortes volatilités malgré un âge moyen stable et un volume de départs relativement conséquent.

L'étude peut être limitée au niveau de la robustesse de l'analyse des résultats par année de survénance notamment sur les anciennetés les plus élevées pour lesquelles le volume de données est faible. Une approche en analysant les résultats par tranche de deux ou cinq ans de survénance pourrait améliorer la robustesse de l'analyse.

Les deux études menées illustrent que le choc de la formule standard est conservateur pour les contrats de prévoyance collective. L'impact d'un risque de longévité est moins structurant étant donné que cette garantie couvre seulement la population de salariés actifs.

De plus, le risque de longévité concerne uniquement les rentiers des contrats prévoyance dont leur état est consolidé. Cela restreint donc le périmètre des rentiers en invalidité dont les rentes commencent à l'âge de 50 ans en moyenne et prennent fin à l'âge légal de départ à la retraite. Ainsi, le risque de longévité exposé dans les contrats de prévoyance semble bien plus faible que celui des contrats de retraite ou épargne.

## 5 Bibliographie

---

### Cours, ouvrages et publications

ACPR (2013) Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II

Commission européenne (2015) règlement délégué (UE) 2015/35 de Solvabilité II

O. LOPEZ (CEA 2020) Sciences de la données et Approfondissements

F. PLANCHET (ISFA 2020) Modèles de durée : méthodes de lissage et d'ajustement

F. PLANCHET (2009) Risque de longévité et détermination du besoin en capital

J. TOMAS & F. PLANCHET (2014) Note de travail - Critères de validation : aspects méthodologiques

### Mémoires d'actuariat

M. BUZARÉ (2016) Étude d'impacts de l'utilisation d'une modélisation de type vie ou de type non-vie sur la rentabilité d'un contrat collectif en arrêt de travail dans le cadre de Solvabilité II

T. DELOR (2010) Construction d'un modèle de prévoyance dans le cadre de solvabilité 2

V. EL JALTI (2016) Arrêt de travail et Solvabilité II : Une autre approche pour le calibrage du risque de maintien

M. GARWACKI & F. STAAD (2011) Risque de longévité : modélisation sur la population française et atténuation par l'achat d'options sur indices de mortalité



## 6 Annexes

---

### 6.1. Choix de la plage d'étude

Dans le cadre de la construction des tables de mortalité, le calibrage des modèles est réalisé sur une plage de 30 à 70 ans.

Afin de valider cette plage d'âge, l'exercice a été réalisé sur la plage 20-70 ans et 30-70 ans.

Les niveaux de SMR sont présentés ci-dessous :

M3 - Femme	30	40	45	50	60	1990	1980	1975	1970	1960
20 - 70	79%	91%	100%	104%	108%	80%	92%	96%	96%	105%
30 - 70	80%	92%	100%	105%	108%	83%	87%	98%	97%	104%

Tableau n°22 : Comparaison des SMR Femme selon la plage d'âge de calibrage

Les résultats sont très similaires pour les femmes.

M3 - Homme	30	40	45	50	60	1990	1980	1975	1970	1960
20 - 70	96%	81%	80%	84%	97%	97%	90%	82%	77%	84%
30 - 70	102%	89%	86%	86%	96%	101%	96%	92%	82%	83%

Tableau n°23 : Comparaison des SMR Homme selon la plage d'âge de calibrage

Contrairement aux hommes, la limitation à une plage de 30 – 70 ans permet de se rapprocher d'un niveau de SMR proche de 100%.

Ainsi, la plage de 30 à 70 ans a été sélectionnée pour calibrer les modèles.

## 6.2. Plafonnement des évolutions de mortalité

Dans le cadre de l'étude sur la mortalité des salariés en invalidité, les évolutions des taux de mortalité ont été plafonnées à 50%.

L'étude a été réalisée sans ce plafonnement en réalisant 1 000 simulations :

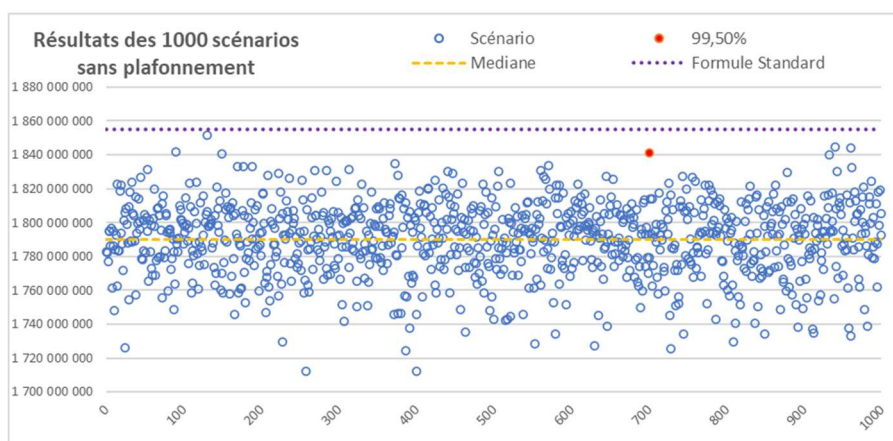


Schéma n°48 : Résultats sans plafonnement

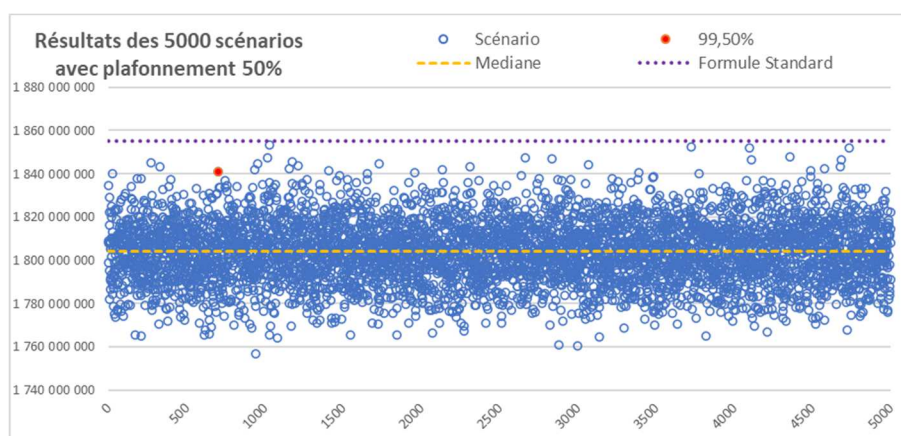


Schéma n°49 : Résultats avec plafonnement

Dans le schéma n°48, la médiane se situe à 1,790 Mds € sans plafonnement et 1,805 Mds € avec un plafonnement à 50% (schéma n°49). Ce réajustement a donc permis de rapprocher la médiane au niveau du résultat obtenu à partir de la table du BCAC.

De plus, ce plafonnement n'impacte pas le calibrage du choc de longévité car ce sont les taux négatifs qui sont structurant pour cette étude. Les deux graphiques présentent une PM correspondant au quantile 99,5% autour de 1,84 Mds €.