

**Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière
et d'Assurance pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaire**
le

Par : Pierre HERRY

Titre : Impact de la sinistralité grave sur le suivi de la rentabilité dans un contexte de groupements de contrats

Confidentialité : ☐ Non ☒ Oui (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire :*

Entreprise :
Nom : AXA France
Signature :

*Membres présents du Jury du Master
Actuariat de l'ISFA :*

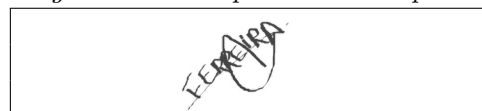
Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : David FERREIRA
Signature :



Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

De par ses propriétés de très forte sévérité et de fréquence faible, la sinistralité grave a un impact certain sur la rentabilité en assurance. Cet aspect est renforcé dans le cadre de l'assurance affinitaire où le portefeuille complet de la direction se décompose en de multiples groupements de contrats appelés programmes qui possèdent chacun leur propre rentabilité. Pouvant être de taille relativement réduite, la survenance d'un sinistre grave avec une charge importante peut mettre en péril la survivabilité d'un programme. En assurance automobile 4 roues, la sinistralité atypique correspond en grande partie à la sinistralité corporelle.

C'est dans ce contexte particulier que se place ce mémoire, avec comme objectif de fournir un indicateur de suivi de la rentabilité dans le temps basé sur la sinistralité grave, qui puisse être appliqué pour tout type de produit. La première étape de l'étude a pour but d'effectuer une révision du seuil de grave actuel, qui sera permise grâce à l'application de la Théorie des Valeurs Extrêmes. Une fois ce seuil déterminé découleront des modélisations de sévérité et de fréquence afin de pouvoir estimer la charge grave. Cette charge grave permettra ainsi de trouver un taux de grave qui correspond au rapport entre cette charge grave et la prime. Ce taux de grave empirique sera donc la base d'un indicateur plus flexible pour le suivi de la bonne santé des programmes de la direction dans le temps.

Mots-clés : Sinistralité atypique, Seuil de grave, Taux de grave, Théorie des valeurs extrêmes.

Abstract

Because of its very high severity and low frequency properties, severe claims experience has a clear impact on insurance profitability. This aspect is reinforced in the context of affinity insurance where the entire portfolio of the branch is broken down into multiple groups of contracts called programs, each with its own profitability. Since they can be relatively small, the occurrence of a serious loss with a significant expense can jeopardize the survivability of a program. In four-wheel motor insurance, atypical claims correspond largely to bodily injury claims.

It is in this particular context that this thesis is set, with the objective of providing an indicator for monitoring profitability over time based on severe claims, which can be applied to any type of product. The first step of the study is to carry out a revision of the current severe threshold, which will be allowed through the application of the extreme value theory. Once this threshold is determined, severity and frequency modelling will be carried out in order to estimate the severe load. This severe load will thus allow to find a rate of severe which corresponds to the ratio between this severe load and the premium. This empirical severity rate will then be the basis of a more flexible indicator for monitoring the health of the management programs over time.

Keywords : Severe claims; Atypical threshold; Rate of severe; Extreme Value Theory

Note de Synthèse

Contexte

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'une alternance effectuée au sein de la Direction des Partenariats d'AXA France IARD entre Septembre 2021 et Septembre 2022.

Parmi les grands types d'assurance protégeant les biens de l'assuré, l'assurance affinitaire en est une synthèse. En effet, le principe de ce modèle est d'offrir à ses clients des produits personnalisés, du produit classique automobile ou habitation, jusqu'au produit plus innovant comme l'assurance sur les nouvelles mobilités. La Direction des Partenariats traite avec des intermédiaires d'assurance tels que les courtiers grossistes s'occupant de la gestion des contrats tandis que le risque est porté par la direction. Pour chaque produit il peut exister un intermédiaire différent, ainsi le portefeuille global est composé d'une multitude de plus petits programmes possédant leur propre rentabilité. Un suivi personnalisé doit donc leur être apporté.

Dans le cadre spécifique qu'est celui de l'assurance affinitaire, l'appréhension de la sinistralité grave est une problématique redondante. Elle se distingue de la sinistralité attritionnelle de par sa fréquence bien plus faible et de sa sévérité beaucoup plus prononcée. Une attention particulière doit donc être portée sur cette sinistralité dite atypique durant tout le processus d'élaboration et de gestion d'un produit d'assurance : de la modélisation jusqu'au suivi de la rentabilité dans le temps. C'est ce dernier point qui guide tous les travaux effectués lors de cette étude. En effet, la pluralité de groupements de contrats qui compose le portefeuille de la Direction des Partenariats impose donc un suivi de la rentabilité dans le temps de chaque programme, tout en conservant une bonne santé financière au global. Mais cet ensemble de programmes est hétérogène en terme de taille, et cela a pour conséquence une difficile gestion de la sinistralité grave de par le fait qu'il n'est pas évident de mutualiser cette charge grave sur tout un portefeuille de taille modeste. Actuellement la méthode de suivi de la rentabilité dans le temps consiste en un S/C écrêté mutualisé, où la charge grave réalisée est remplacée par un taux de grave fixe pour compenser la potentielle fluctuation de cette sinistralité grave. La charge grave correspond à la charge des sinistres dépassant un certain seuil de grave. Le taux de grave fixe utilisé est un taux déterminé à dire d'experts.

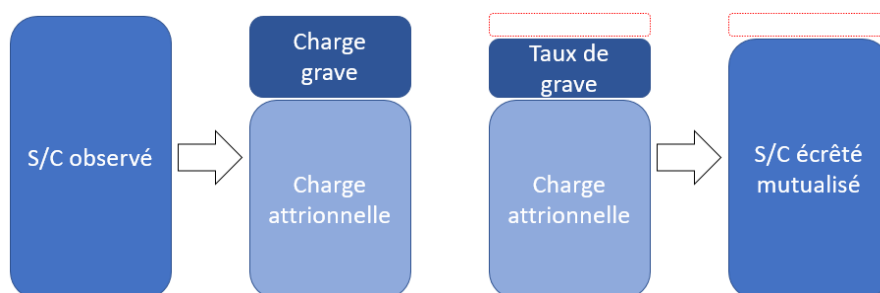


FIGURE 1 – Exemple de lissage des sinistres graves d'un programme dégradé

Problématique et objectifs

Le seuil actuellement utilisé a été déterminé plusieurs années auparavant. Le premier objectif de ce mémoire est donc de vérifier si ce seuil a toujours du sens avec l'évolution du portefeuille de la Direction des Partenariats. La problématique principale concerne le suivi de la rentabilité au fil du temps, et ainsi quel indicateur se basant sur la sinistralité grave pourrait permettre une bonne lecture de la rentabilité de chaque programme en prenant en compte les spécificités qui lui sont propres. De cette problématique découlent les objectifs suivants de ce mémoire : Déterminer le taux de grave empirique provenant du seuil nouvellement acquis, et employer ce taux de grave afin d'obtenir un indicateur polyvalent de suivi de la sinistralité grave et de la rentabilité dans le temps.

Etude

Pour tous les travaux qui vont suivre dans le cadre de ce mémoire, la constitution d'un périmètre clair fut la première étape. Cela permettait d'avoir une cohérence dans l'utilisation des données. Après réflexion, le choix s'est porté sur le périmètre Auto 4 roues de la Direction des Partenariats pour deux raisons : Tout d'abord ce portefeuille est le plus fourni comparé aux autres types de produits, avec près de 48% de primes sur l'année 2021. De plus, les garanties couvertes au nom du produit automobile 4 roues se décomposent en deux parties, les garanties qui couvrent des risques matériels et celles couvrant les risques corporels. Cette dernière catégorie concerne directement les travaux à mener, la sinistralité corporelle impactant très fortement la sinistralité atypique. Cet indicateur sera utilisable pour n'importe quel périmètre eu sein des Partenariats, même si pour l'étude il a été décidé de restreindre à un unique périmètre défini par la suite.

Le seuil actuel est de 45 000€, un seuil choisi volontairement faible pour conserver une certaine part de sinistralité dans le suivi de la rentabilité. Après application de ce seuil et en observant la sinistralité historique entre 2007 et 2020, il est obtenu que pour la répartition de la charge au-delà du seuil de grave est de 32%, et près de 90% de cette charge grave provient de la sinistralité corporelle.

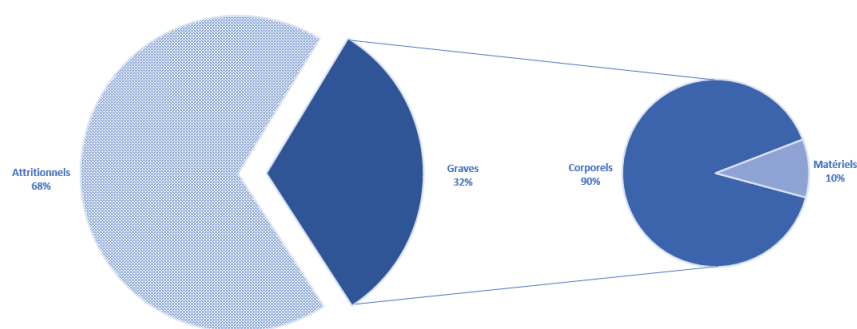


FIGURE 2 – Décomposition de la charge grave selon le split Corporel/Matériel

La méthodologie de détermination de seuil de grave s'appuie sur la Théorie des Valeurs Extrêmes, et sera tout d'abord appliquée sur la sinistralité corporelle. Ce choix se justifie par le fait que la grande majorité de la sinistralité grave observée provient du corporel. Ainsi le cadre théorique s'applique mieux à ce périmètre plus réduit. Toutefois le seuil qui pourra être obtenu risque d'être haut pour être appliqué dans l'optique du taux de grave.

Afin de pouvoir travailler sur les données, deux retraitements sont obligatoires :

- Le premier retraitement consiste à réévaluer la charge des sinistres passés afin de les prendre en compte comme si ils avaient lieu le 31/12/2021. Cette étape s'appelle la mise en "As-If" et s'effectue en appliquant un coefficient d'inflation pour chaque année de vie du sinistre. La sinistralité étudiée étant une sinistralité spéciale car corporelle, le taux appliqué est un taux censé capter l'évolution des salaires du personnel médical et de tous les coûts consécutifs à un sinistre corporel.
- La seconde étape du retraitement concerne les sinistres qui ne sont pas clos. En effet leur charge est susceptible d'être réévaluée à la hausse ou à la baisse et peut impacter l'étude.

Les retraitements effectués, le profil des données est comme suivant :

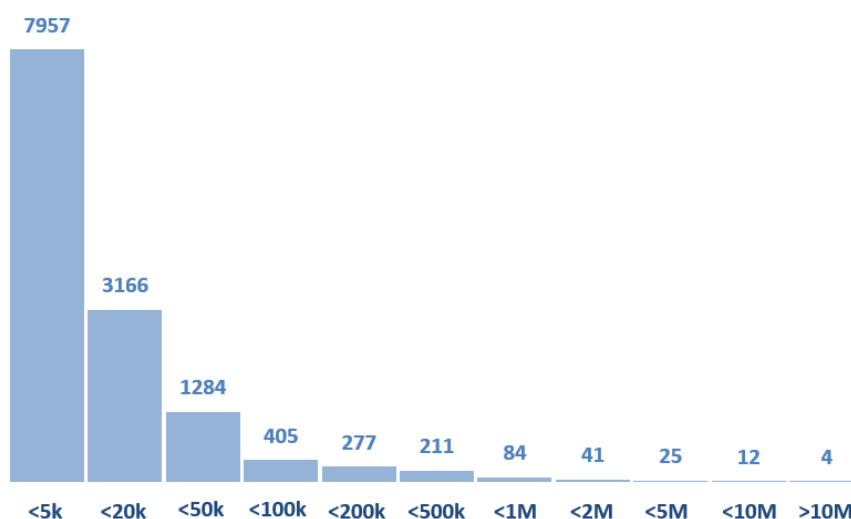


FIGURE 3 – Répartition des sinistres par tranche

Sur ce graphique, les charges des sinistres s'étendent jusqu'à plusieurs dizaines de millions d'euros pour une moyenne de quelques dizaines de milliers d'euros. Ainsi la distribution de la sinistralité

s'étend loin de la moyenne, ce qui peut être exprimé de la manière suivante : la queue de distribution est longue, ce qui justifie l'approche par Théorie des Valeurs Extrêmes.

Cette théorie est majeure car elle légitime l'utilisation de tous les outils graphiques et estimateurs statistiques qui serviront à l'établissement du seuil de grave. Parmi toutes les méthodes employées, la première est une méthode graphique et se fonde sur la fonction des excès moyens.

le graphique associé, qui se nomme MEPlot permet de déterminer des changements de comportements au sein des données et ainsi établir des seuils correspondant à ces changements.

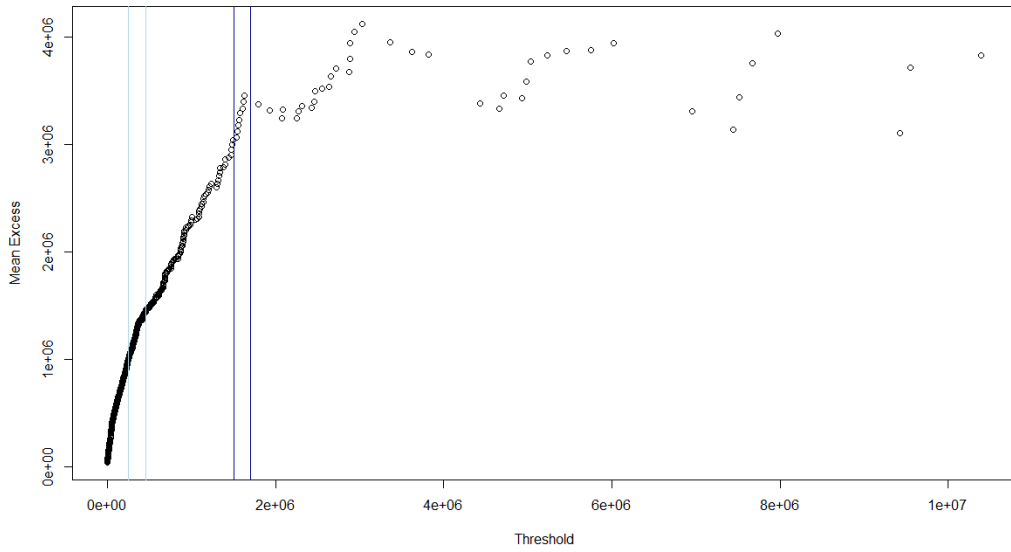


FIGURE 4 – MEplot sur les sinistres corporels

Sur ce graphique sont visibles deux changements de pente, le premier se situant entre 370 000 et 450 000, le second entre 1 500 000 et 1 700 000. Cela impliquerait que pour les sinistres corporels, il pourrait exister non pas un mais deux seuils de grave. Cette hypothèse se confirme lors de l'utilisation de la seconde méthode, qui se base sur l'estimateur de Hill, et de son graphique associé le HillPlot.

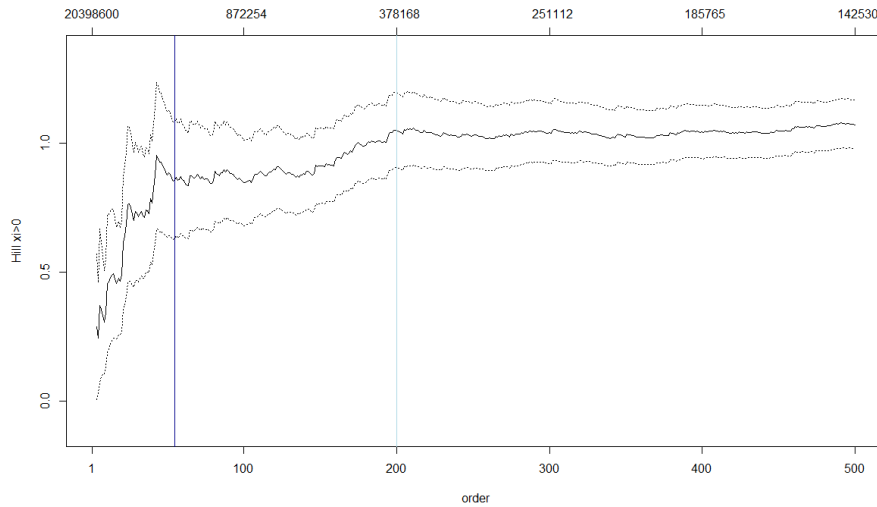


FIGURE 5 – Hillplot sur les sinistres corporels

Concernant cette méthode graphique, des seuils sont atteints lorsque la courbe rejoint des points de stabilité. Dans le cadre de l'étude, des seuils d'environ 1 540 000 et 378 000 sont obtenus, qui correspondent respectivement aux 50e et 200e sinistres à la charge la plus élevée.

Ces deux seuils déterminés, l'étape suivante concerne la modélisation des sinistres au-delà des seuils. Des tests graphiques tels que le graphique des fonctions de répartitions cumulées et le graphique quantile-quantile et statistiques comme le test de Kolmogorov-Smirnov et le test de Cramer-Von Mises seront utilisés pour vérifier quelle loi est la plus à même d'être employée pour modéliser la sinistralité. De même, les paramètres des lois seront déterminés grâce à deux estimateurs, qui sont l'estimateur de la méthode des moments (MME) et l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE). Les différents contrôles donnent une meilleure calibration de la sinistralité en utilisant deux seuils au lieu d'un, et les résultats d'adéquation sont visibles dans ce tableau :

Seuil	Distribution	Méthode	Paramètres	KS	C-VM
378 000 tronqué à droite	GPD	MME	$\xi_{GPD}^{MME} = -0,319$ $\beta_{GPD}^{MME} = 515\,956$	0,033	203
1 540 000	Weibull	MME	$\xi_{Weibull}^{MME} = 0,864$ $\beta_{Weibull}^{MME} = 2\,841\,024$	0,09	8 831

TABLE 1 – Résultats d'adéquation pour les deux seuils

Les conclusions à tirer de ces chiffres sont multiples. Tout d'abord les résultats ne sont pas intuitifs car il était possible de s'attendre à la modélisation par une loi à queue plus longue pour le seuil le plus haut. Une des explications peut être le faible nombre de sinistres au-delà du seuil qui a pu biaiser les résultats. De plus il était intéressant de trouver que deux seuils pouvaient exister, et de surcroît la modélisation grâce à ces deux seuils est plus qualitative. Toutefois les seuils obtenus sont trop hauts pour être utilisés dans l'optique du taux de grave. Le même travail de détermination de seuil va donc être mené sur l'ensemble des données hors sinistres ne dépassant pas le seuil à 378 000.

En appliquant la même méthodologie au portefeuille entier Auto 4 roues, le graphique permettant de déterminer des changements dans le comportement des données permet d'obtenir les résultats suivants :

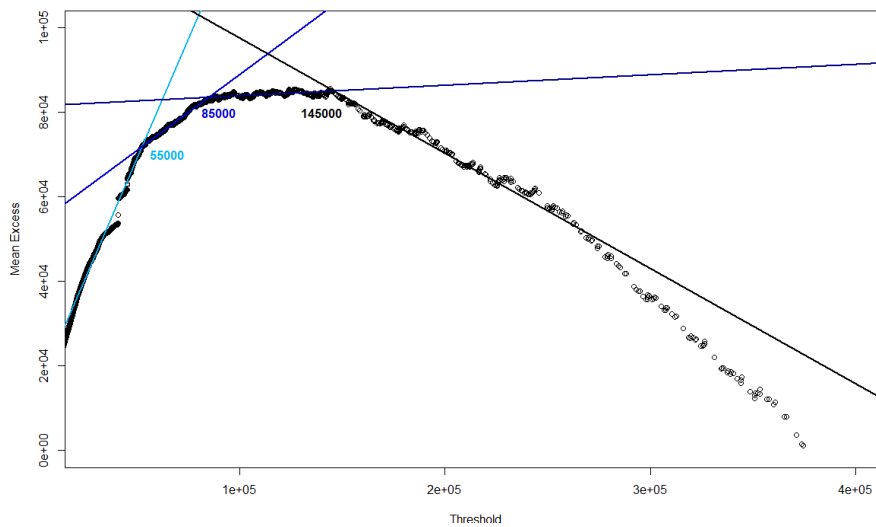


FIGURE 6 – MEplot sur les sinistres inférieurs à 378 000

Trois seuils sont donc candidats pour être conservés en tant que seuil de grave global. Une adéquation de loi de sévérité a été testée pour chaque loi et celles retenues sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Seuil	Distribution	Méthode	Paramètres	KS	C-VM
55 000	Weibull	MLE	$\xi_{Weibull}^{MLE} = 0.916$ $\beta_{Weibull}^{MLE} = 70\,502$	0,033	102
85 000	GPD	MME	$\xi_{GPD,1}^{MME} = -0.115$ $\beta_{GPD,1}^{MME} = 92\,604$	0,038	128
145 000	GPD	MME	$\xi_{GPD,2}^{MME} = -0.398$ $\beta_{GPD,2}^{MME} = 118\,814$	0,032	49

TABLE 2 – Résultats d'adéquation pour chaque seuil global

La sévérité étant déterminée pour chaque seuil qu'en est-il pour la fréquence ? 2 lois sont proposées pour modéliser la fréquence, qui sont les lois de Poisson et Binomiale négative, qui se baseront sur le nombre de sinistres dont la charge est supérieure aux seuils globaux par an entre 2013 et 2020. La variance de la charge étant bien supérieure à la moyenne, les lois binomiales négatives seront donc conservées pour modéliser la fréquence.

Afin d'observer un taux de grave, 10 000 années de sinistralité grave sont simulées par Monte-Carlo grâce aux adéquations de sévérité et de fréquence effectuées précédemment. Ainsi les taux de grave sont les suivants :

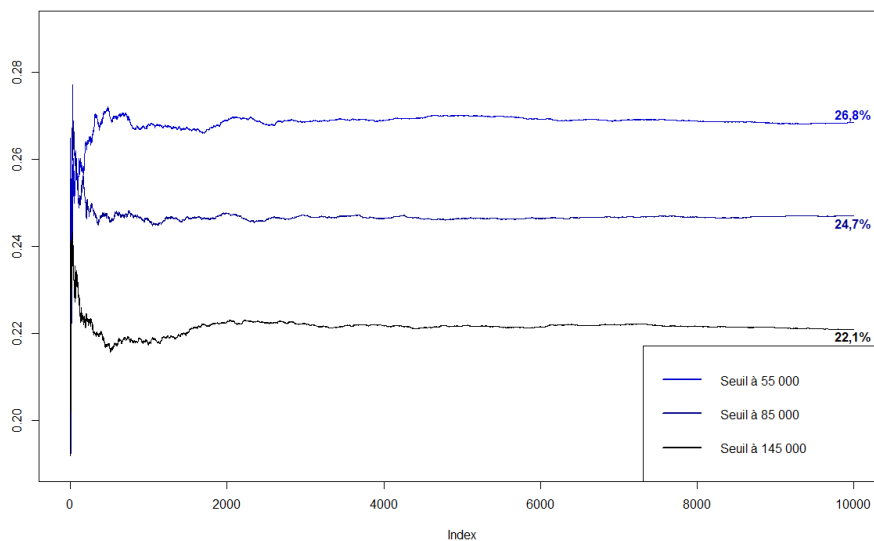


FIGURE 7 – Taux de grave selon le seuil de grave global

Pour le seuil à 55 000, le taux de grave global serait de 26,8%, pour le seuil à 85 000 il serait de 24,7% et enfin pour le seuil à 145 000 le taux de grave global aurait pour valeur 22,1%. Chaque taux avec son seuil associé a du sens, mais il a été retenu le taux de grave à 26,8% avec son seuil à 55 000 par principe de précaution pour ne pas conserver des sinistres non atypiques mais dont la récurrence pourrait miner le suivi de la rentabilité dans le temps.

Ce taux de grave global est donc une base, mais la question est maintenant de savoir si cet indicateur est réellement le plus précis afin d'étudier comment évolue la rentabilité de programmes hétérogènes ? Pour se faire, cinq programmes ont été créés artificiellement dans le but de coller à la réalité au sein de la Direction des Partenariats.

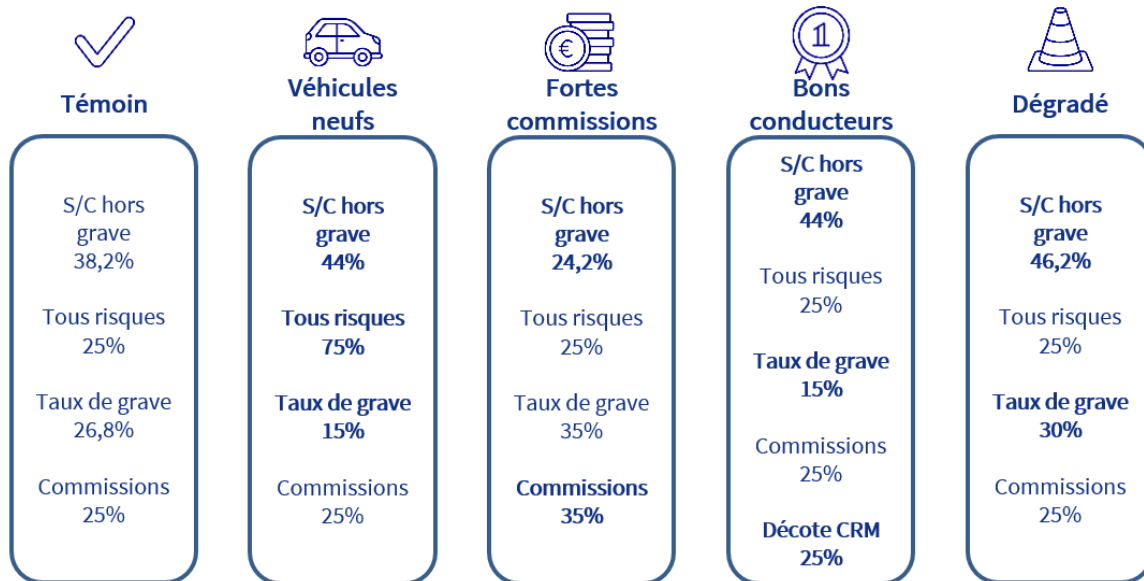


FIGURE 8 – Caractéristiques des différents types de portefeuille

La métrique utilisée est le ratio combiné écrêté mutualisé qui est une variante du ratio combiné, qui a pour formule :

$$Ratio\ combiné\ écrêté\ mutualisé = S/C_{Hors\ grave} + Taux\ de\ grave_{global} + \frac{Frais\ de\ gestion + Commissions}{Primes}$$

Le ratio combiné écrêté mutualisé et le ratio combiné sont équivalents lorsque le taux de grave réalisé correspond au taux de grave global.

L'intérêt est donc de choisir le bon indicateur pour suivre la rentabilité à travers un taux de grave adapté aux caractéristiques de chaque programme. Un taux de grave unique pour tous les programmes auto possède l'avantage de la simplicité pour la mise en place opérationnelle mais s'avère inapproprié pour certains portefeuilles atypiques et entraîne de nombreux échanges avec les courtiers lors de la présentation des résultats. Le taux de grave retenu est donc le suivant, et se base sur des notions de crédibilité :

$$Taux\ de\ grave_{crédibilisé} = \alpha Taux\ de\ grave_{réalisé} + (1 - \alpha) Taux\ de\ grave_{global}$$

L'objectif est donc de donner une certaine valeur à l'historique de chaque portefeuille, qui correspond au taux de grave réalisé, tout en rééquilibrant par le taux de grave global défini plus tôt dans l'étude. Le coefficient de crédibilité α évolue en fonction de la profondeur d'historique et de la taille de chaque programme, ce qui permet de personnaliser le taux de grave pour chaque programme, tout en conservant une base commune. Ce taux de grave crédibilisé est calibré afin que le coefficient α tende vers 1, c'est à dire qu'à partir d'un certain historique la taux de grave réalisé est assez stable pour le considérer uniquement.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de mémoire en entreprise, M. David FERREIRA, à qui je dois énormément et qui m'a permis de développer mes acquis théoriques, de rentrer dans le monde professionnel et qui m'a tant appris. Je le remercie pour tous ses conseils, son aide et son temps pour me former et me permettre de m'améliorer, de me remettre en question et de pouvoir présenter l'aboutissement d'une année de travail en collaboration.

Je tiens aussi à remercier toute l'équipe Actuariat de la Direction des Partenariat d'AXA France, en particulier son manager M. Christophe GALLOIS ainsi que M. Cédric BORDIER, pour leur accueil durant toute cette année et leur présence au quotidien.

Je remercie M. Pierrick PIETTE, mon tuteur pédagogique à l'ISFA, pour son aide et ses conseils lors de la rédaction de ce mémoire.

Merci aussi à mes parents pour tout ce qu'ils ont pu m'apporter jusqu'ici.

Je remercie évidemment Lucie, Quentin, Gurvan, Thomas, Julie, Guillaume et Mathieu, mes compagnons d'étude à l'ISFA, avec qui j'ai pu passer ces trois belles dernières années.

Enfin, je souhaite finir en remerciant tout particulièrement Nolwenn, pour sa précieuse présence tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Introduction

Les sinistres graves sont une catégorie de sinistres qui influent grandement sur la stabilité financière d'une compagnie d'assurance. De par leur extrême sévérité et leur faible fréquence, ces sinistres doivent être considérés d'une manière différente des sinistres attritionnels, tant dans la modélisation que dans leur impact en tarification d'un produit.

Au sein d'AXA France IARD, la Direction des Partenariats propose des solutions d'assurance innovantes pour ses clients dans des domaines classiques comme des produits automobile et MRH, ou des domaines plus nouveaux comme des produits couvrant les nouvelles mobilités en suivant les législations en vigueur. La Direction des Partenariats officiant avec une multitude d'entités, les contrats sont gérés par groupement selon leur programme et donc chaque programme possède sa rentabilité propre. Il est donc essentiel de maintenir une rentabilité stable par contrat, tout en assurant la rentabilité globale de la Direction des Partenariats.

Certains programmes étant de taille réduite, la sinistralité grave peut grandement impacter leur rentabilité, où un énorme sinistre peut faire exploser le S/C. Au sein de la direction, afin de contrer cette sinistralité atypique est appliqué un taux de grave fixe, qui permet de lisser dans le temps les sinistres graves. Les sinistres graves le sont à partir d'un certain seuil, qui n'est pas réévalué d'année en année. Le taux de charge par rapport aux primes de sinistres graves est donc supprimé du calcul de la rentabilité et remplacé par le taux de grave fixe.

L'objectif de ce mémoire est donc d'étudier l'historique des sinistres pour vérifier si le seuil de grave actuel est toujours réaliste aujourd'hui. L'impact de cette sinistralité grave sur la rentabilité par programme mais aussi au global est au coeur du sujet, et le taux de grave fixe découlant du seuil de grave répondra à cette problématique.

Dans un premier temps sera proposée une mise en place du contexte de la Direction des Partenariats d'AXA France IARD, afin de mieux comprendre pourquoi ce mémoire a du sens. Ensuite une garantie particulière sera étudiée en profondeur grâce à la théorie des valeurs extrêmes. Un retour à la problématique de départ sera ensuite effectué avec la détermination du seuil de grave global et ainsi du taux de grave. Enfin, des applications concrètes pour mieux apprécier l'emploi du taux de grave seront présentées.

Table des matières

Note de Synthèse	4
Remerciements	11
Introduction	12
Table des matières	13
1 Contexte de l'étude	15
1.1 La direction des Partenariats d'AXA France IARD	15
1.2 Problématiques sur la rentabilité	16
1.3 Objectifs du mémoire	17
1.4 Le périmètre Auto 4 roues	17
1.5 Présentation des données	18
1.5.1 Création de la base	18
1.5.2 Caractéristiques des données	19
1.5.3 Zoom sur les données corporelles	21
1.6 Introduction à la Théorie des Valeurs Extrêmes	21
1.6.1 Lois limites pour le maximum	21
1.6.2 Lois des dépassements de seuils	23
2 Détermination du seuil de grave corporel	24
2.1 Retraitement des données	24
2.1.1 Mise en AS-IF des sinistres	24
2.1.2 Projection des sinistres à l'ultime	25
2.1.3 Etude des données	27
2.2 Présentation des estimateurs de seuil de grave	28
2.2.1 QQ-plot	28
2.2.2 Estimateurs de paramètre de queue	29
2.3 Résultats obtenus et analyse	34
2.4 Méthodologie d'adéquation de lois de sévérité	39
2.4.1 Nombre de lois	39
2.4.2 Lois testées	40
2.4.3 Tests d'adéquation	40

2.4.4	Détermination des paramètres	42
2.5	Résultats d'adéquation	43
2.5.1	Adéquation selon un unique seuil	43
2.5.2	Adéquation selon deux seuils	45
3	Le taux de grave	52
3.1	Détermination du nouveau seuil et adéquation de lois	52
3.1.1	Le seuil de grave global	52
3.1.2	Adéquation de la sévérité	54
3.1.3	Adéquation de la fréquence	55
3.2	Taux de grave théorique	57
4	Applications	59
4.1	Analyse de programmes	59
4.1.1	Analyse selon le ratio combiné	61
4.1.2	Analyse selon le ratio combiné écrêté mutualisé	62
4.1.3	Crédibilité des portefeuilles	64
4.1.4	Rappel du contexte et conclusion	67
4.2	Traité de réassurance	67
4.2.1	Justification du processus	68
4.2.2	Détermination du type de traité de réassurance	69
4.2.3	Prime pure de réassurance et impacts	71
4.2.4	Pour aller plus loin	74
4.3	Impact sur-inflation	74
4.3.1	Contexte actuel	74
4.3.2	L'impact d'une sur-inflation sur le taux de grave	76
	Conclusion	78
	Bibliographie	79
	Annexes	80

Chapitre 1

Contexte de l'étude

Les travaux effectués pour ce mémoire portent sur un portefeuille Auto 4 roues au sein de la Direction des Partenariats d'AXA France. Les spécificités de ce contexte ainsi que les contraintes liées à ce cadre particulier seront explicités dans ce chapitre. Une introduction à la Théorie des Valeurs Extrêmes, essentielle dans ces travaux, sera de plus présentée.

1.1 La direction des Partenariats d'AXA France IARD

AXA France IARD est une filiale du Groupe AXA exerçant des activités d'assurance de dommages pour particuliers et professionnels. Les différents produits conçus sont principalement des produits d'assurance automobile, multi-risque habitation ou encore responsabilité civile. En 2021 AXA France IARD présente un chiffre d'affaire de 7 386 millions d'euros, en hausse de 6,2% par rapport à 2020. Cette augmentation provient en majeure partie d'une hausse de volume mais également tarifaire sur le segment Entreprises.

La Direction des Partenariats s'inscrit dans cette lignée et est la direction proposant des solutions d'assurances personnalisées à ses partenaires, avec une expertise reconnue et un accompagnement dédié. Ces partenaires sont en général des intermédiaires d'assurance tels que les courtiers s'occupant de la gestion des contrats tandis que la Direction des Partenariats porte le risque. C'est cette présence d'intermédiaires qui rend le contexte spécial pour ces travaux. En effet, la direction travaille avec de nombreux courtiers qui proposent eux-mêmes différents produits. C'est donc cette multiplicité de programmes qui forme le portefeuille étudié et implique un besoin d'uniformisation des données, problématique récurrente au sein de la direction.

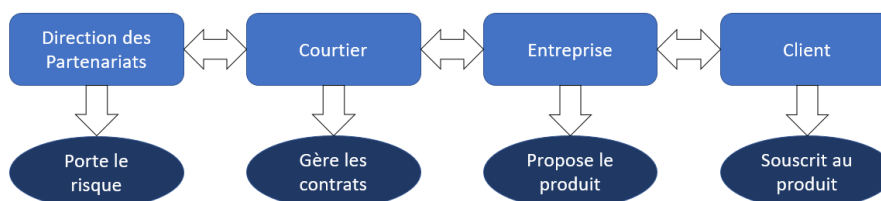


FIGURE 1.1 – Principe du partenariat

1.2 Problématiques sur la rentabilité

Du fait de la nature des activités de la direction des Partenariats, les besoins en rentabilité sont doubles :

- La rentabilité par programme afin de s'assurer du bon fonctionnement de chaque partenariat.
- La rentabilité au global en agrégeant tous les groupements de contrats.

Il est donc essentiel d'avoir une rentabilité globale saine tout en conservant une grande majorité de programmes rentables. Toute la difficulté provient du fait que les programmes un à un peuvent avoir un nombre restreint de contrats. Par conséquent certains groupements de contrats sont très volatiles et particulièrement impactés par la survenance d'un sinistre grave. Le principe de mutualisation des risques peut donc être compliqué à respecter. La méthode actuellement utilisée se décompose en plusieurs étapes :

- Un seuil de grave est déterminé au-dessus duquel tous les sinistres seront considérés comme graves. Ce seuil est fixé par jugement d'experts.
- Tous les sinistres graves sont supprimés lors du pilotage de la rentabilité, à la différence de la technique utilisée en tarification où une sur-crête est appliquée à partir du seuil.
- A la place de ce pourcentage de graves, un taux de grave fixe déterminé par avis d'experts est affecté pour compenser cette charge de graves.
- Le S/C obtenu est donc un S/C écrêté mutualisé, qui a pour but de lisser les sinistres graves dans le temps sur des programmes de taille modeste.

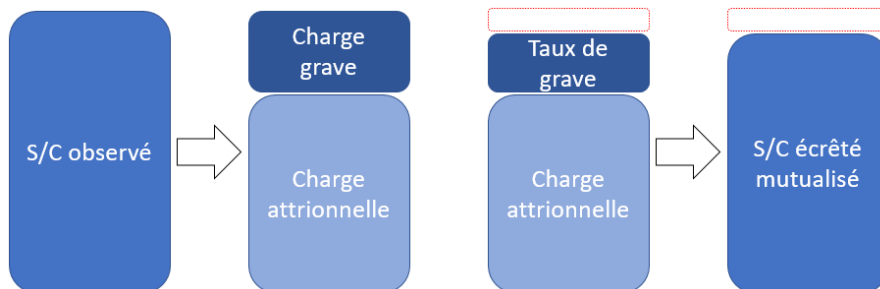


FIGURE 1.2 – Exemple de lissage des sinistres graves d'un programme dégradé

Soit l'exemple d'un programme ayant 15 000 unités de primes et ayant subi 300 sinistres dans l'année. De plus l'hypothèse est prise que le seuil de graves est de 80 unités et que le taux de grave appliqué après suppression des sinistres graves est de 22%.

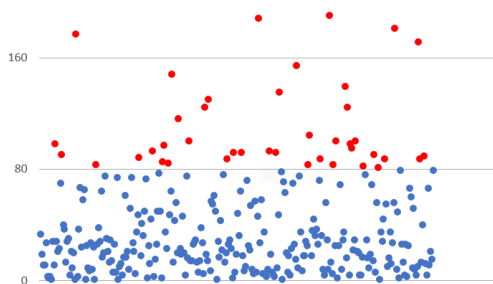


FIGURE 1.3 – Répartition des sinistres du programme

Dans cet exemple, 41 sinistres sont considérés graves et représentent un pourcentage de charge grave par rapport aux primes de 30%, pour un S/C observé de 75%. En appliquant le nouveau taux de grave on obtient donc un S/C écrêté mutualisé de 67%.

Cette méthodologie de gestion des sinistres graves a l'avantage de se protéger contre la malchance d'une période marquée par une survenance accrue de sinistres atypiques qui ne se répliquera pas. En revanche la méthode est très dépendante du seuil et du taux de grave car la rentabilité en est directement impactée. Une mauvaise calibration peut avoir comme impacts une mauvaise analyse de la situation et des stratégies qui ne seront pas optimales.

1.3 Objectifs du mémoire

La gestion des sinistres graves dans le contexte particulier de la Direction des Partenariats qui se distingue par l'agrégation de programmes de toutes tailles est donc essentielle pour la rentabilité par groupement de contrats mais aussi au global. C'est ainsi cette problématique qui justifie tous les travaux effectués dans ce mémoire.

- Le premier but est de vérifier et concurrencer l'approche actuelle. En effet le seuil utilisé est un seuil qui n'a pas été révisé depuis quelques années et l'aspiration est de confirmer si ce seuil a toujours du sens. De nombreux facteurs expliquent la volonté de révision du seuil, comme l'inflation, l'impact de nouvelles affaires ou de nouvelles législations (Loi du 28/12/21 relative à l'indemnisation des CATNAT par exemple). Le seuil actuellement utilisé est de 45 000€.
- La détermination de ce nouveau seuil de grave impliquera le taux de grave fixe qui sera appliqué dans le suivi de la rentabilité. L'objectif sera donc de mesurer l'impact de la sinistralité grave sur la rentabilité.
- Enfin, l'ultime objectif de ce mémoire est de fournir à la direction un outil de suivi de la rentabilité dans le temps afin de pouvoir dissocier les sinistres de fréquence et les sinistres de sévérité avec le seuil défini plus tôt. Cet outil sera utilisable pour n'importe quel programme ou périmètre. A savoir qu'un périmètre spécifique sera choisi dans la continuité des travaux pour des raisons qui seront expliquées par la suite.

1.4 Le périmètre Auto 4 roues

Comme expliqué précédemment, il a été choisi de restreindre le portefeuille pour des raisons de cohérence de périmètre. Le périmètre ainsi observé dans les travaux sera le portefeuille Auto 4 roues de la direction des Partenariats. Ce choix est tout d'abord justifié par la taille du périmètre, qui représente 48% des cotisations sur l'année 2021. Le portefeuille total étant modeste, il était ainsi obligatoire de choisir un nombre de données suffisant.

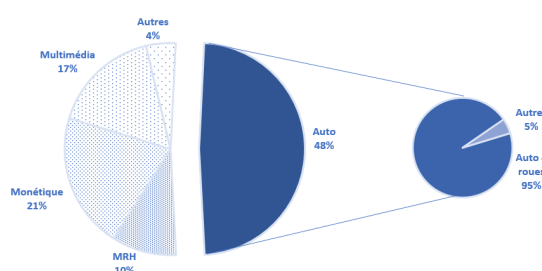


FIGURE 1.4 – Répartition du portefeuille

Le second intérêt du choix de l'auto 4 roues provient des garanties qu'elle comporte, dont les principales sont :

- **Responsabilité civile** (RCA) : Garantie obligatoire qui couvre les dommages matériels (RC-MAT) et corporels (RCORP) causés à un tiers, excluant le conducteur.
- **Garantie personnelle du conducteur** (GPCA) : Couvre les dommages matériels et corporels causés par le conducteur et dont il est aussi victime.
- **Bris de Glace** (BDGA) : indemnise l'assuré en cas de brisures des parties vitrées de la voiture.
- **Dommages Tous Accidents** (DOMA) : Prise en charge des dégâts sur la voiture de l'assuré sans question de responsabilité.
- **Vol ou tentative** (VOLAT/VOLAP) : L'assuré est indemnisé des coûts relatifs à la remise en état de la voiture en cas de tentative de vol. Si le vol est confirmé alors l'assuré perçoit une indemnisation équivalente à la valeur de la voiture au moment du vol.
- **Garanties grêle, incendie, tempête, CATNAT** (GRELA/INCA/TEMPA/CATA) : Indemnise l'assuré selon le type de sinistre subi.

Il est possible de différencier deux types de sinistres couverts par ces garanties :

- Les garanties qui se rapportent aux différents sinistres matériels, tels que le bris de glace ou encore le dommage. Ces garanties couvrent des risques de fréquence qui composent une grande partie de la base sinistres avec des coûts individuels modérés.
- Les garanties qui couvrent des risques corporels, comme la responsabilité civile corporelle et la garantie personnelle du conducteur. Les sinistres associés correspondent à des risques de sévérité.

L'idée serait donc que dans l'objectif de considérer la sinistralité grave, les sinistres corporels seraient les plus impactants. Cette observation sera confirmée lors de l'étude des données.

1.5 Présentation des données

1.5.1 Création de la base

La base sur laquelle se portent tous les travaux provient de la Direction des Comptes d'AXA France. Les bases sont des bases sinistres disponibles à la vision 31/12/YYYY. L'intérêt est donc de suivre l'évolution de la charge d'un sinistre année par année. L'idée de prendre les informations des Comptes plutôt que les bases utilisées par la direction des Partenariats possède aussi l'objectif de vérifier la bonne transmission des informations et la bonne adéquation entre les deux types de données. Les différents étapes sont résumées ci-dessous :

- Récupération de l'ensemble des bases sur tout l'historique. Cet historique sera justifié à la section suivante.
- Agrégation de toutes les bases afin d'obtenir une unique table possédant toutes les visions des sinistres selon le numéro de sinistre et la garantie touchée.
- Restriction des données au périmètre Auto 4 roues de la Direction des Partenariats suivant la sélection de contrats adéquate.

Les variables principales sont les suivantes :

Variable	Description
NMSIN	Numéro du sinistre
UP	Police touchée
NMCNT	Numéro du contrat
DTSURV	Date de survenance du sinistre
DTOUV	Date d'ouverture du sinistre
ETATSIN	Etat de la vie du sinistre
ETATUP	Etat de la vie de la police
Surv	Année de la survenance du sinistre
chg_2007-chg_2021	Charge du sinistre par vision

TABLE 1.1 – Variables principales

La base ainsi obtenue ressemble à celle ci-dessous :

NMSIN	ETATSIN	UP	ETATUP	NMCNT	Surv	chg_2007	...	chg_2020	chg_2021
1	3	BDGA	3	10001	2007	600	...	600	600
2	3	RCMAT	3	10001	2013	0	...	2000	2000
2	3	RCORCP	3	10001	2013	0	...	20000	20000
3	0	BDGA	3	10002	2020	0	...	550	550
3	0	GPCA	0	10002	2020	0	...	2000	5000

TABLE 1.2 – Base sinistres agrégée vision par vision

1.5.2 Caractéristiques des données

La base ainsi obtenue sera la base principale utilisée lors de l'ensemble des travaux et déclinable au besoin. Elle possède les caractéristiques suivantes :

- Les sinistres observés sont compris entre 2007 et 2020. Les informations précédant 2007 n'étant pas disponibles le choix fut immédiat. Après réflexion l'année 2021 n'est pas considérée dans les travaux pour plusieurs raisons. Tout d'abord de nombreux sinistres sont ouverts à un même coût d'ouverture fixe et ne sont pas revus, ce qui a pour conséquence une masse sur la distribution des sinistres qui n'est pas réaliste. De plus la projection à l'ultime de sinistres récents peut se révéler très volatile.
- La charge des sinistres est disponible par vision entre 2007 et 2021, au 31/12/YYYY. Cela permet de suivre l'évolution de la vie d'un sinistre jusqu'à sa clôture, et sera une composante importante lors du futur retraitement des données que sont la mise en as-if et la projection à l'ultime.
- De premiers retraitements ont été effectués à cette étape. Ont été supprimés les sinistres clos sans suite. Etant renseignés par le code 1 de la variable ETATSIN, il se peut qu'une charge leur soit associée. De plus les sinistres négatifs et nuls n'ont pas été conservés, pour des raisons d'élagage de la base mais aussi de leur impact neutre sur les futurs calculs. De plus il a été décidé de supprimer les sinistres dont la charge est inférieure à 500€. Ce choix se justifie par le fait que l'objectif des travaux n'est pas de modéliser les sinistres attritionnels contrairement à des problématiques de tarification.
- La base est composée de 228 programmes qui sont chacun des groupements de contrats et regroupe 284 787 sinistres ayant touchés 300 068 polices entre 2007 et 2020. Quelques chiffres concernant la base sont disponibles ci-dessous.

Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Quantile 90%	Quantile 99%	Maximum
3 403€	915€	1 308€	2 225€	4 710€	24 008€	11 675 796€

TABLE 1.3 – Répartition de la base

L'extrême majorité de la sinistralité présente dans le portefeuille globale est d'intensité assez faible, avec moins d'1% des sinistres qui dépassent 25 000€. Plus précisément, il a été étudié le nombre ainsi que la charge cumulée des sinistres par rapport au seuil de grave actuellement utilisé à la Direction des Partenariats qui est de 45 000€.

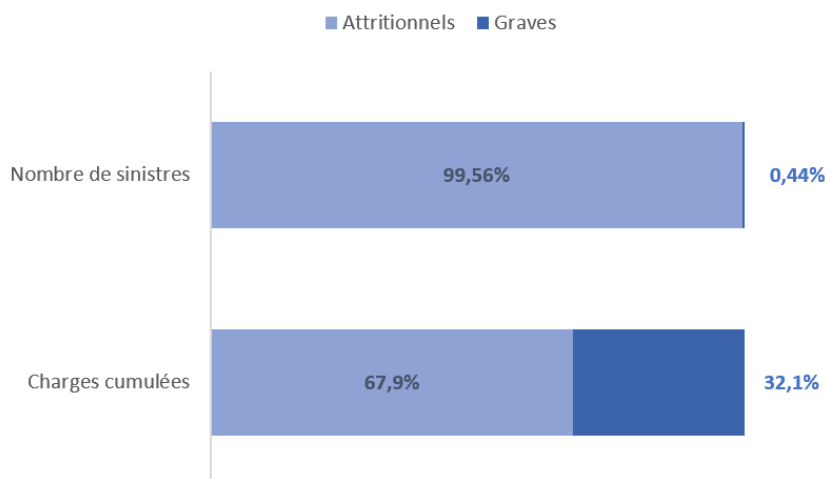


FIGURE 1.5 – Sinistralité selon le seuil de grave à 45 000€

L'impact des sinistres graves est donc majeur malgré leur faible fréquence, et justifie l'approche du taux de grave effectuée pour le pilotage de la rentabilité au sein de la direction. La question se pose de la composition de cette charge grave. Intuitivement l'idée serait de dire que les sinistres corporels en représentent la grande majorité car un sinistre corporel peut impliquer une forte charge pour l'assureur, de par les possibles coûts d'hospitalisation et d'opérations, mais aussi le paiement d'une personne dédiée à l'accompagnement du sinistré si dépendance il y a.

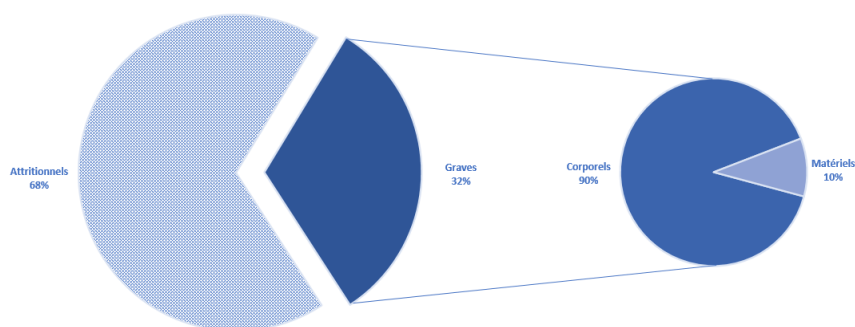


FIGURE 1.6 – Décomposition de la charge grave selon le split Corporel/Matériel

En effet 90% de la charge grave provient de sinistres corporels. Une étude approfondie de ces sinistres va donc être menée.

1.5.3 Zoom sur les données corporelles

Cette sous-base contient 13 466 sinistres dont 850 qui dépassent le seuil de 45 000€, donc pour cet unique portefeuille le seuil est trop faible.

Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Quantile 90%	Quantile 99%	Maximum
25 579€	1 490€	2 228€	8 636€	29 775€	386 045€	11 675 796€

TABLE 1.4 – Répartition de la base corporelle

La moyenne est donc bien supérieure à la médiane ce qui signifie que la queue de la distribution des sinistres corporels est longue, impression renforcée par les écarts entre les différents quantiles extrêmes.

Le contexte théorique est donc plus favorable à l'étude de la sinistralité grave sur la base corporelle. Mais il ne faut pas oublier que le seuil qui sera trouvé dans la suite des travaux sera bien trop élevé pour être appliqué à l'ensemble du portefeuille de la Direction des Partenariats, qui demande un seuil global pour pouvoir utiliser le taux de grave dans le contexte de rentabilité dans le temps. Il a donc été décidé de mener l'étude de détermination de seuil en deux temps. Tout d'abord en ne considérant que les sinistres corporels pour obtenir un seuil de grave corporel et des modélisations adéquates, puis avec une maille portefeuille global pour obtenir un seuil global de grave qui sera ensuite utilisé pour déterminer un taux de grave.

1.6 Introduction à la Théorie des Valeurs Extrêmes

Pour la suite de l'étude il est utile de développer le fonctionnement de la Théorie des Valeurs Extrêmes. Deux approches se différencient en termes de détermination de seuils : l'approche par lois limites pour le maximum (Block Maxima) et l'approche de dépassements de seuils (Peak over threshold). Une grande partie de la TVE est reprise de [Mornet \(2021\)](#) et [Xu \(2017\)](#)

1.6.1 Lois limites pour le maximum

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de distribution F . Soit M_n le maximum des $X_1, \dots, X_n$ noté $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Il vient alors que :

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F(x)^n$$

2 hypothèses découlent de ce résultat :

- Si $F(x) < 1$ alors $\mathbb{P}(M_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Si x^F est le point extrême de F alors $M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{proba} x^F$ avec $x^F = \sup(x \in \mathbb{R}, F(x) < 1)$

Ces hypothèses renseignent sur le caractère dégénéré de la distribution asymptotique de M_n , ce qui oblige à passer par une normalisation ou une transformation. Afin de régler ce problème, il faut introduire la notion de classes d'équivalence de distributions limites. Soit F_1 et F_2 deux fonctions de répartition, telles que pour $\alpha > 0$ et β l'égalité suivante existe :

$$F_2(\alpha x + \beta) = F_1(x) \quad \forall x$$

Alors F_1 et F_2 sont de même type. Cette définition permet d'appliquer l'un des théorèmes principaux de la Théorie des Valeurs Extrêmes, le théorème de Fisher-Tippett [Gnedenko \(1943\)](#).

Théorème 1 (*Fisher-Tippett*)

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F et M_n leur maximum. S'il existe deux suites $\alpha_n > 0$ et β_n telles que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - \beta_n}{\alpha_n} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$$

pour G une fonction de répartition non dégénérée, alors G est du même type que l'une des trois distributions suivantes :

$$\text{Fréchet } (a > 0), \quad \Phi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-a}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Weibull } (a > 0), \quad \Psi_a(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^a) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Gumbel}, \quad \Lambda(x) = \exp(\exp(-x))$$

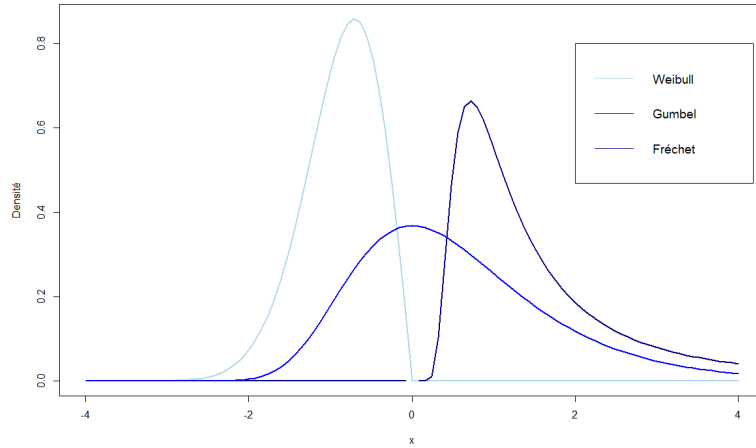


FIGURE 1.7 – Densité des lois de Weibull, Gumbel & Fréchet

Ce théorème est central dans l'application de la théorie des valeurs extrêmes, et il est possible d'effectuer un parallèle avec le théorème central limite où la loi limite est une loi normale. Ces 3 distributions sont des cas particuliers de GEV : Generalized Extreme Value.

Définition 1 (*Distributions des extrêmes généralisées GEV*)

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma}))_+)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma}))) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

avec ξ le paramètre de queue, μ le paramètre de position et σ le paramètre d'échelle. De même, il vient que :

$$H_\xi(x) = \exp(-(1 + \xi x)_+)^{-1/\xi}$$

Le paramètre de queue influe directement sur la loi associée :

- Si $\xi > 0$ alors la queue est dite lourde et la distribution est une distribution de Fréchet.
- Si $\xi < 0$ alors la queue est dite fine et la distribution est une distribution de Weibull.
- Si $\xi = 0$ alors la queue est dite intermédiaire et la distribution est une distribution de Gumbel.

Définition 2 (*Domaine d'attraction*)

Le théorème de Fisher-Tippett permet de montrer que pour G une loi non-dégénérée, si

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - \beta_n}{\alpha_n} \leq x\right) = [F(\alpha_n x + \beta_n)]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(x)$$

alors H a une distribution de GEV vue précédemment et $F \in DA(H)$ avec $DA(H)$ le domaine d'attraction de H

Weibull $\xi < 0$	Gumbel $\xi = 0$	Fréchet $\xi > 0$
Uniforme	Gamma	Cauchy
Beta	Normale	Pareto
	Log-normale	Log-gamma
	Weibull	Student

TABLE 1.5 – Exemples de distributions appartenant aux différents domaines d'attraction

1.6.2 Lois des dépassements de seuils

La section précédente concernait la loi du maximum M_n des $X_1, \dots, X_n$. Ici l'intérêt est de regarder les $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i > u_n}$, qui sont les dépassements du seuil u_n , donc aux $Y_i = (X_i - u_n)_+$. Ces Y_i sont caractérisées par la loi de Pareto généralisée (GPD).

Définition 3 (*Generalized Pareto Distribution GPD*)

La loi de Pareto généralisée est définie par :

$$G_{\xi, \beta(u)}^p = \begin{cases} 1 - [1 + \xi(x/\beta)]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 \leq x &\leq -\beta/\xi & \text{si } \xi < 0 \end{aligned}$$

Théorème 2 (*Théorème de Pickands*) [Pickands \(1975\)](#) [Balkema & Haan \(1974\)](#)

Soit H_ξ la distribution d'une GEV(ξ) et $G_{\xi, \beta(u)}^p$ la fonction de répartition d'une GPD(ξ). Si et seulement si $F \in DA(H_\xi)$ alors

$$\lim_{u \rightarrow x^F} \sup_{0 < x < x^F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}^p(x)| = 0$$

avec F_u la fonction de répartition de dépassement de seuil qui vaut

$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)}$$

et $x^F = \sup \{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$

Chapitre 2

Détermination du seuil de grave corporel

Ce chapitre est consacré à l'étude approfondie des données et à la détermination de seuil de grave. Tout d'abord elles seront retraitées afin de ressembler le plus possible à des données disponibles au 31/12/2021. Une fois cette étape effectuée, le but sera d'obtenir un seuil de grave pour les sinistres corporels. Une suite de la théorie des valeurs extrêmes concernant ces seuils sera présentée. Différentes méthodologies seront testées afin d'établir un seuil qui a du sens. Enfin une étape de modélisation de la sévérité des sinistres graves corporels sera proposée.

2.1 Retraitement des données

La base de données a déjà été nettoyée précédemment, mais un second retraitement est nécessaire et s'effectuera en deux parties : tout d'abord une prise en compte de l'inflation afin de considérer les sinistres comme si ils avaient lieu en 2021. Ensuite ces sinistres seront projetés à l'ultime dans le but de connaître l'ensemble de la sévérité et de la fréquence grave après retraitement, voir [ElBaamrani \(2017\)](#).

2.1.1 Mise en AS-IF des sinistres

L'historique des sinistres de la base est compris entre 2007 et 2020, avec une vision finale disponible au 31/12/2021. L'objectif est de revaloriser les charges des sinistres si ils avaient lieu au 31/12/2021. Cette revalorisation s'effectue par une l'application d'un coefficient d'inflation pour chaque année de développement du sinistre en question. Dans le cadre de l'étude des sinistres corporels, cette inflation prend comme valeur :

- 6% par an entre 2007 et 2010
- 5% par an à partir de 2011

Cet indice corporel est un indice validé par jugement d'expert au sein d'AXA France et est utilisé dans le cadre du modèle interne. Cet indice est censé capter l'évolution des salaires du personnel médical et de tous les autres coûts consécutifs à un sinistre corporel. La mise en as-if s'effectue comme ceci pour n années de développement :

$$y_0 = x_0 \times \frac{I_{cible}}{I_{survenance}}$$

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) \times \frac{I_{cible+i}}{I_{survenance+i}}$$

avec x_i la charge du sinistre associée à l'année de développement i , y_i la charge du sinistre recalibrée associée à l'année de développement i . $I_{survenance+i}$ et $I_{cible+i}$ correspondent respectivement à l'indice d'inflation correspondant à l'année de développement i sur l'année de survenance du sinistre et l'année cible de recalibrage du sinistre.

Soit l'exemple suivant d'un sinistre ouvert à 200 000€ au 31/12/2016 clôturé au 31/12/2019. L'objectif est de le considérer comme ouvert au 31/12/2021.

Année de développement	2016	2017	2018	2019
Charge	200 000€	250 000€	275 000€	290 000€

TABLE 2.1 – Exemple développement d'un sinistre avant as-if

Comme vu auparavant le facteur d'inflation vaut 5% par an à partir de 2011, donc l'inflation appliquée chaque année sera la même et le rapport des indices vaudra à chaque fois $1,05^5 = 1,276$ donc le sinistre asifé au 31/12/2021 sera réévalué comme suivant :

Année de développement	2021	2022	2023	2024
Charge	255 256€	319 070€	350 977€	370 122€

TABLE 2.2 – Exemple développement d'un sinistre après as-if

A noter que l'indice d'inflation corporel est un indice pour sinistres atypiques. Lors de ces travaux concernant le seuil de grave des sinistres corporels aucun indice attritionnel n'a été considéré car comme l'objectif n'est pas de modéliser les sinistres attritionnels, seuls les sinistres potentiellement graves après asif seront inflatés.

2.1.2 Projection des sinistres à l'ultime

Une fois les sinistres reconsidérés au 31/12/2021, il est important de retraiter les sinistres encore non clos. Dans le cas des sinistres graves ils sont de deux types :

- **Incurred but not enough reported (IBNER)** qui sont les sinistres déjà considérés comme graves mais dont la charge évolue encore. Les IBNER ont un impact sur la sévérité.
- **Incurred but not yet reported (IBNYR)** sont des sinistres qui ne sont pas encore considérés comme graves. Soit le sinistre est survenu mais n'est pas encore ouvert, soit le sinistre a une charge plus faible que le seuil mais une réévaluation à la hausse peut le faire passer au-dessus du seuil. Les IBNYR ont aussi un impact sur la sévérité mais surtout sur la fréquence.

Voici deux exemples pour illustrer les concepts précédents :

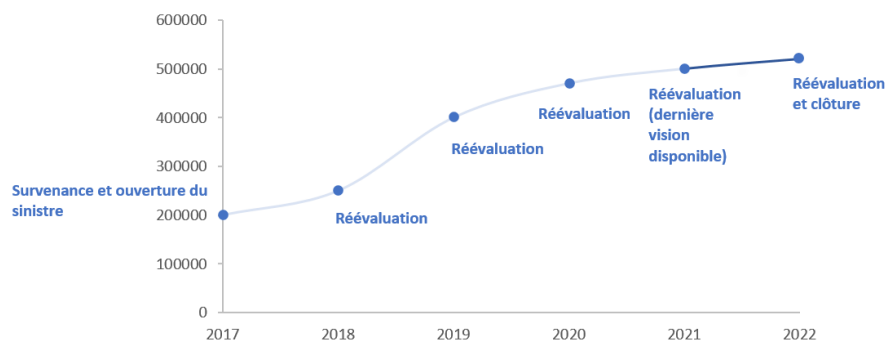


FIGURE 2.1 – Exemple IBNER

Ici un sinistre ouvert à 200 000€ en 2017, et réévalué chaque année avec comme dernière réévaluation 500 000€ au 31/12/2021. L'hypothèse est prise ici qu'en moyenne un sinistre grave est clos après 5 ans de développement. Ici ce sinistre a été ouvert 4 ans avant la dernière année disponible, donc ce sinistre sera projeté une année supplémentaire afin de le considérer à l'ultime.

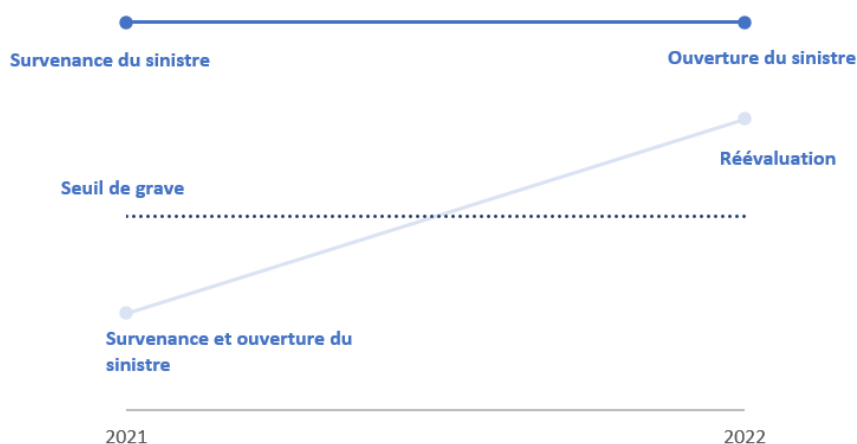


FIGURE 2.2 – Exemple IBNYR

Sur cet exemple les deux sinistres reprennent les deux cas possibles d'IBNYR :

- En bleu clair un sinistre dont la dernière vision connue reflète une charge en-dessous du seuil de grave, mais dont l'évolution de la charge similaire à un IBNER peut la faire passer comme sinistre grave.
- en bleu foncé un sinistre qui est survenu au 31/12/2021 mais non encore ouvert. A son ouverture après le 31/12/2021 sa charge sera supérieure au seuil, ce sinistre sera donc grave.

Actuellement aucun de ces sinistres n'est considéré comme grave, mais à l'ultime ils le seront. La fréquence en sera donc impactée et la projection à l'ultime qui sera effectuée dans la suite des travaux prendra cet effet en compte.

2.1.3 Etude des données

Les sinistres corporels susceptibles de devenir graves ou l'étant déjà ont été asifés et projetés à l'ultime, voici les informations qui résultent de ces retraitements. La base se répartie comme suivant :

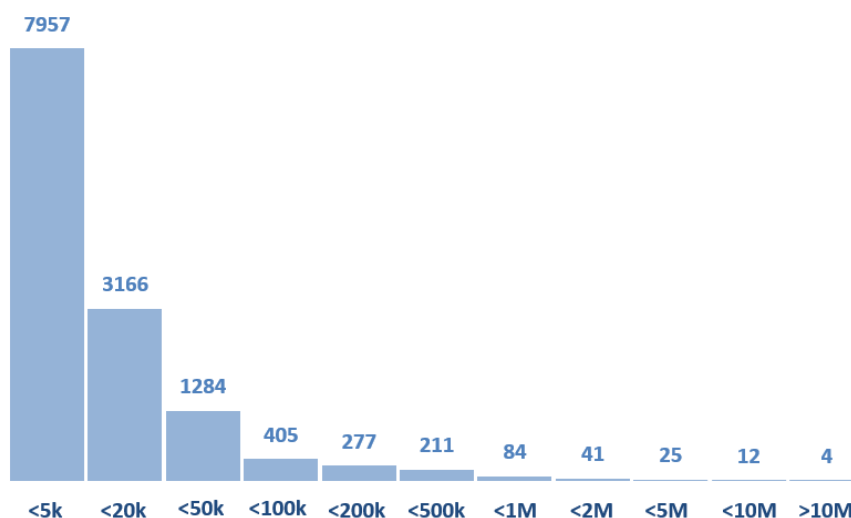


FIGURE 2.3 – Répartition des sinistres par tranche

Il est possible d'observer que 98,8% des sinistres ont une charge inférieure à 500 000€. Mais ces 166 sinistres représentent près de 60% de la charge sinistre cumulée. La queue de distribution des sinistres est donc lourde et justifie l'application de la théorie des valeurs extrêmes.

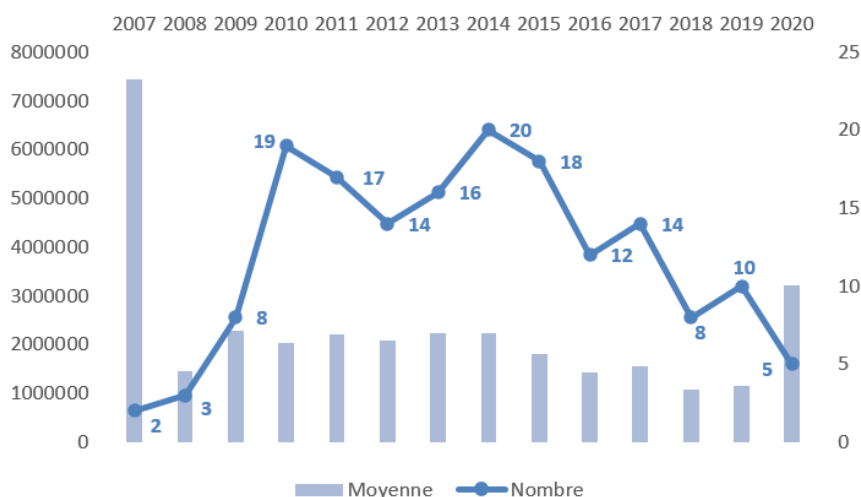


FIGURE 2.4 – Répartition par année des sinistres avec une charge supérieure à 500 000€

La répartition des sinistres par année montre qu'en moyenne, les années avec le plus de sinistres sont plutôt stables avec une moyenne aux environs de 2 000 000€. La tendance est à la baisse sur les années les plus récentes en terme de fréquence mais aussi de sévérité, excepté en 2020 très volatile car peu de sinistres et tirée vers le haut avec un sinistre qui avoisine les 8 000 000€.

2.2 Présentation des estimateurs de seuil de grave

Cette partie est une suite à l'introduction de la Théorie des Valeurs Extrêmes développée dans le premier chapitre. Ici l'objectif est de présenter les différents méthodes qui interviennent dans l'estimation de seuil et de paramètre de loi, et peuvent se retrouver dans de nombreuses littératures sur le sujet, et notamment chez [Derkaoui \(2017\)](#).

2.2.1 QQ-plot

La première méthode n'est pas à proprement parler une méthode de détermination de seuil, mais de l'existence d'une queue épaisse. La méthode graphique quantile-quantile plot revient à tester l'adéquation entre les quantiles d'une loi de référence et ceux de la distribution à tester. Habituellement l'étude s'effectue sur un QQ-plot exponentiel, c'est-à-dire que ce sont les quantiles de la loi exponentielle $F(x) = 1 - \exp(-\frac{x}{\lambda})$ pour $x \geq 0$. Pour un quantile d'ordre $p \in [0, 1]$, la fonction quantile est l'inverse de la fonction de répartition d'où $F^{-1}(p) = -\lambda \ln(1 - p)$. Dans le cadre du QQ-plot exponentiel, les points sont tracés selon la formule suivante :

$$(X_i, -\ln(\frac{i}{n}), i \in (1, \dots, n))$$

Voici quelques exemples de QQ-plot exponentiel selon différentes distributions.

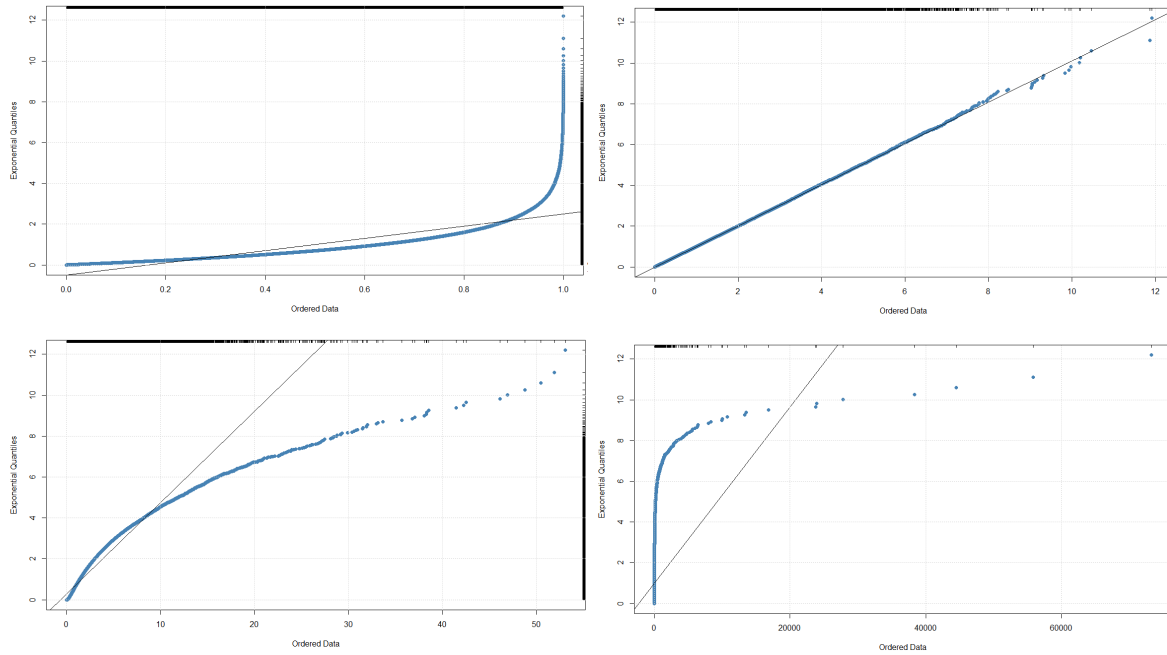


FIGURE 2.5 – QQ-plot exponentiel sur des échantillons de loi respectivement uniforme, exponentielle, log-normale et GPD

Quelques observations sont à faire sur ces graphiques :

- L'estimation de l'épaisseur de la queue de distribution se fait selon la concavité ou la convexité de la courbe tracée. Plus une courbe sera concave, plus sa queue sera épaisse. Au contraire une courbe convexe impliquera une queue fine.
- Le premier graphique montre la comparaison entre les quantiles d'une loi exponentielle de référence et ceux d'une loi uniforme simulée. La loi uniforme appartenant au domaine d'attraction de Weibull, la queue de la distribution est plus fine que celle de la loi exponentielle.
- Les deux courbes sont alignées sur le second graphique lors de la comparaison des quantiles de deux lois exponentielles, qui ont donc une queue de distribution équivalente.
- Les deux derniers graphiques sont des comparaisons de quantiles respectivement d'une loi log-normale et d'une loi GPD par rapport à la loi exponentielle. La loi GPD a une queue bien plus épaisse que la loi log-normale, qui a elle même une queue plus épaisse que la loi exponentielle.

Le QQ-plot exponentiel est le plus utilisé mais il est possible de comparer des distributions à d'autres lois de référence. Le tableau suivant reprend les types de QQ-plot possibles et les points à tracer correspondants.

Type de QQ-plot	Points à tracer
Normal	$(X_i, \phi^{-1}(1 - \frac{i}{n}))$
Log-normal	$(\ln(X_i), \phi^{-1}(1 - \frac{i}{n}))$
Pareto	$(\ln(X_i), -\ln(\frac{i}{n}))$
Weibull	$(\ln(X_i), \ln(-\ln(\frac{i}{n})))$

TABLE 2.3 – Différents types de QQ-plot

2.2.2 Estimateurs de paramètre de queue

Les estimateurs de paramètre de queue qui seront présentés dans cette partie rentrent dans le cadre de l'approche Peak-Over-Threshold, et dépendent donc de la distribution GPD. Plus précisément, une caractéristique importante à considérer est la stabilité de la distribution GPD.

Définition 4 (*Stabilité de la loi GPD*)

Si $X \sim \text{GPD}(\beta, \xi)$ alors $X - u | X > u \sim \text{GPD}(\beta + \xi u, \xi)$

Cette propriété de stabilité indique que si X suit une loi GPD, alors elle suivra aussi une GPD au-delà d'un certain seuil u . Cela veut donc dire que pour le seuil u_1 trouvé, si la distribution suit une loi GPD, alors elle suivra une GPD pour n'importe quel seuil $u_2 > u_1$. Cette propriété sera appliquée lors de la définition des différentes méthodes d'estimation de seuil.

Mean excess function

Cette méthode est une méthode graphique et s'appuie sur la fonction des excès moyens, donnée par la formule suivante :

$$f_{ME}(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u)$$

avec u le seuil considéré. Ici la stabilité de la loi GPD est essentielle car si X suit une loi GPD alors la distribution à l'intérieur de l'espérance suit aussi une loi GPD. Soit $N_n(u) = (i = 1, \dots, n; X_i > u)$ les sinistres qui dépassent le seuil u . Alors la fonction des excès moyens vaut :

$$f_{ME}(u) = \frac{\sum_{i \in S_n(u)} (X_i - u)}{\text{card} S_n(u)}$$

et le graphique obtenu sont les points tracés selon $(X_i, f_{ME}(X_i), i = 1, \dots, n)$ et est appelé ME plot.

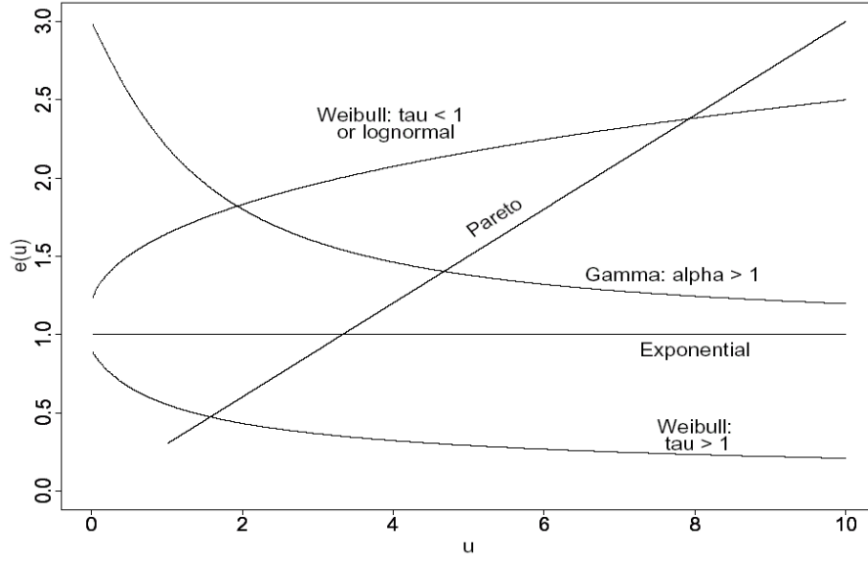


FIGURE 2.6 – ME plot pour différentes distributions. *Source : Mornet (2021)*

Comme visible sur ce graphique, les lois ont des comportements différents sur le ME plot. Cet outil graphique est une première aide pour déterminer un seuil de grave car un changement dans la distribution sera visible.

Dans le cas d'une loi GPD, si $X \sim GPD(\xi, \beta)$ alors $f_{ME}(u) = \frac{\beta}{1-\xi} + \frac{\xi}{1-\xi}u$

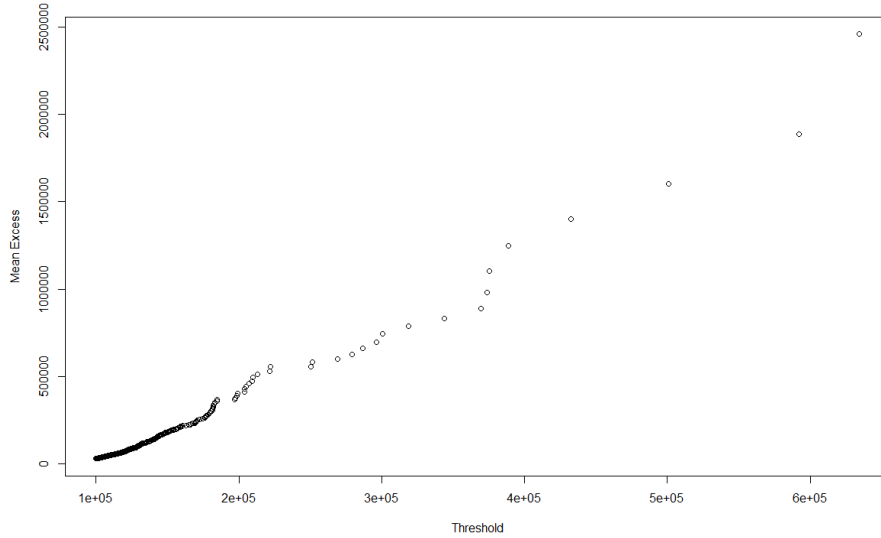


FIGURE 2.7 – ME plot pour une $GPD(\xi = 0.5, \beta = 10000)$

Ici la courbe tracée est affine, ce qui est une propriété du ME-plot de loi GPD.

Cette méthode graphique est intéressante car elle délivre un seuil visible sur le graphique lors du changement de distribution. Mais il existe deux problématiques : Tout d'abord le seuil n'est pas exact et il est difficile de donner une unique valeur, il sera donc préférable de donner un encadrement. De plus cette méthode n'informe pas sur le paramètre de queue, qui est une donnée essentielle lors de l'adéquation des lois. Les estimateurs qui seront présentés dans les prochaines sections pallieront à cette problématique.

Hill

L'estimateur

L'estimateur de Hill [Hill \(1975\)](#) est l'estimateur le plus connu et utilisé dans le cadre de l'estimation du paramètre de queue. Cette méthode d'estimation implique d'être dans le cadre où $\xi > 0$. Pour k suffisamment grand, l'estimateur de Hill a la forme suivante :

$$\xi_{k,n}^{hill} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_i - \ln X_{k+1}$$

Il en découle que pour $k \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ et $m/n \rightarrow 0$ l'estimateur de Hill est asymptotiquement gaussien et donc il en vient que :

$$\sqrt{k} (\xi_{k,n}^H - \xi) \xrightarrow{L} N(0, \xi^2)$$

L'estimation graphique du paramètre de queue

Il est possible, à partir de l'estimateur de Hill de tracer un graphique, appelé hillplot.

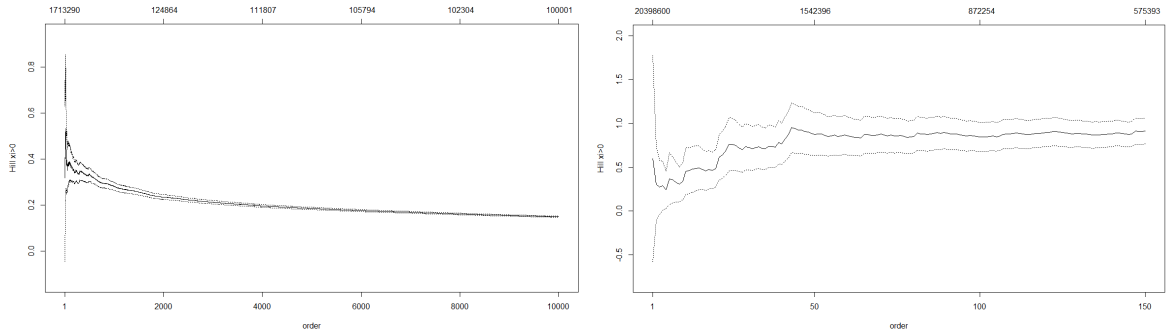


FIGURE 2.8 – Hillplot sur une GPD($\xi = 0.5, \beta = 10000$)

Sur le graphique de gauche qui resseme les 10 000 simulations, il n'est pas évident de situer un seuil. Il est tout de même visible que plus le seuil est bas plus l'estimateur se stabilise, mais l'objectif est de trouver le bon compromis entre stabilité et nombre d'observations basses. A droite le zoom ne conserve que les 150 plus grandes observations, et à partir de 50 observations l'estimateur semble se stabiliser. La propriété de normalité gaussienne implique la possibilité d'avoir des intervalles de confiance, qui dans ce cas se réduisent assez rapidement dès que le nombre d'observations augmente.

Pickands

L'estimateur

Contrairement à l'estimateur de Hill, l'estimateur de Pickands [Embrechts et al. \(1997\)](#) n'impose pas la positivité du paramètre de queue. La formule est la suivante :

$$\xi_{k,n}^{Pickands} = \left[\ln \frac{X_{(k)} - X_{(2k)}}{X_{(2k)} - X_{(4k)}} \right] \frac{1}{\ln 2}$$

Cet estimateur apparaît comme plus volatile que l'estimateur de Hill car il se base sur moins d'observations, 4 fois moins que la taille de l'échantillon. Il possède tout de même la propriété d'être

asymptotiquement gaussien avec des conditions similaires à l'estimateur de Hill, qui sont $k \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ et $m/n \rightarrow 0$, et la convergence en loi donne :

$$\sqrt{k} (\xi_{k,n}^P - \xi) \xrightarrow{L} N \left(0, \xi^2 \frac{(2^{2\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1) \ln 2)^2} \right)$$

L'estimation graphique du paramètre de queue

Tout comme l'estimateur de Hill, il est possible de tracer les points de l'estimateur de Pickands pour chaque observation, qui donne le Pickandsplot.

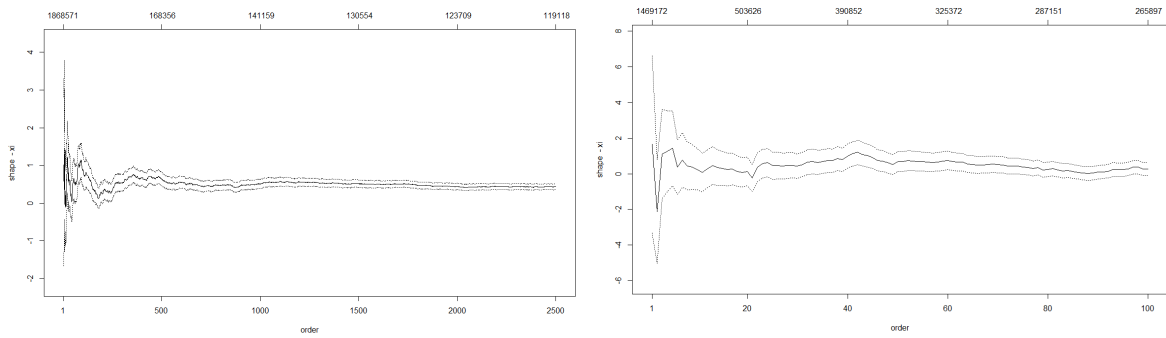


FIGURE 2.9 – Pickandsplot sur une GPD($\xi = 0.5, \beta = 10000$)

Pour les mêmes caractéristiques que le Hillplot, le Pickandsplot apparaît comme beaucoup plus volatile et ne se stabilise qu'autour de la 700e observation sur les 2 500 qui constituent le calcul de l'estimateur. Encore une fois la normalité asymptotique de l'estimateur permet d'obtenir des intervalles de confiance.

Dekkers-Einmal-DeHaan

Tout comme l'estimateur de Pickands, l'estimateur de Dekkers-Einmal-DeHaan [Deckers et al. \(1989\)](#) n'oblige pas que le paramètre de queue soit positif. Tout de même il est basé sur l'estimateur de Hill et sa formule est :

$$\xi_{k,n}^{DEdH} = \xi_{k,n}^{H(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\xi_{(k)}^{H(1)})^2}{\xi_{(k)}^{H(2)}} \right]^{-1}$$

avec

$$\xi_{k,n}^{H(r)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} [\ln X_{(i)} - \ln X_{(k)}]^r, r = 1, 2, \dots$$

Comme les estimateurs précédents et avec les mêmes hypothèses, l'estimateur DEDH est asymptotiquement gaussien et la convergence en loi plus lente que l'estimateur de Hill donne :

$$\sqrt{k} (\xi_{k,n}^{DEdH} - \xi) \xrightarrow{L} N(0, 1 + \xi^2)$$

Gerstengarbe

La dernière méthode d'estimation de seuil qui sera utilisée sera la méthode développée par Gerstengarbe et Werner. Elle se base sur la différence entre deux valeurs consécutives ordonnées. Soit

$\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ pour $i = 2, \dots, n$, l'idée est de regarder la série des Δ_i et si il existe un changement dans cette série, qui représente une entrée dans la région des extrêmes. En utilisant la version séquentielle du test de Mann-Kendall, l'objectif est de calculer la série suivante :

$$U_i = \frac{U_i^* - \frac{i(i-1)}{4}}{\sqrt{\frac{i(i-1)(i+5)}{72}}}$$

où $i = 1, \dots, n-1$ et $U_i^* = \sum_{k=1}^i n_k$ avec n_k le cardinal de $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ inférieures à Δ_k . La même série dans le sens décroissant U_d est calculée, et sur le graphique le croisement des deux courbes indique le seuil cherché. En général le ggplot est itéré plusieurs fois pour obtenir un seuil réaliste en effectuant les calculs avec troncature à partir du premier seuil calculé.

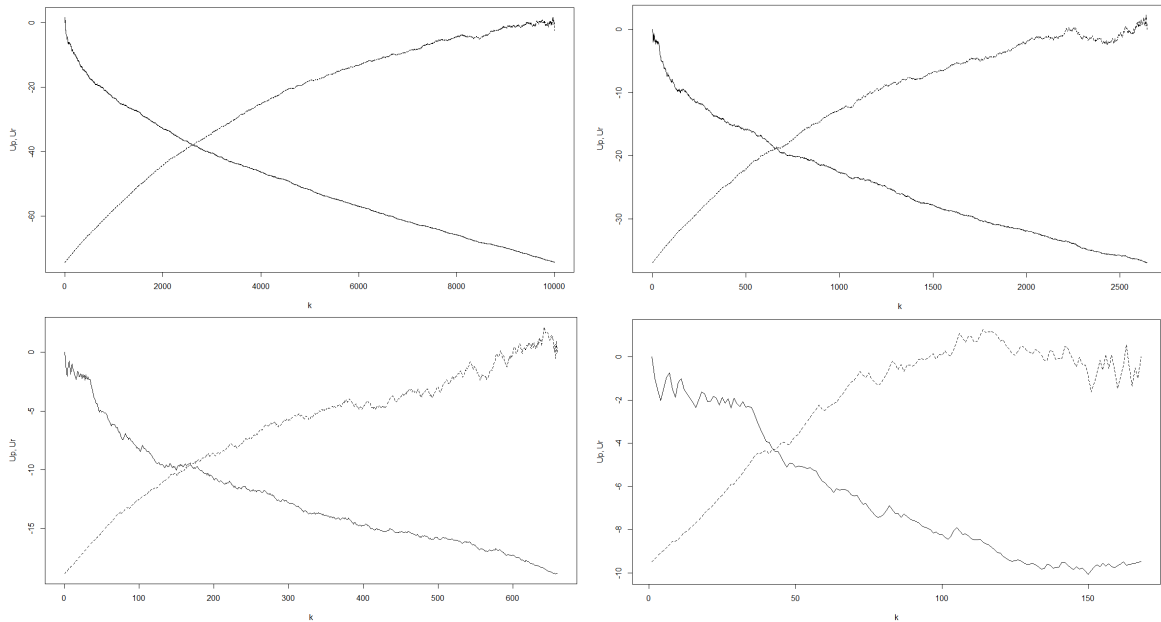


FIGURE 2.10 – Itérations de GG plot sur une GPD($\xi = 0.5, \beta = 10000$)

Ici le gerstengarbe plot a été itéré quatre fois sur une simulation de 10 000 valeurs suivant une GPD($\xi = 0.5, \beta = 10000$) avec des résultats ci-dessous :

Etape	1ère itération	2e itération	3e itération	4 itération
Statistique d'ordre	2 646	660	169	43
Seuil	118 767	160 328	234 524	359 254

TABLE 2.4 – Seuils obtenus par itération du Gerstengarbe plot

Ici la première itération correspond au quantile à 73,5% alors que la dernière itération est proche du quantile à 99,95%.

Cette méthodologie n'intègre pas d'estimation du paramètre de queue et ne sera donc pas la méthode privilégiée. Tout de même elle permet d'en apprendre plus sur le comportement des données.

2.3 Résultats obtenus et analyse

QQ-plot

Comme vu précédemment, les données corporelles sont composées de 13 466 sinistres avec des sinistres qui peuvent dépasser 10 000 000€. La première étape a été de tracer un QQ-plot pour se rendre compte du comportement de la queue de distribution des sinistres.

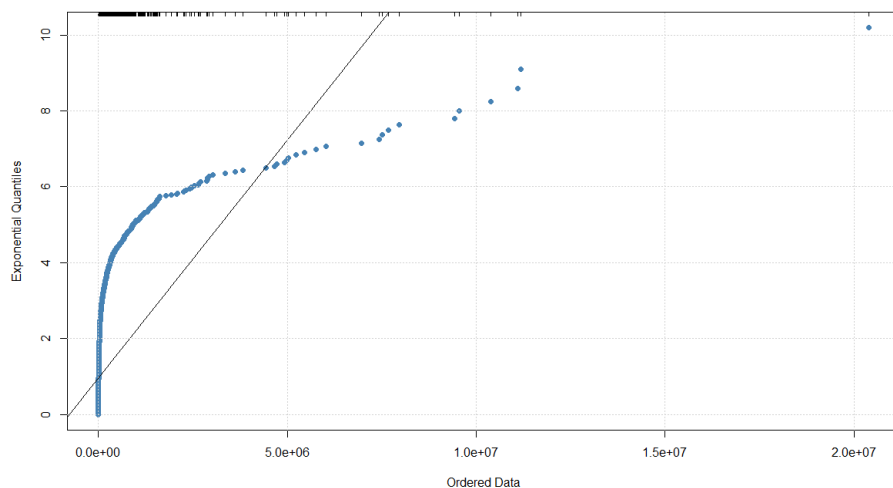


FIGURE 2.11 – QQ-plot exponentiel sur les sinistres corporels

Ce QQ-plot étant un QQ-plot exponentiel et la courbe possédant une forte concavité, il est possible de dire que la queue est beaucoup plus épaisse que celle d'une loi exponentielle. L'intuition serait que la queue des sinistres suit une loi à queue très épaisse, donc une loi de Pareto ou une loi GPD.

MEplot

La seconde étape de la réflexion implique l'étude de la Mean Excess Function, et plus particulièrement de son graphique le MEplot. L'idée est de trouver un ou plusieurs changements de pentes qui indiqueraient la présence d'un ou plusieurs seuils.

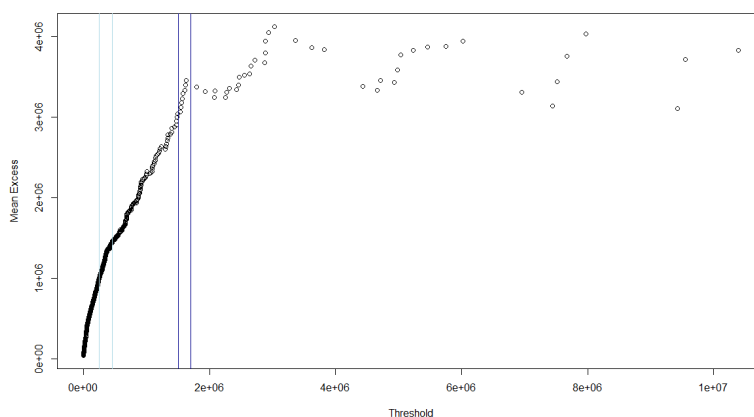


FIGURE 2.12 – MEplot sur les sinistres corporels

Sur ce graphique sont visibles deux changements :

- Un premier changement situé entre 250 000 et 450 000, qui semble tout de même plus proche de la borne supérieure.
- Un second changement entre 1 500 000 et 1 700 000

Un zoom a été effectué pour obtenir plus de précisions concernant le premier seuil en supprimant les observations supérieures à 1 700 000, qui est la borne supérieure du second seuil.

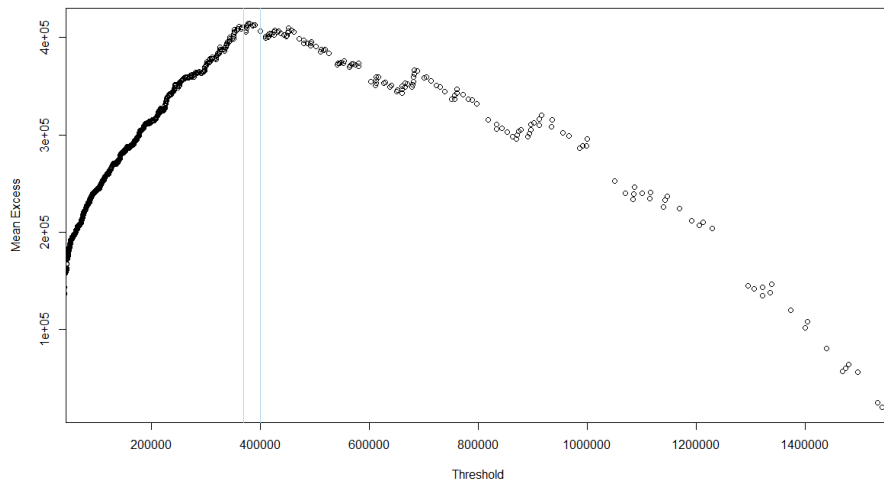


FIGURE 2.13 – MEplot sur les sinistres corporels, focus sur le premier seuil

Cette fois-ci la fracture est plus évidente et semble se situer entre 370 000 et 400 000.

Cette étude a permis de se rendre compte qu'il pourrait exister non pas un mais deux seuils des extrêmes, le premier compris entre 370 000 et 400 000, le second entre 1 500 000 et 1 700 000.

Gerstengarbe

Comme vu précédemment, le Gerstengarbeplot ne permet pas d'obtenir une estimation du paramètre de queue, mais seulement une image des comportements de la distribution des sinistres. Ici l'estimateur de Gerstengarbe a été itéré quatre fois et permet d'obtenir les résultats suivants :

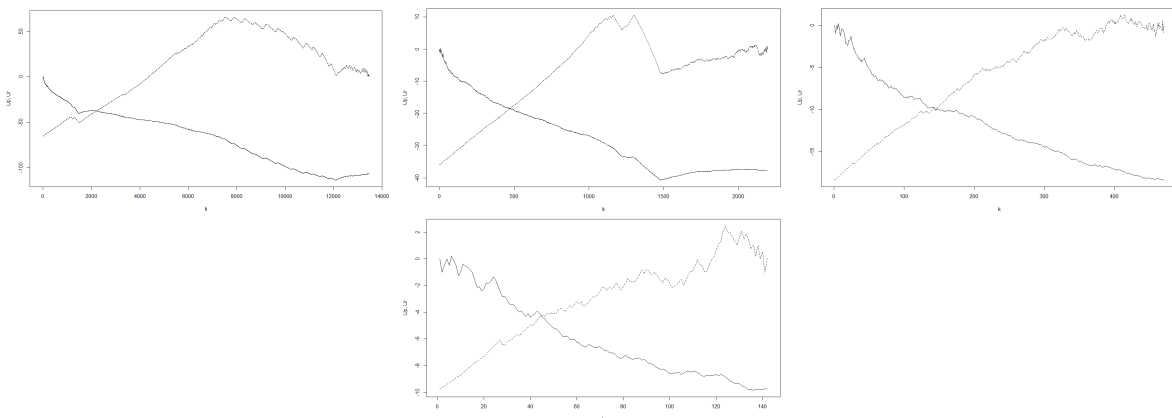


FIGURE 2.14 – Itérations de GG plot sur les données corporelles

et les seuils correspondants :

Etape	1ère itération	2e itération	3e itération	4 itération
Statistique d'ordre	2197	472	143	45
Seuil	21 659	153 066	613 135	1 613 169
Quantile	83,6%	96,5%	99%	99,7%

TABLE 2.5 – Seuils obtenus par itération du Gerstengarbe plot

Les quatre seuils obtenus ne correspondent pas tout à fait aux seuils trouvés avec le MEplot. En effet, les seuils à 21 659 et 153 066 semblent trop faibles. Le seuil à 613 135 est situé entre les deux seuils trouvés grâce au MEplot. Enfin seul le dernier seuil se rapproche du second seuil obtenu sur le MEplot. Malheureusement l'étude des gerstengarbeplot ne permet pas de conclure sur les seuils extrêmes.

Hillplot

Dans cette section les travaux s'effectueront grâce à l'estimateur de Hill défini auparavant, et du graphique associé le hillplot. L'objectif sera de trouver des zones de stabilité qui pourraient être des seuils de graves. Les études précédentes ont proposés deux seuils, le premier entre 250 000 et 450 000, le second entre 1 500 000 et 1 700 000, renforcé par la quatrième itération du gerstengarbeplot.

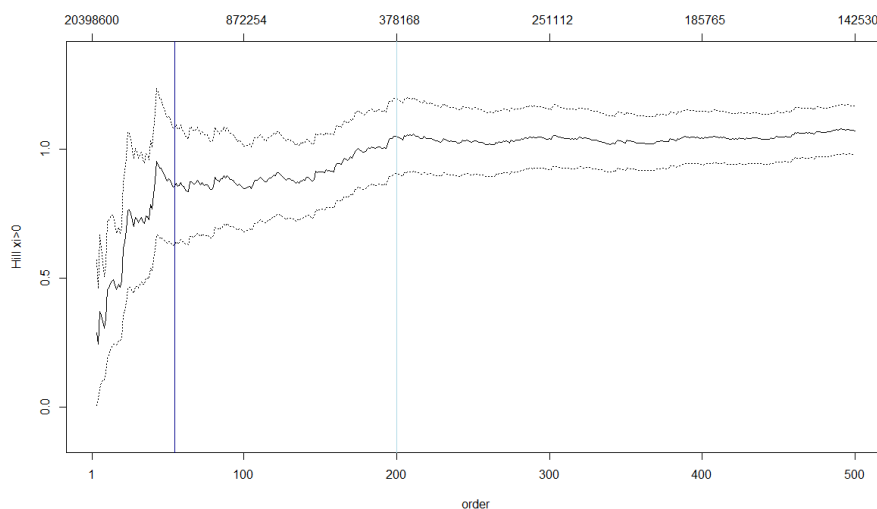


FIGURE 2.15 – Hillplot sur les sinistres corporels

Tout d'abord l'hypothèse $\xi > 0$ est validée, ce que est visible avec les intervalles de confiance. Une première stabilité semble trouvée aux alentours de la statistique d'ordre 50. Un second plateau de stabilité pouvant correspondre à un second seuil pourrait se trouver aux alentours de la statistique d'ordre 200. La suite sera de zoomer sur chacun des seuils pour plus de précision.

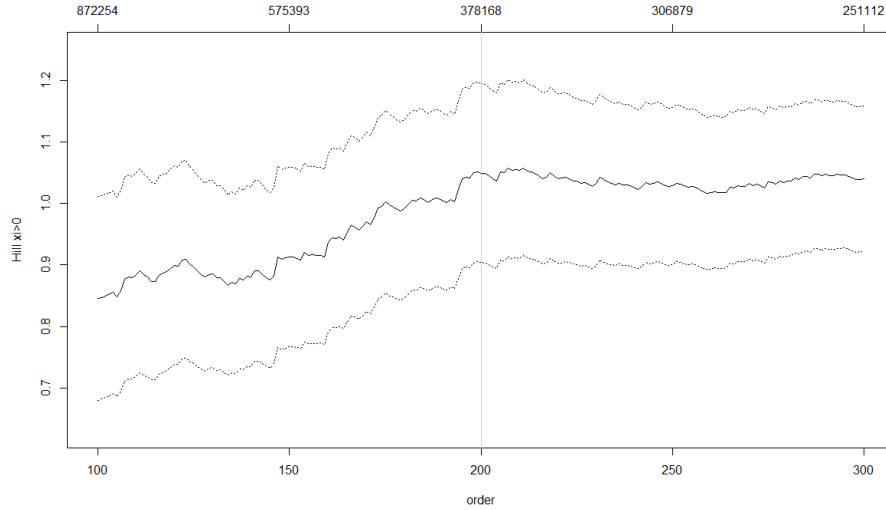


FIGURE 2.16 – Hillplot sur les sinistres corporels

Ce graphique zoome pour obtenir le seuil le plus faible. L'intuition vue ci-dessous semble validée et le seuil retenu sera donc pour la statistique d'ordre 200, pour une valeur de 378 168. De plus, des estimations pour le paramètre de queue sont disponibles. Pour le seuil trouvé, $\xi^{Hill,1} = 1,049$ pour un intervalle de confiance à 95% de $[0,903;1,194]$. il est à noter que ξ^{Hill} est donc supérieur à 1.

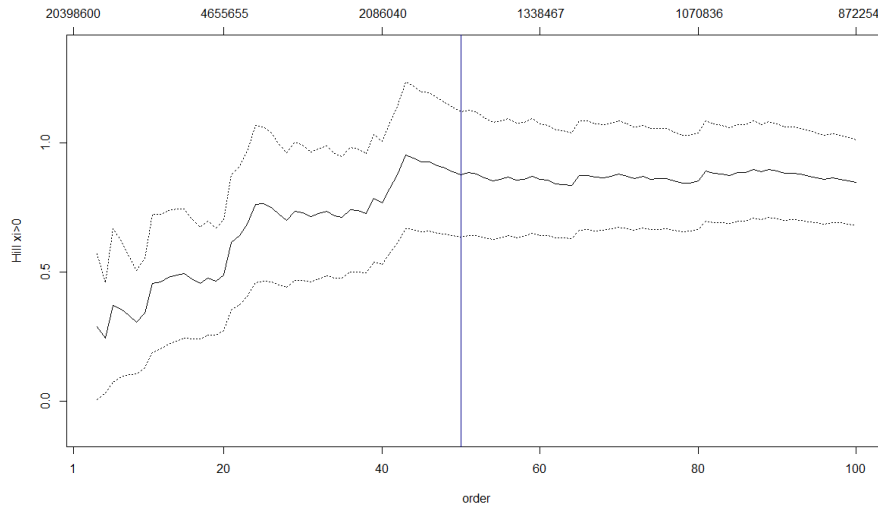


FIGURE 2.17 – Hillplot sur les sinistres corporels

Comme pour le premier seuil, le zoom confirme les impressions données par le hillplot et le second seuil serait situé pour la statistique d'ordre 50, pour une valeur de 1 542 396. L'estimation du paramètre de queue associé est de $\xi^{Hill,2} = 0,877$ pour un intervalle de confiance à 95% de $[0,634;1,120]$. L'intervalle est plus large que pour le premier seuil, ce qui s'explique par le plus faible nombre d'observations.

Deux seuils avec deux estimations du paramètre de queue différents viennent d'être déterminés, mais il reste une dernière étape concernant l'étude de l'estimateur de Hill. Le premier seuil qui se situe à la statistique d'ordre 200 avec $\xi^{Hill,1} = 1,049$ considère une distribution pour les 200 observations au-delà de ce seuil. Or il a été vu que le comportement des données change encore pour un seuil de 1 542 396 aux alentours de la 50e statistique d'ordre. Donc le seuil établi à 378 168 semble correct, mais il est nécessaire d'étudier le paramètre de queue en ne considérant pas les 50 plus fortes observations,

dans le cas où il existerait bien deux vrais seuils.

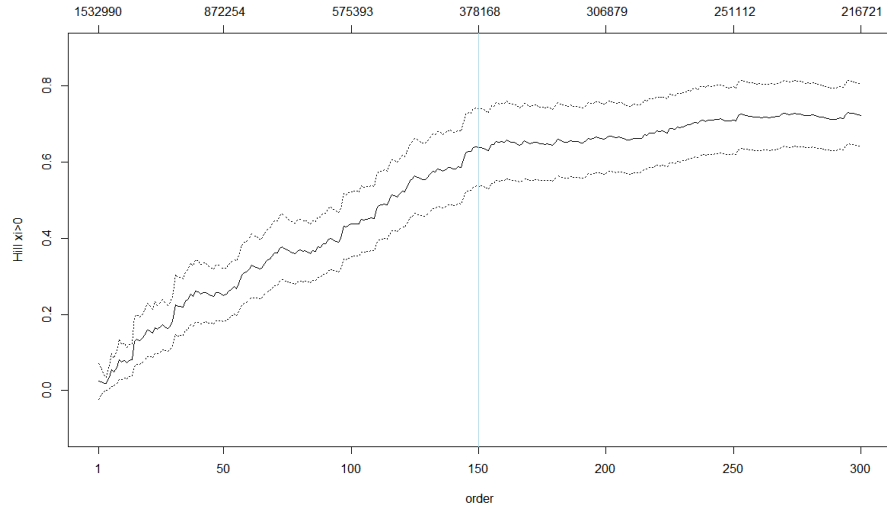


FIGURE 2.18 – Hillplot sur les sinistres corporels

Sur ce hillplot où ont été supprimées les 50 plus gros sinistres de la base, il semble que le seuil soit relativement similaire à celui trouvé précédemment. Cette fois il est obtenu que $\xi^{Hill,3} = 0,639$ pour un intervalle de confiance à 95% de $[0,536; 0,741]$

En conclusion, voici les seuils obtenus et les estimations correspondantes :

Seuil	Quantile	ξ^{Hill}	IC à 95%
378 168	98,5%	1,049	$[0,903; 1,194]$
378 168 tronqué à droite	98,8%	0,639	$[0,536; 0,741]$
1 542 396	99,6%	0,877	$[0,634; 1,120]$

TABLE 2.6 – Seuils obtenus grâce au différents Hillplot

La première ligne correspond au cas où il n'existerait qu'un seul véritable seuil, avec 200 observations dépassant ce seuil. Les 2 autres lignes en revanche appartiennent au cas où il existerait deux seuils, le premier à 378 168 avec 150 observations et le second à 1 542 396 où 50 observations dépassent ce seuil. Les deux cas seront étudiés lors de l'étape de l'adéquation des lois. L'estimateur de Hill étant l'estimateur le plus stable, les ξ^{Hill} trouvés seront désormais les paramètres de queue de référence et les estimations qui suivront seront ainsi comparées à celles-ci.

Pickands

Cette partie est réservée à la détermination de seuils par le prisme de l'estimateur de Pickands. Comme vu précédemment, les seuils et estimateurs du paramètre de queue ξ^{Hill} sont les valeurs de référence, et l'objectif est de comparer les estimations faites par l'estimateur de Pickands pour les seuils donnés qui sont de 378 168 et 1 542 396. Encore une fois il faudra se poser la question du paramètre de queue entre les deux valeurs de seuil si l'hypothèse de deux changements de distribution est vérifiée.

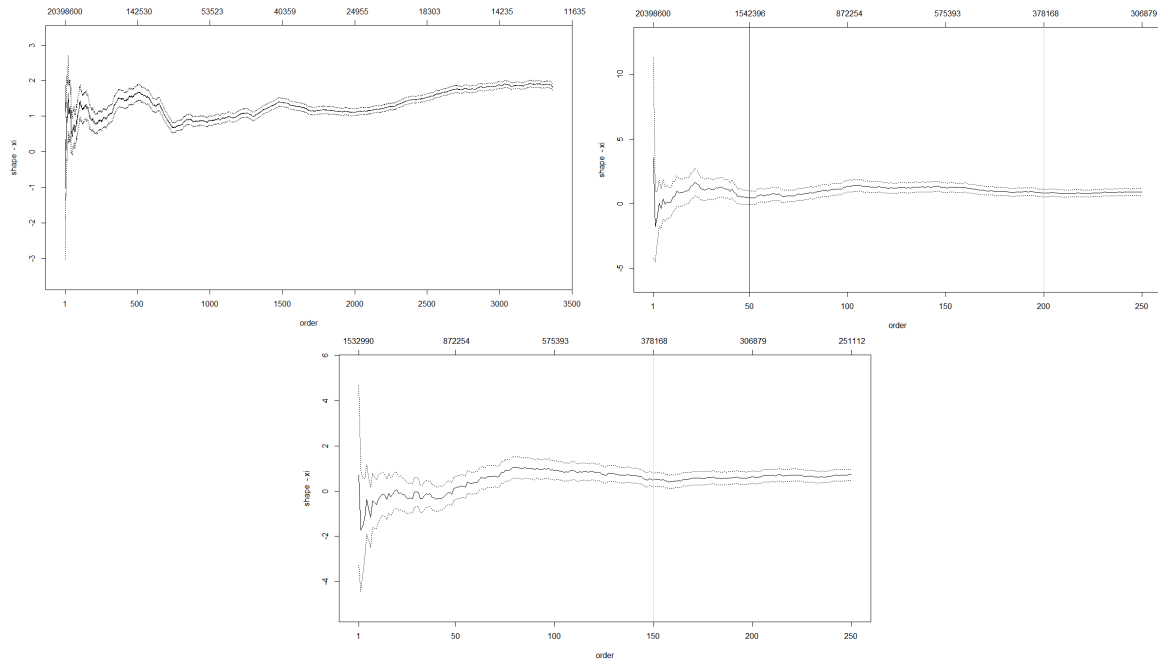


FIGURE 2.19 – Pickandsplot sur les sinistres corporels

Graphiquement il est possible de dire que les seuils trouvés auparavant correspondent encore à des plateaux de stabilisation du paramètre de queue. Il reste à déterminer si les valeurs des estimations sont proches entre elles.

Seuil	Quantile	$\xi^{Pickands}$	IC à 95% Pickands	ξ^{Hill}	IC à 95% Hill
378 168	98,5%	0,805	[0,518 ; 1,092]	1,049	[0,903 ; 1,194]
378 168 tronqué à droite	98,8%	0,489	[0,178 ; 0,799]	0,639	[0,536 ; 0,741]
1 542 396	99,6%	0,44	[-0,094 ; 0,973]	0,877	[0,634 ; 1,120]

TABLE 2.7 – Comparaison des estimateurs de Hill et de Pickands

Malheureusement aucune des estimations effectuées par l'estimateur de Pickands pour une valeur de seuil similaire n'appartient à l'intervalle de confiance à 95% de l'estimateur de Hill correspondant. En revanche, l'estimateur de Pickands étant moins stable que celui de Hill, ses intervalles de confiance à 95% sont plus larges et il est possible de se questionner sur l'exactitude des estimations. Pour la suite seront conservées les estimations de Hill, pour des seuils arrondis à 378 000 et 1 540 000

2.4 Méthodologie d'adéquation de lois de sévérité

Avant de définir les lois qui détermineront les sinistres au-delà des seuils, il est important de détailler la méthodologie d'adéquation des lois de sévérité.

2.4.1 Nombre de lois

Les travaux seront menés sous deux angles pour tester la meilleure adéquation :

- Une adéquation à deux lois, avec une distribution pour les sinistres à partir de 378 000 et une seconde pour les sinistres au-delà de 1 540 000.
- Une adéquation à une unique loi, pour les sinistres au-delà du premier seuil trouvé de 378 000.

2.4.2 Lois testées

Pour ces 2 cas qui regroupent trois adéquations, l'idée est de tester les lois classiques utilisées en assurance non-vie dans le cadre des sinistres graves. Ici 4 lois seront proposées : Les lois Log-normale, de Weibull, Pareto tronquée à droite et GPD. Ces choix sont motivés par le fait que ces sont des lois usuellement testées par le modèle interne dans ses estimations.

2.4.3 Tests d'adéquation

Afin de vérifier la qualité d'adéquation des différentes lois, plusieurs contrôles seront avancés pour aider au choix. Les deux premiers présentés concernent des tests graphiques, et les deux suivants seront des tests statistiques.

Fonctions de répartition cumulées

Le premier test graphique est le test de comparaison des fonctions de répartition cumulée. En traçant la loi empirique ainsi que la loi à tester, il sera possible de déterminer la qualité d'adéquation. Si le tracé de la distribution modélisée est au-dessus de la répartition empirique, cela signifie que la calibration sous-estime la distribution empirique. A l'inverse la calibration va sur-estimer si le graphique de la répartition modélisée est en-dessous. Si les deux tracés sont superposés alors l'adéquation est bonne.

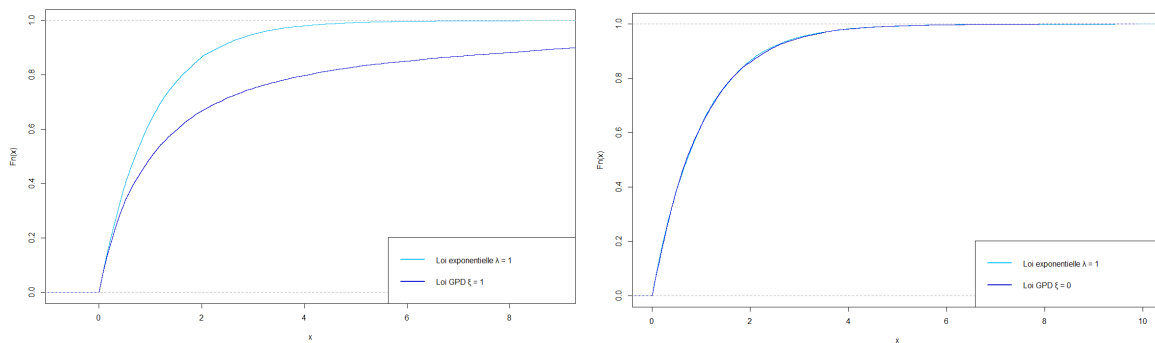


FIGURE 2.20 – Graphique de fonctions de répartition cumulée

Les deux graphiques ci-dessus montrent l'adéquation d'un échantillon suivant une loi exponentielle par une loi GPD de paramètre de queue respectivement $\xi = 1$ et $\xi = 0$. Sur le premier graphique la loi GPD sur-estime complètement la distribution, contrairement au second graphique où la loi GPD semble parfaitement adéquate. Une loi GPD de paramètres de queue et de forme nuls étant une loi exponentielle, les résultats sont logiques. Ce test graphique permet donc de vérifier les qualités d'adéquation.

QQ-plot

Le test graphique des QQ-plot est similaire au test des fonctions de répartition cumulée. En traçant les différents quantiles, il permet de mieux se rendre compte des écarts. Le principe est le même, une superposition indique que les quantiles sont proches. Si la courbe est concave alors la calibration sous-estime la loi empirique et à l'inverse si cette courbe est convexe alors la loi modélisée sur-estime la loi empirique.

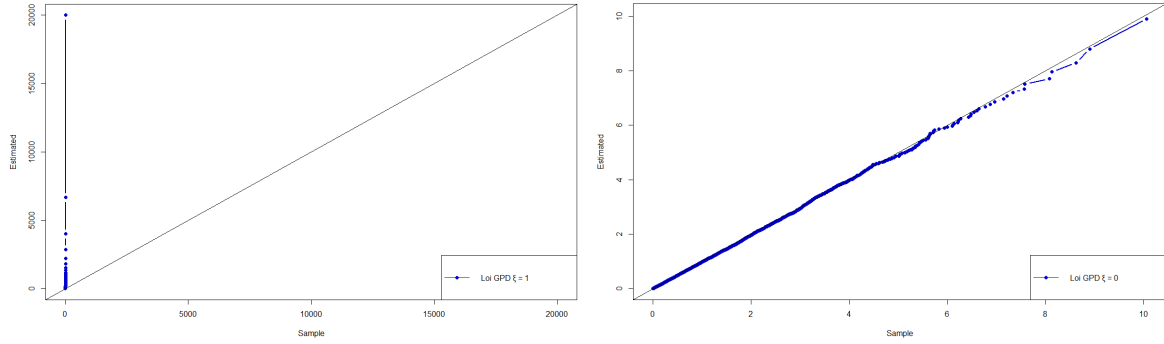


FIGURE 2.21 – QQ-plot entre loi empirique et loi estimée

Les exemples sont les mêmes qu'à la section précédente, les résultats sont donc similaires. Il est visible que sur le premier graphique la courbe est extrêmement convexe, tandis que sur le second les points sont alignés sur le tracé de référence.

Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test statistique de Kolmogorov-Smirnov [Kolmogorov \(1933\)](#) permet de déterminer si deux échantillons suivent une même loi. Basé sur les deux fonctions de répartition respectives, il teste l'hypothèse H_0 les deux distributions sont identiques. Soit n le nombre d'observations, et F et G les deux fonctions de répartition. La statistique de test est donnée par :

$$D = \max_{x \in [1, n]} |F(x) - G(x)|$$

Pour un seuil α et des nombres d'observations n_1 et n_2 , la valeur critique du test est donnée par :

$$D_\alpha = c(\alpha) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

avec $c(\alpha) = \sqrt{-0,5 \ln(\alpha)}$. Cela signifie que si la valeur de test est inférieure à la valeur critique alors l'hypothèse H_0 est validée et donc F et G ont la même distribution.

Soit l'exemple précédent avec l'échantillon exponentiel modélisé par une loi GPD de paramètre de queue respectivement $\xi = 1$ et $\xi = 0$. Tous les échantillons regroupent 10 000 simulations. La valeur critique pour un seuil à 95% donc $\alpha = 0.05$ est de $D_\alpha = 0,0173$. Les valeurs du test pour les deux adéquations sont les suivantes :

Loi	Statistique du test K-S
GPD $\xi = 1$	0.1974
GPD $\xi = 0$	0,0146

TABLE 2.8 – Statistiques du test de Kolmogorov-Smirnov

Le calibrage par une loi GPD avec $\xi = 0$ est donc accepté par le test, contrairement à l'adéquation par une loi GPD avec $\xi = 1$.

Test de Cramer-Von Mises

A l'instar du test de Kolmogorov-Smirnov, le test de Cramer-Von Mises [Anderson \(1962\)](#) teste l'hypothèse H_0 d'équivalence des distributions. La statistique de test est :

$$T = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(X) - G(X)]^2 dH_{n_1+n_2}(X)$$

Avec $(n_1 + n_2) \times H_{n_1+n_2}(X) = n_1 \times F(X) + n_2 \times G(X)$. Pour toujours le même exemple,

Loi	Statistique du test C-VM
GPD $\xi = 1$	0,31
GPD $\xi = 0$	0,0001717084

TABLE 2.9 – Statistiques du test de Cramer-Von Mises

L'objectif étant de minimiser au mieux la statistique de test, il est visible que l'adéquation par une loi GPD avec $\xi = 0$ est bien meilleure. Il est intéressant de noter que le test de Kolmogorov-Smirnov se base sur la valeur maximale de l'écart entre les deux distributions, tandis que le test de Cramer-Von Mises est lui basé sur la somme des différences. Le test K-S est donc plus sensible aux outliers comparé au test C-VM.

2.4.4 Détermination des paramètres

Afin de déterminer les paramètres des lois, deux méthodes seront testées : l'estimateur de la méthode des moments et l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Estimateur de la méthode des moments

Cette méthode s'appuie sur les moments d'ordre k tels que

$$\mu_k = \mathbb{E}(X^k) = \Phi(\theta)$$

avec Φ une fonction continue. L'estimateur est donc donné par :

$$\hat{\theta} = \Phi^{-1} \mu_k = \Phi^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \right)$$

Dans le cas d'un échantillon suivant une loi GPD, pour respectivement $\xi \neq 1$ et $\xi \neq 0, 5$, l'espérance et la variance sont :

$$\mathbb{E}(X) = u + \frac{\beta}{1 - \xi}$$

avec β le paramètre de forme et u le seuil.

$$\mathbb{V}(X) = \frac{\beta^2}{(1 - \xi)^2(1 - 2\xi)}$$

Après développement et grâce à la méthode des moments, les paramètres de queue et de forme ont les expressions suivantes :

$$\xi = \frac{1 - (\mathbb{E}(X) - u)^2}{2\mathbb{V}(X)^2}$$

et

$$\beta = \frac{\mathbb{E}(X) - u}{\frac{2(1 + (\mathbb{E}(X) - u)^2)}{\mathbb{V}(X)^2}}.$$

Estimateur du maximum de vraisemblance

Cette méthode est la plus appliquée car elle possède des propriétés intéressantes. En effet, l'estimateur de la méthode du maximum de vraisemblance est convergent et asymptotiquement efficace, car atteint la borne de Cramer-Rao. En revanche il nécessite un grand échantillon de données afin de vérifier la loi des grands nombres, sinon il peut se retrouver biaisé. La vraisemblance, pour un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité f et de paramètre θ , s'écrit :

$$L_n(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

Afin de maximiser cette vraisemblance, une transformation par le logarithme est effectuée et donne :

$$\ln(L_n(x_1, \dots, x_n, \theta)) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i))$$

Il faut donc dériver la formule précédente pour trouver la solution, tout en respectant qu'elle soit concave, c'est-à-dire que la dérivée seconde soit négative.

Dans le cas d'un échantillon i.i.d suivant une loi GPD, il faut maximiser la fonction suivante :

$$\ln(L_n(x_1, \dots, x_n, \xi, \beta)) = -\ln(\beta) - (1 + \frac{1}{\xi}) \times \sum_{i=1}^n w_i \times \ln(1 + \frac{\xi \times (x_i - u)}{\beta})$$

2.5 Résultats d'adéquation

Cette sous-partie regroupe les résultats d'adéquation selon le choix d'un ou deux seuils. Les graphiques les plus pertinents seront proposés. Il est important de garder à l'esprit que les estimations s'effectuent grâce à respectivement 200, 150 et 50 observations. Les adéquations peuvent donc se retrouver peu précises.

2.5.1 Adéquation selon un unique seuil

Le seuil défini était de 378 000 et l'objectif est de trouver la distribution la plus proche des données empiriques. Voici les différents paramètres obtenus selon les estimations :

Il est tout d'abord observable que pour l'adéquation d'une loi GPD, les trois paramètres de forme estimés par la MLE, par la MME ainsi que graphiquement par l'estimateur de Hill sont tous très éloignés les uns des autres. Il serait intéressant de se questionner sur les raisons de ces écarts. Une piste serait d'avancer le faible nombre d'observations. En effet il n'existe que 200 observations au-dessus du seuil de 378 000.

Distribution	Méthode d'estimation	Paramètres	
Log-normale	MLE	$\mu_{log}^{MLE} = 13,047$	$\sigma_{log}^{MLE} = 1,609$
	MME	$\mu_{log}^{MME} = 13,389$	$\sigma_{log}^{MME} = 1,204$
Weibull	MLE	$\xi_{Weibull}^{MLE} = 0,686$	$\beta_{Weibull}^{MLE} = 997\ 820$
	MME	$\xi_{Weibull}^{MME} = 0,587$	$\beta_{Weibull}^{MME} = 870\ 745$
RT-Pareto	MLE	$\alpha = 0,95306$	$PML = 10^9$
GPD	MLE	$\xi_{GPD}^{MLE} = 0,657$	$\beta_{GPD}^{MLE} = 569\ 003$
	MME	$\xi_{GPD}^{MME} = 0,347$	$\beta_{GPD}^{MME} = 880\ 972$
	MLE Hill	$\xi_{GPD}^{Hill} = 1.049$	$\beta_{GPD}^{Hill} = 266\ 644$

TABLE 2.10 – Paramètres des différentes distributions selon la méthode d'estimation

Voici les résultats des tests de Kolmogorov-Smirnov et de Cramer-Von Mises sur les différentes tentatives d'adéquation de loi :

Distribution	Méthode d'estimation	Kolmogorov-Smirnov	Cramer-Von Mises
Log-normale	MLE	0,065	3 869
	MME	0,121	13 681
Weibull	MLE	0,095	10 088
	MME	0,112	6 299
RT-Pareto	MLE	0,098	18 957
GPD	MLE	0,041	3 669
	MME	0,13	16 356
	MLE Hill	0,065	8 255

TABLE 2.11 – Résultats des tests de Kolmogorov-Smirnov et Cramer-Von Mises

Ces premiers résultats informent que l'estimation par l'estimateur de Hill est l'une des meilleures mais elle est surpassée dans les deux tests par l'estimation par la MLE pour la loi GPD. Les deux meilleures estimations sont effectuées grâce au maximum de vraisemblance d'une loi Log-normale et d'une loi GPD. Ces deux résultats sont étonnants, les deux distributions étant très éloignées. L'étape suivante est de comparer les graphiques de répartitions cumulées ainsi que les QQ-plot.

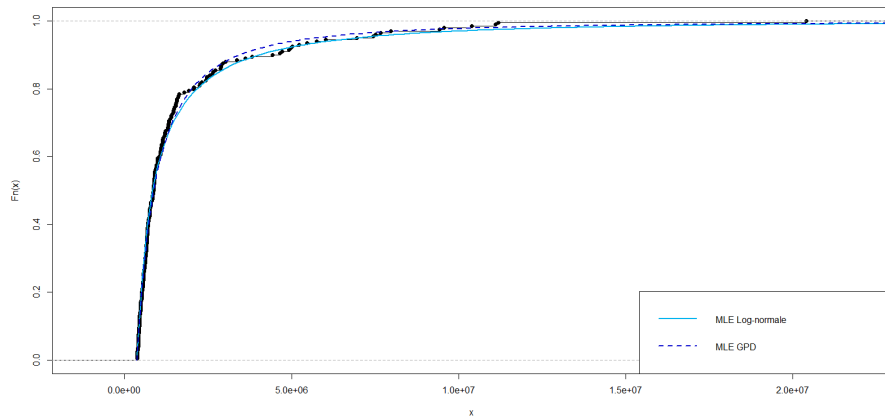


FIGURE 2.22 – Graphiques des fonctions de répartition cumulées d’une loi respectivement log-normale et GPD par rapport à la fonction de répartition empirique

Ici il est visible que le corps de la distribution est bien modélisé par chacune des deux lois. En revanche il semble que la queue soit sur-estimée par la loi log-normale ainsi que la loi GPD. Cette impression sera validée par l’étude des QQ-plot de ces deux distributions par rapport à la distribution empirique.

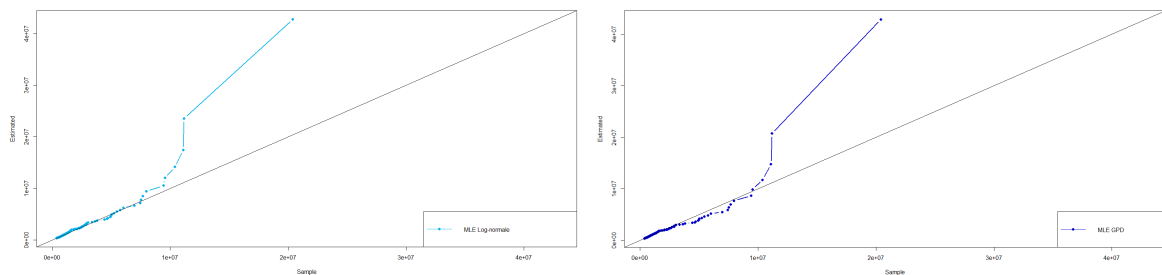


FIGURE 2.23 – QQ-plot des lois respectivement log-normale à gauche et GPD à droite par rapport à la fonction de répartition empirique

A la vue de ces QQplot, les remarques ci-dessus semblent vérifiées. En effet, pour la loi log-normale les ultimes quantiles sont sur-estimés, tandis que tout le reste paraît valide. En revanche pour la loi GPD l’adéquation est plus complexe. Certains quantiles extrêmes sont sous-estimés, puis les ultimes sont sur-estimés.

Ces 2 adéquations ne sont pas des plus satisfaisantes. A choisir, la meilleure serait la loi-lognormale mais la surestimation des quantiles extrêmes est dommageable. Il est donc intéressant de comparer ces travaux avec les adéquations si il existait deux seuils. L’intuition serait de dire que la qualité d’estimation est meilleure, car là où les quantiles extrêmes sont mal modélisés, une modélisation spéciale pour ces sinistres apporterait sans doute de meilleurs résultats.

2.5.2 Adéquation selon deux seuils

Au premier seuil de 378 000 est rajouté un second seuil à 1 540 000. Une modélisation par deux lois peut permettre d’observer une meilleure précision. Toutefois, il est essentiel de rappeler que les données, déjà peu nombreuses, seront fracturées en deux parties.

Entre le premier et second seuil

Cette sous-partie s'intéresse à la modélisation à partir du seuil de 378 000 jusqu'au seuil de 1 540 000.

Distribution	Méthode d'estimation	Paramètres	
Log-normale	MLE	$\mu_{log}^{MLE} = 12,401$	$\sigma_{log}^{MLE} = 1,267$
	MME	$\mu_{log}^{MME} = 12,639$	$\sigma_{log}^{MME} = 0,69$
Weibull	MLE	$\xi_{Weibull}^{MLE} = 1,172$	$\beta_{Weibull}^{MLE} = 411\,548$
	MME	$\xi_{Weibull}^{MME} = 1,29$	$\beta_{Weibull}^{MME} = 423\,006$
RT-Pareto	MLE	$\alpha = 1,565$	$PML = 10^9$
GPD	MLE	$\xi_{GPD}^{MLE} = 1,279 \times 10^{-7}$	$\beta_{GPD}^{MLE} = 391\,316$
	MME	$\xi_{GPD}^{MME} = -0,319$	$\beta_{GPD}^{MME} = 515\,956$
	MLE Hill	$\xi_{GPD}^{Hill} = 0,659$	$\beta_{GPD}^{Hill} = 295\,720$

TABLE 2.12 – Paramètres des différentes distributions selon la méthode d'estimation

Il est intéressant d'observer les valeurs obtenus grâce aux méthodes MLE et MME pour l'estimation du paramètre de queue de la loi GPD. Il se trouve que pour la méthode du maximum de vraisemblance $\xi_{GPD}^{MLE} = 1,279 \times 10^{-7}$ et pour la méthode des moments $\xi_{GPD}^{MME} = -0,319$. Le paramètre de queue est donc négatif, ce qui est problématique par rapport à l'hypothèse $\xi > 0$ qu'oblige l'application de l'estimateur de Hill. De même $\xi_{GPD}^{MLE} = 1,279 \times 10^{-7}$ estimé par la méthode des moments qui est presque égal à 0.

Les résultats des deux tests sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Distribution	Méthode d'estimation	Kolmogorov-Smirnov	Cramer-Von Mises
Log-normale	MLE	0,127	11 230
	MME	0,151	4 600
Weibull	MLE	0,05	732
	MME	0,067	835
RT-Pareto	MLE	0,169	17 233
GPD	MLE	0,089	2 127
	MME	0,033	203
	MLE Hill	0,127	10 889

TABLE 2.13 – Résultats des tests de Kolmogorov-Smirnov et Cramer-Von Mises

Encore une fois la modélisation grâce à l'estimateur de Hill n'est pas la plus précise. La raison est sans doute que l'hypothèse qui régit l'estimateur de Hill n'est pas vérifiée. En effet, le paramètre estimé par la méthode des moments pour une loi GPD obtient d'excellents résultats, les meilleurs par rapport aux autres lois. Il semble donc que le paramètre de queue soit réellement négatif et donc l'estimation par l'estimateur de Hill est fautive. Même si l'adéquation par une loi GPD par la méthode

des moments paraît implacable, une comparaison sera menée par rapport à la loi qui propose les seconds meilleurs résultats, c'est à dire la loi de Weibull dont les paramètres sont estimés grâce à la méthode du maximum de vraisemblance.

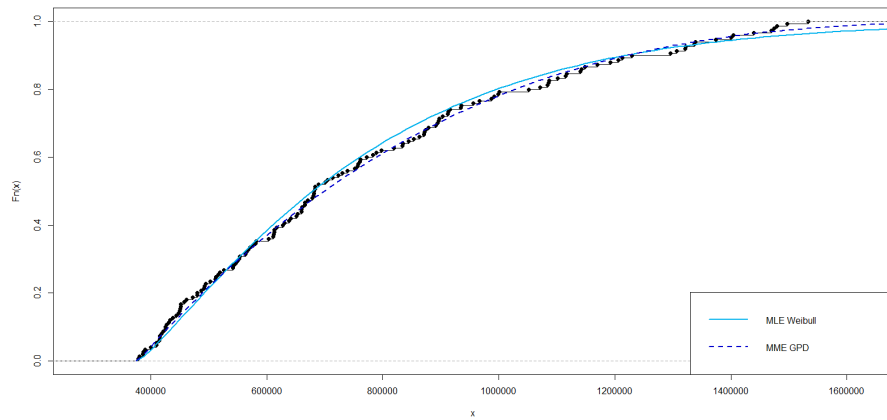


FIGURE 2.24 – Graphique des fonctions de répartition cumulées d'une loi respectivement de Weibull et GPD par rapport à la fonction de répartition empirique

Effectivement l'adéquation par la loi GPD apparaît comme meilleure, la loi de Weibull semble sous-estimer le corps de la distribution et sur-estimer la queue. Voici enfin les qq-plot respectifs pour valider ces hypothèses.

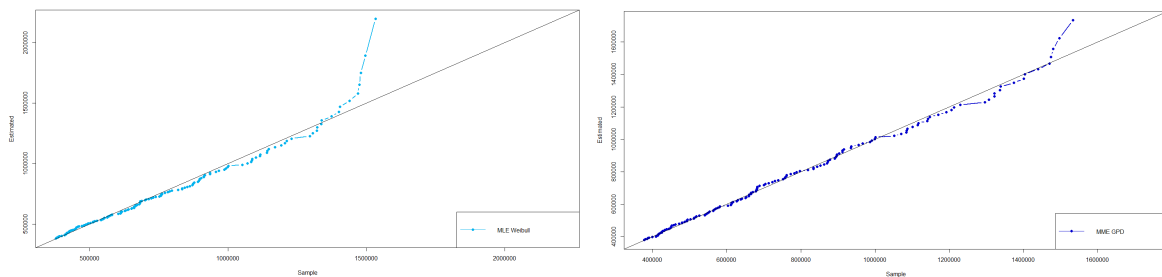


FIGURE 2.25 – QQ-plot des lois respectivement de Weibull à gauche et GPD à droite par rapport à la fonction de répartition empirique

Les QQ-plot confirment les impressions ci-dessus, avec une excellente adéquation de la loi GPD. La loi de Weibull reste une bonne option néanmoins.

Les travaux concernant l'adéquation d'une loi pour les sinistres compris entre les deux seuils ont révélé de très bons résultats lorsque effectuée par une loi GPD. Mais lors de l'étude avec un unique seuil la problématique concernait la queue de la distribution. Par conséquent le fit au-delà du second seuil sera une donnée majeure dans le choix de la modélisation par une ou deux lois.

A partir du second seuil

Cette partie signe la fin des travaux sur l'adéquation des données concernant les sinistres corporels graves. Seulement 50 observations composent la base, la précision des résultats risque d'être dégradée. Encore une fois les paramètres estimés pour les différentes lois sont rassemblés ci-dessous.

Distribution	Méthode d'estimation	Paramètres	
Log-normale	MLE	$\mu_{log}^{MLE} = 14,004$	$\sigma_{log}^{MLE} = 0,867$
	MME	$\mu_{log}^{MME} = 14,507$	$\sigma_{log}^{MME} = 0,924$
Weibull	MLE	$\xi_{Weibull}^{MLE} = 0,773$	$\beta_{Weibull}^{MLE} = 2\,674\,839$
	MME	$\xi_{Weibull}^{MME} = 0,864$	$\beta_{Weibull}^{MME} = 2\,841\,024$
RT-Pareto	MLE	$\alpha = 1,133$	$PML = 10^9$
GPD	MLE	$\xi_{GPD}^{MLE} = 0,195$	$\beta_{GPD}^{MLE} = 2\,486\,587$
	MME	$\xi_{GPD}^{MME} = 0,129$	$\beta_{GPD}^{MME} = 2\,664\,637$
	MLE Hill	$\xi_{GPD}^{Hill} = 0,877$	$\beta_{GPD}^{Hill} = 1\,626\,075$

TABLE 2.14 – Paramètres des différentes distributions selon la méthode d'estimation

Le paramètre de queue estimé grâce à l'estimateur de Hill est très éloigné de l'estimation par MLE et MME pour une loi GPD.

Distribution	Méthode d'estimation	Kolmogorov-Smirnov	Cramer-Von Mises
Log-normale	MLE	0,169	164 602
	MME	0,151	41 461
Weibull	MLE	0,082	11 123
	MME	0,09	8 831
RT-Pareto	MLE	0,13	98 779
GPD	MLE	0,104	12 691
	MME	0,106	13 113
	MLE Hill	0,118	93 176

TABLE 2.15 – Résultats des tests de Kolmogorov-Smirnov et Cramer-Von Mises

Encore une fois les résultats montrent que l'estimateur de Hill manque de précision pour ces données. Il serait intéressant d'en trouver la cause. En revanche les lois de Weibull et GPD présentent de bonnes statistiques de tests pour chacune des méthodes d'estimation, avec un avantage pour la loi de Weibull. Mais l'échantillon étant faible, il se peut qu'il existe un certain biais. Toutes ces lois seront donc gardées et étudiées grâce aux graphes de fonctions de répartitions cumulées et aux QQ-plot.

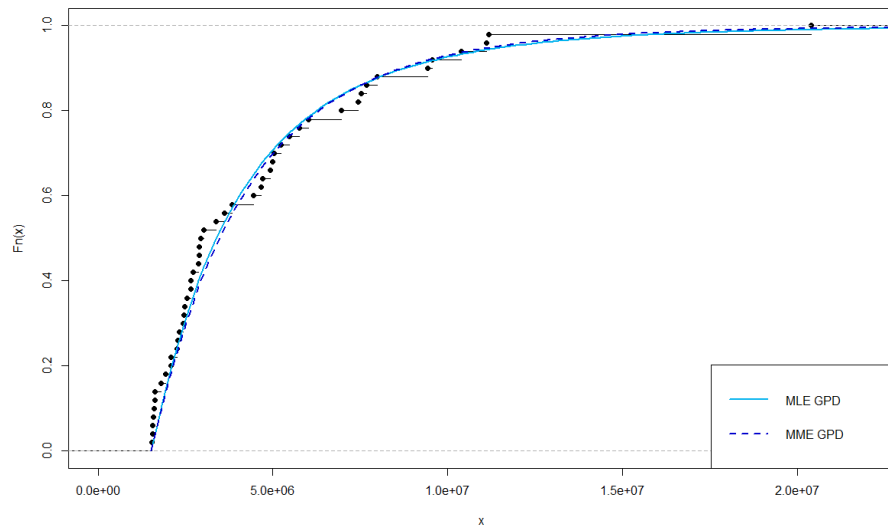


FIGURE 2.26 – Graphique des fonctions de répartition cumulées d'une loi GPD estimée respectivement par MLE et MME par rapport à la distribution empirique

Les deux lois estimées semblent bien correspondre et il n'est pas évident de les dissocier. Tout de même l'adéquation est rassurante malgré le peu d'observations disponibles, au nombre de 50.

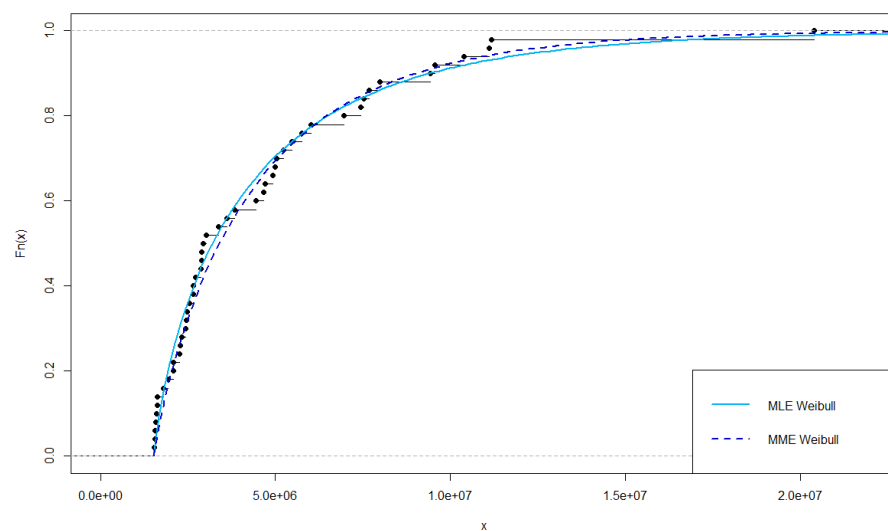


FIGURE 2.27 – Graphiques des fonctions de répartition cumulées d'une loi de Weibull estimée respectivement par MLE et MME par rapport à la distribution empirique

Les mêmes remarques faites sur les lois GPD s'appliquent sur les lois de Weibull estimées. Peut-être que l'étude des QQ-plot permettra de choisir la loi la plus adéquate.

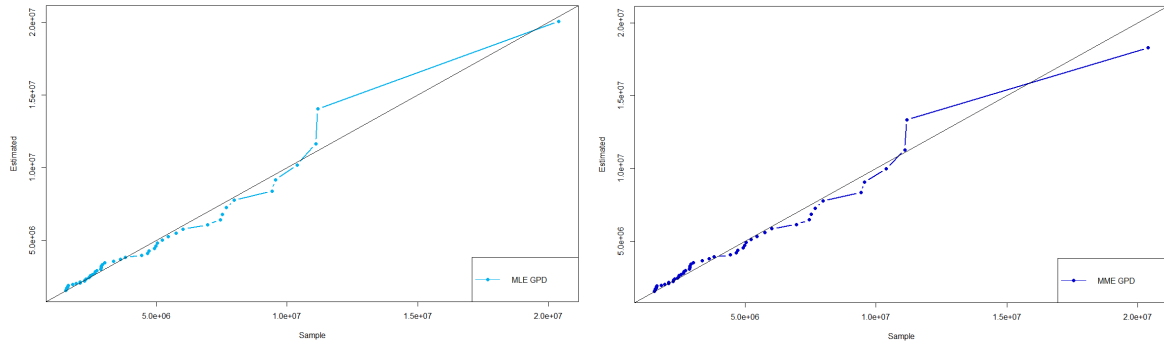


FIGURE 2.28 – QQ-plot de loi GPD estimée respectivement par MLE et MME par rapport à la fonction de répartition empirique

Les deux lois GPD semblent légèrement sous-estimer la distribution, et trouver des différences en dehors des quantiles extrêmes n'est pas aisé.

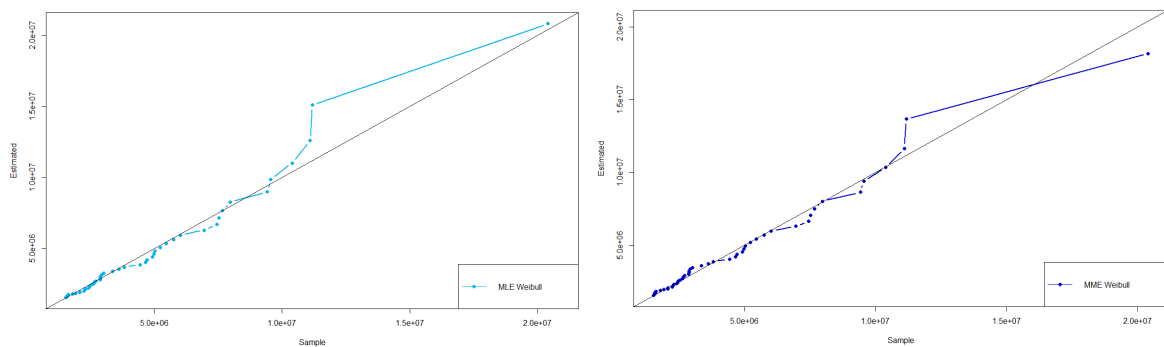


FIGURE 2.29 – QQ-plot de loi de Weibull estimée respectivement par MLE et MME par rapport à la fonction de répartition empirique

Malheureusement ces études ne permettent pas de conclure sur le choix d'une loi, ces quatre adéquations étant bonnes mais aucune ne se démarque. Le choix se portera sur la loi de Weibull estimée par la méthode des moments. Ce choix se justifie par le fait que la statistique de test de Cramer-Von Mises est la plus faible et la seconde plus faible sur le test de Kolmogorov-Smirnov. De plus cette distribution semble sous-estimer l'observation la plus forte, qui dépasse les 20M€. Ce sinistre apparaît comme un outlier et fausse l'estimation. Il serait peut-être intéressant de retravailler les données en omettant ce sinistre et l'intégrer en tant que scénario.

Synthèse des adéquations

Toutes les études présentées dans cette partie justifient le besoin de considérer les sinistres corporels à part. En effet, leur charge pouvant monter dans les extrêmes ne possède pas le même comportement que les sinistres relevant du dommage. Deux seuils ont été déterminés grâce à l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes, situés à 378 000 et 1 540 000. Afin de donner un peu de sens pratique à ces seuils obtenus, il a été demandé à un expert règlements sinistres corporels graves à quoi peuvent coïncider les sinistres ayant une charge supérieure à chaque seuil. Pour le seuil à 378 000, un exemple de sinistre peut être un polytraumatisme orthopédique invalidant sur le plan professionnel, avec l'introduction d'un préjudice professionnel pesant sur la charge du sinistre. Concernant les sinistres de charge supérieure à 1 540 000€, trois catégories existent : les amputations, les traumatismes crâniens graves et les atteintes médullaires (paraplégies, tétraplégies, ...). Une adéquation à une et deux lois ont été proposées, et il

se trouve que le calibrage entre les deux seuils est très convenable, donc le choix se porte sur deux adéquations qui sont résumées dans le tableau suivant :

Seuil	Distribution	Méthode	Paramètres	KS	C-VM
378 000 tronqué à droite	GPD	MME	$\xi_{GPD}^{MME} = -0,319$ $\beta_{GPD}^{MME} = 515\,956$	0,033	203
1 540 000	Weibull	MME	$\xi_{Weibull}^{MME} = 0,864$ $\beta_{Weibull}^{MME} = 2\,841\,024$	0,09	8 831

TABLE 2.16 – Résultats d'adéquation pour les deux seuils

Pourtant ces résultats ne paraissent pas intuitifs par rapport aux propriétés de queue. Il aurait été attendu une modélisation par loi GPD au-delà du seuil à 1 540 000, mais le faible nombre d'observations a pu biaiser les résultats. Malgré l'intérêt de ces seuils dans la modélisation, il est essentiel de reconsidérer la problématique de base. Ces seuils sont trop élevés dans le cadre du suivi de la rentabilité par programme dans le temps. Il faut donc retravailler les données en-dessous du seuil à 378 000 sur l'ensemble du portefeuille auto 4 roues afin d'en retenir un seuil global de grave qui permettra de proposer un taux de grave fixe.

Chapitre 3

Le taux de grave

Le chapitre précédent a permis de démontrer l'intérêt de l'application de la Théorie des Valeurs Extrêmes pour la détermination de deux seuils de graves pour les sinistres corporels, et de leur modélisation. Mais les deux seuils qui sont des seuils à 378 000 et 1 540 000 ne peuvent pas être conservés pour devenir des seuils globaux au sein de la direction. En effet ils sont trop élevés pour l'application du taux de grave dans le cadre du pilotage dans le temps de la rentabilité par groupement de contrats. Cette partie va donc essayer de retenir un seuil inférieur à ceux trouvés lors de l'étude des sinistres corporels en considérant l'ensemble des sinistres auto 4 roues inférieurs à 378 000. Tout d'abord sera effectuée une rapide présentation des données. Ensuite l'objectif sera de déterminer un nouveau seuil de grave à l'aide de la mean excess function. En découlera l'adéquation de loi pour les sinistres au-delà du seuil déterminé. Enfin, une fois le seuil global trouvé, les différentes modélisations seront mises bout à bout afin d'obtenir une modélisation globale et le taux de grave. Ce taux de grave théorique sera comparé au taux de grave empirique des données historiques ainsi que le taux de grave obtenu grâce au seuil déjà appliqué de 45 000.

Nouvelles données

La base de données utilisée est l'agrégation des sinistres corporels inférieurs à 378 000 déjà asifés et projetés à l'ultime et de tous les autres sinistres auto 4 roues, qui sont les sinistres dommages. Ces sinistres ont été inflatés selon l'indice SRA, qui est l'indice de référence pour estimer l'évolution des coûts de réparations automobiles. C'est aussi cet indice qui est utilisé par le modèle interne lors du processus d'asifage des sinistres dommages, ce qui en justifie l'utilisation dans ces travaux. Il est intéressant de noter qu'aucun sinistre projeté à l'ultime et inflaté ne dépasse les 378 000. Il était donc essentiel de considérer à part les sinistres corporels comme fait dans ce mémoire. La base est composée de 284 587 sinistres.

3.1 Détermination du nouveau seuil et adéquation de lois

3.1.1 Le seuil de grave global

Cette partie se penche sur le seuil de grave global. La méthode utilisée se base sur la mean excess function ainsi que son graphique le MEplot. Il sera recherché des changements de pentes qui justifient des modifications de comportement des données. Il a été choisi de ne considérer que le MEplot lors de cette étude contrairement aux travaux précédents sur les sinistres corporels graves. En effet il a pu être observé que les estimateurs tels que l'estimateur de Hill ou de Pickands ne permettaient pas

d'obtenir de meilleurs résultats sur des distributions à queues plus lourdes que la distribution des sinistres inférieurs à 378 000. Les lois GPD seront testées, mais uniquement grâce aux méthodes MLE et MME sur le paramètre de queue.

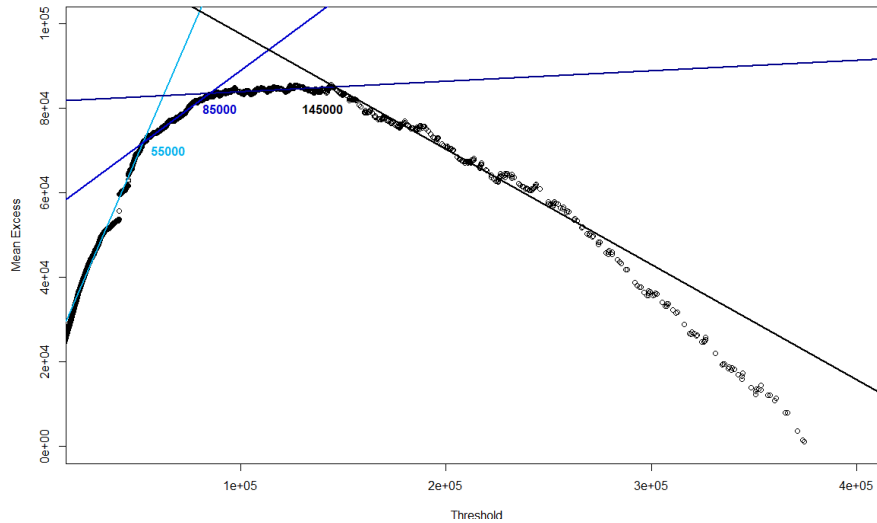


FIGURE 3.1 – MEplot sur les sinistres inférieurs à 378 000

Avant de considérer l'analyse du graphique, il est important d'explicitier la discontinuité de la courbe aux alentours de 40 000. Cela est dû aux sinistres corporels ouverts à un certain montant fixe, encore ouvert et non revus. Cette valeur étant toujours la même qu'importe le sinistre, ils seront tous asifés et projetés à l'ultime au même montant et cela implique une masse dans la distribution. Sur ce graphique sont visibles trois changements de pentes, à 55 000, 85 000 et 145 000. Ces trois seuils sont justifiables et méritent d'être étudiés :

- Le seuil le plus faible à 55 000 est très proche du seuil actuellement utilisé de 45 000, et peut justifier l'approche de ne pas réviser le seuil de grave trop souvent.
- Le second seuil à 85 000 peut ressembler au seuil à 45 000 qui aurait été revu grâce à l'inflation. Ce seuil justifierait le besoin de réajuster le seuil de grave.
- Enfin le dernier seuil à 145 000 est beaucoup plus élevé que les précédents, potentiellement trop. Mais il est le dernier visible et montre une réelle fracture dans la distribution des données. Il peut être supposé que la modélisation sera plus précise à partir de ce seuil malgré le nombre plus faible de sinistres

Ces trois seuils sont donc conservés pour la suite, et représentent les échantillons de sinistres suivants :

Seuil	Nombre de sinistres	Quantile
55 000	1 078	99,62%
85 000	849	99,77%
145 000	311	99,9%

TABLE 3.1 – Répartition des sinistres selon le seuil

Les quantiles peuvent paraître extrêmement élevés, mais cela est dû à la construction de la base de données. En effet, l'écrasante majorité des sinistres sont des sinistres dommages d'une charge très faible, qui n'interfèrent pas dans la détermination du seuil de grave.

3.1.2 Adéquation de la sévérité

La méthodologie ayant déjà été explicitée dans le chapitre 2 sur les données corporelles, les résultats d'adéquations sont directement disponibles dans le tableau ci-dessous :

Seuil	Distribution	Méthode	Paramètres		KS	C-VM
55 000	Weibull	MLE	$\xi_{Weibull}^{MLE} = 0.916$	$\beta_{Weibull}^{MLE} = 70\,502$	0,033	102
85 000	GPD	MME	$\xi_{GPD,1}^{MME} = -0.115$	$\beta_{GPD,1}^{MME} = 92\,604$	0,038	128
145 000	GPD	MME	$\xi_{GPD,2}^{MME} = -0.398$	$\beta_{GPD,2}^{MME} = 118\,814$	0,032	49

TABLE 3.2 – Résultats d'adéquation pour chaque seuil global

Sont à relever quelques informations de ce tableau :

- Concernant le seuil à 85 000, le choix fut complexe. En effet la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov était identique pour les distributions GPD estimée par MLE et MME ainsi que la distribution de Weibull estimée par MLE. De même les graphiques de fonction de répartition cumulée et QQplot étaient difficilement discernables. Mais le choix s'est porté sur la loi GPD par MME car la statistique du test de Cramer-Von Mises était la plus faible (128 contre deux fois 146) et que le maximum était le moins éloigné du maximum empirique qui est de 374 480 (452 751 contre 525 193 et 514 162).
- Ce choix de la GPD par MME pour le seuil à 85 000 implique que cette distribution est la distribution optimale pour deux des trois seuils, avec des paramètres de queue ξ négatif. Ces résultats justifient l'approche de ne pas considérer les estimateurs tels que l'estimateur de Hill, les données n'étant pas adaptées.

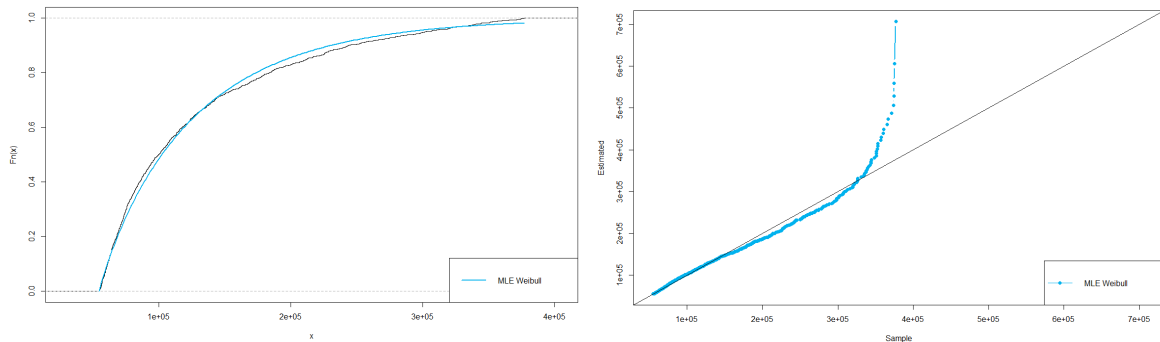


FIGURE 3.2 – Fonction de répartition cumulée et QQplot de la loi de Weibull estimée par rapport à la distribution empirique pour un seuil à 55 000

Pour les sinistres au-delà de 55 000, le calibrage semble plutôt bon jusqu'à environ 200 000, puis sous-estime la distribution ensuite. Enfin elle sur-estime bien trop les quantiles extrêmes. Cette adéquation n'apparaît pas comme optimale, mais elle reste convenable. Cela n'est pas étonnant vis à vis du comportement des données étudiées précédemment via le MEplot.

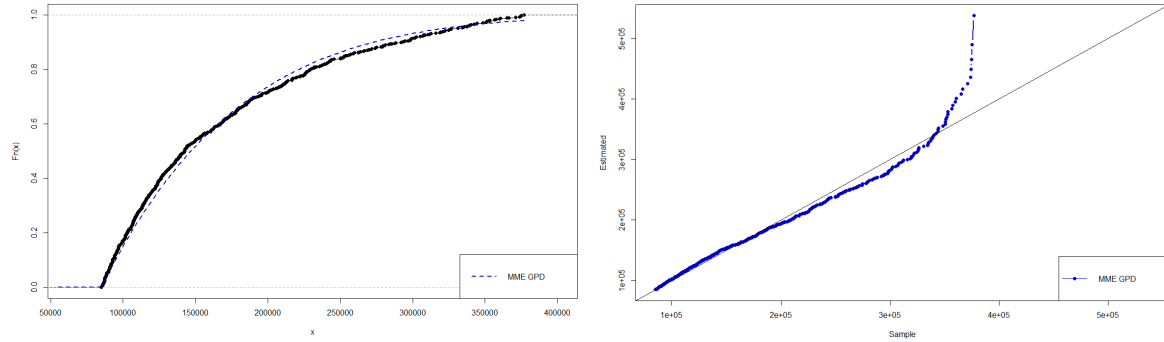


FIGURE 3.3 – Fonction de répartition cumulée et QQplot de la loi GPD estimée par rapport à la distribution empirique pour un seuil à 85 000

Encore une fois, les remarques ci-dessus s'appliquent pour les sinistres au-delà de 85 000, en étant toutefois légèrement tempérées, les quantiles semblant un peu plus proches.

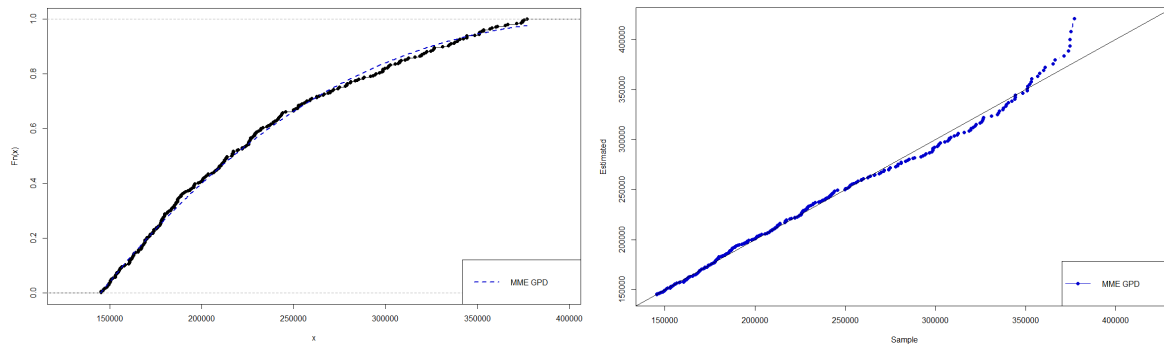


FIGURE 3.4 – Fonction de répartition cumulée et QQplot de la loi GPD estimée par rapport à la distribution empirique pour un seuil à 145 000

A la différence des deux calibrations précédentes, celle-ci est bien meilleure. Les sous-estimations et sur-estimations par la loi GPD sont très faibles. Cela s'explique par le fait que ce seuil correspond à l'ultime changement de comportements de données observable sur le MEplot, malgré le faible nombre de sinistres au-dessus du seuil à 145 000, au nombre de 311. Si l'unique choix du seuil s'effectuait par la précision de l'adéquation, le seuil à 145 000 serait le seuil global recherché. Ces derniers calibrages marquent la fin de l'étude de la sévérité pour l'ensemble des données. Il convient donc de considérer la fréquence d'occurrence des sinistres.

3.1.3 Adéquation de la fréquence

Le but étant de déterminer un taux de grave calculé grâce au rapport des charges des sinistres graves sur l'ensemble des primes, il est important de déterminer le nombre de sinistres considérés graves dans une année. Il a été choisi de ne déterminer qu'une unique fréquence pour chaque seuil de grave global, qui sont pour rappel les seuils obtenus précédemment à 55 000, 85 000 et 145 000. Cela signifie donc qu'est regardé si un sinistre est grave ou non par rapport au seuil global. Les seuils à 378 000 et à 1 540 000, essentiels dans la modélisation, n'impactent donc pas la fréquence.

L'idée est donc d'étudier le nombre de sinistres dont la charge dépasse le seuil choisi, et à partir de cette fréquence théorique en calibrer une loi pour modéliser un nombre de sinistres. Mais une étape préliminaire est essentielle avant de calibrer les lois. En effet il faut retraiter les nombres de sinistres pour refléter au mieux la situation en 2021. Une partie du retraitement a déjà été effectuée lors de la

projection à l'ultime des sinistres, qui a réhaussé le nombre de sinistres des années les plus récentes en simulant les clôtures.

L'étape supplémentaire concerne l'exposition du portefeuille de la direction des Partenariats. L'hypothèse sous-jacente est qu'un nombre de sinistres est en partie fonction de la taille du portefeuille assuré. Donc pour simuler le fait que les portefeuilles des années précédentes soient équivalents au portefeuille 2021 et que les fréquences soient donc adaptées, il a été choisi d'appliquer un coefficient à chacune des fréquences des années 2013 à 2020 pour rendre compte de l'évolution de l'exposition entre l'année considérée et 2021.

Le choix de tronquer l'étude à 2013 provient de la nouvelle législation vis-à-vis des radars sur les routes qui a eu un grand impact sur la fréquence. Le coefficient d'exposition peut être calculé de plusieurs manières différentes, mais du fait du peu de profondeur d'historique disponible, le choix s'est porté sur un coefficient basé sur les primes par année, en divisant les primes de 2021 par les primes de l'année choisie. Un coefficient supérieur à 1 signifiera que le portefeuille était moins important qu'en 2021 et donc le nombre de sinistres graves sera augmenté selon ce coefficient. A l'inverse si le coefficient d'exposition est inférieur à 1 alors l'exposition était plus grande à l'époque qu'en 2021 et le nombre de sinistres devra en être abaissé.

Année	Coefficient d'exposition
2013	1,138
2014	1
2015	0,975
2016	0,911
2017	1,079
2018	1,164
2019	1,175
2020	1,129

TABLE 3.3 – Coefficients d'exposition par année

Il est intéressant de noter que par rapport à la grande majorité des années, l'exposition de 2021 est plus forte, jusqu'à environ 17% de plus. Ces coefficients impliquent donc que la fréquence non revue sera légèrement plus forte. Désormais, il est question du nombre de sinistres par an revu grâce au coefficient d'exposition.

Année	Seuil à 55 000	Seuil à 85 000	Seuil à 145 000
2013	111,56	77,41	46,67
2014	114,05	74,03	45,02
2015	124,75	85,76	51,65
2016	129,39	74,71	42,82
2017	104,62	69,03	43,14
2018	75,66	52,38	29,10
2019	99,89	70,51	37,61
2020	56,42	30,47	19,18

TABLE 3.4 – Répartition des sinistres graves par année selon le seuil et revus selon l'exposition

Aussi Il est notable que l'année 2020 possède bien moins de sinistres graves, expliqué par le fait que l'année 2020 ait été touchée par le COVID-19 et que les confinements aient empêché les véhicules de circuler et donc d'entraîner des sinistres atypiques. Suite à la détermination du nombre de sinistres graves par an revu grâce aux hypothèses d'exposition vient la modélisation de ce nombre. Les deux lois communément utilisées dans ce cadre sont les lois de Poisson et Binomiale Négative. La loi de Poisson possédant comme propriété que son espérance et sa variance soient égales, ce sont les indicateurs qui seront étudiés pour déterminer le calibrage.

Seuil	Moyenne	Variance
55 000	102,05	612,28
85 000	66,79	304,81
145 000	39,40	111,19

TABLE 3.5 – Moyenne et Variance du nombre de sinistres selon le seuil

Il est clair que la variance est bien supérieure à la moyenne. Pour chacun des seuils la loi de fréquence appliquée sera une loi binomiale négative. La sévérité et la fréquence étant modélisée pour chaque seuil global, il est enfin temps de déterminer le taux de grave théorique.

3.2 Taux de grave théorique

Une fois les travaux sur la sévérité et sur la fréquence effectués, il faut tout assembler pour obtenir le taux de grave, dont voici les différentes étapes :

- Tout d’abord un nombre N de sinistres graves est tiré grâce à la distribution binomiale négative selon le seuil global, au choix 55 000, 85 000 ou 145 000.
- Pour chacun de ces N sinistres sera tiré une loi uniforme entre 0 et 1. Il est important de rappeler qu’il existe trois modélisations de sinistres graves : à partir du seuil global jusqu’à 378 000, de 378 000 jusqu’à 1 540 000 et au-delà de 1 540 000. Le tirage de la loi uniforme a donc un impact direct sur la sévérité du sinistre, c’est-à-dire qu’elle fait rentrer le sinistre dans l’un des trois types de sinistres. Les encadrements dépendent de la répartition des sinistres de chaque seuil. Par exemple pour un seuil global à 55 000 il y a 1 078 sinistres compris entre 55 000 et 378 000, 150 entre 378 000 et 1 540 000 et enfin 50 dépassant 1 540 000. Donc si la loi uniforme prend une valeur comprise entre 0 et $1\,078/1\,278 = 0.8435$ alors le sinistre sera modélisé par la loi correspondant au seuil global à 55 000.
- Une fois la loi uniforme tirée et le type de sinistre déterminé, un tirage de la loi correspondante est effectué.
- Lorsque les N sinistres ont été modélisés, ils sont agrégés pour obtenir une charge sinistre grave, qui sera divisée par les primes 2021 pour obtenir le taux de grave.
- Cette méthode est reproduite 10 000 fois afin d’effectuer un processus de Monte-Carlo et donc de converger vers un taux de grave le plus réaliste possible.

Voici donc les résultats obtenus pour chaque seuil global :

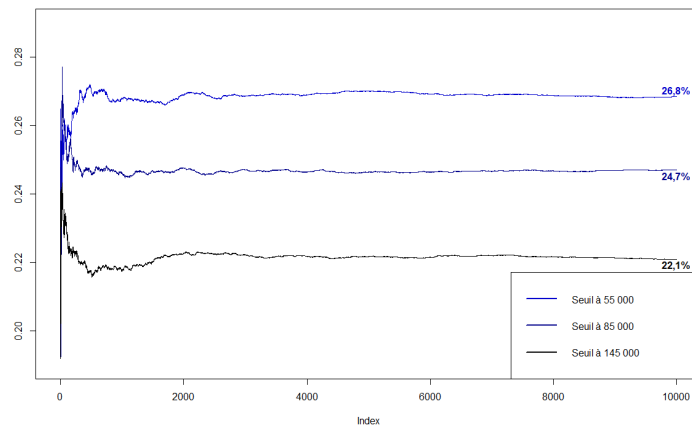


FIGURE 3.5 – Taux de grave selon le seuil de grave global

Ainsi il est observable que les taux de grave sont compris entre 22,1% et 26,8%, et que plus le seuil de grave est élevé, plus le taux de grave est faible, ce qui semble plutôt logique.

Il serait intéressant de comparer ces taux avec les taux historiques. L'intuition serait que les taux historiques soient en général plus faibles que les taux trouvés ci-dessus. En effet ces taux reflètent des sinistres inflatés et projetés à l'ultime, donc auront des charges plus importantes. Une autre explication serait que les primes qui divisent la charge de sinistres graves soient supérieures sur les années historiques en général, ce qui a été vu lors de la définition du coefficient d'exposition.

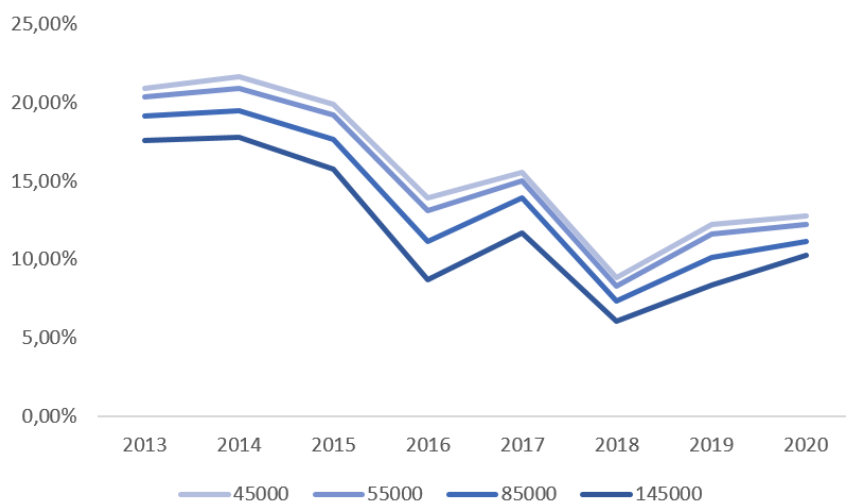


FIGURE 3.6 – Taux de grave historique selon le seuil de grave global

Effectivement les remarques précédentes sont vérifiées, où le taux le plus fort se situe en 2014 pour chaque seuil, avec respectivement 21,63%, 20,92%, 19,47% et 17,81% pour les 4 seuils dans l'ordre croissant. Il y a donc 5 points de pourcentage environ entre ces taux historiques maximum et les taux modélisés. Sous hypothèses d'inflation, de projection à l'ultime et d'exposition, ces valeurs semblent cohérentes. Les trois seuils à 55 000, 85 000 et 145 000 présentent chacun leur avantage, sous le prisme du taux de grave :

- Le seuil à 55 000 est le plus proche du seuil actuel et propose le taux de grave le plus haut. Le principe de précaution s'y appliquerait le mieux pour ainsi éviter de conserver de rares sinistres trop importants pour des petits programmes.
- Le seuil à 85 000 apparaît comme un bon entre-deux. En effet il n'est pas aussi extrême que le seuil à 145 000 mais permet de ne pas supprimer trop de sinistres pour des gros programmes avec le seuil à 55 000, pour une différence d'un point de pourcentage entre les deux taux de grave associés. De plus ce seuil semble bien correspondre à une prise en compte de l'inflation du seuil à 45 000 sur plusieurs années.
- Enfin, le seuil à 145 000 présente le taux de grave le plus faible, et donc une faible quantité de sinistres seraient omis du suivi de la rentabilité dans le temps. De plus ce seuil rend compte de l'ultime changement de comportement de données. Toutefois le seuil pourrait se révéler trop haut pour des programmes de taille modérée.

A la lumière de ces résultats, le choix se portera sur un seuil de grave à 55 000, associé à son taux de grave qui est de 26,8%.

Chapitre 4

Applications

Ce chapitre s'attache à présenter plusieurs applications concrètes et études d'impact basées sur les travaux des parties précédentes. Tout d'abord une analyse du suivi de la rentabilité sous différents angles pour quelques programmes typiques sera proposée. De plus une application d'un traité de réassurance pour l'ensemble du portefeuille Auto 4 roues y sera disponible. Enfin une étude d'impact concernera une potentielle sur-inflation liée au contexte actuel.

4.1 Analyse de programmes

L'objectif principal qui a motivé les différentes études de ce mémoire était d'obtenir le taux de grave global, indicateur de suivi de la rentabilité au sein de la Direction des Partenariats. Cette section aura donc pour but de fournir une analyse détaillée de la rentabilité de certains programmes. Pour mettre en lumière les avantages et les inconvénients de l'approche historique et de l'approche proposée dans ce mémoire un jeu de 4 portefeuilles fictifs est analysé. Par contrainte de confidentialité, ces portefeuilles sont effectivement fictifs mais restent réalistes des programmes gérés par les équipes. Ces exemples permettront de mettre en relief les biais de l'indicateur actuel et le risque de mettre en place des évolutions tarifaires inadaptées. Malgré leur caractéristiques propres, tous ces programmes partagent des hypothèses communes :

- Chaque programme est composé de 7 500 contrats. Ce nombre a été choisi pour rendre compte d'un programme de taille moyenne. De plus il a été décidé de garder le même nombre de contrats afin d'uniformiser l'analyse.
- Chaque contrat est assuré au tiers, pour une prime annuelle de 600€. Encore une fois cette valeur est arbitraire et uniformisée pour chaque programme.
- Un pourcentage de contrat est assuré tous risques, qui est une caractéristique qui peut différer selon le programme. En revanche la prime annuelle pour cette couverture est la même, qui est de 400€ annuellement en supplémentaire de la prime pour l'assurance au tiers.
- Des frais généraux sont présents pour chaque programme, et comptent uniformément pour 10% des cotisations perçues.

Il est important de prendre en compte une hypothèse cruciale pour ces travaux. En effet, ces portefeuilles ont été simulés comme étant de nouveaux programmes, c'est à dire avec un historique limité. Cette problématique est redondante au sein de la Direction des Partenariats et il semblait opportun d'en suivre la rentabilité et d'en analyser les comportements de ces tous nouveauxancements afin d'en établir les futures stratégies. Après avoir explicité les hypothèses communes, il est temps de présenter les caractéristiques de chaque programme.

Dénomination	Caractéristiques principales
Témoïn	Rentabilité neutre Taux de grave réalisé = Taux de grave global
Véhicules neufs	75% du portefeuille assuré en Tous Risques Taux de grave réalisé < Taux de grave global
Fortes commissions	Taux de commissions = 35% S/C hors grave faible
Bons conducteurs	Décote de 25% de la prime due au CRM Taux de grave réalisé < Taux de grave global
Dégradé	S/C hors grave fort Taux de grave réalisé > Taux de grave global

TABLE 4.1 – Caractéristiques principales de chaque portefeuille

Ces cinq programmes représentent donc une certaine pluralité dans l'activité de la Direction des Partenariats, où il est important de composer selon les différentes caractéristiques de chaque portefeuille. Le schéma ci-dessous permet de mieux rendre compte des différences entre chaque groupement de contrats.

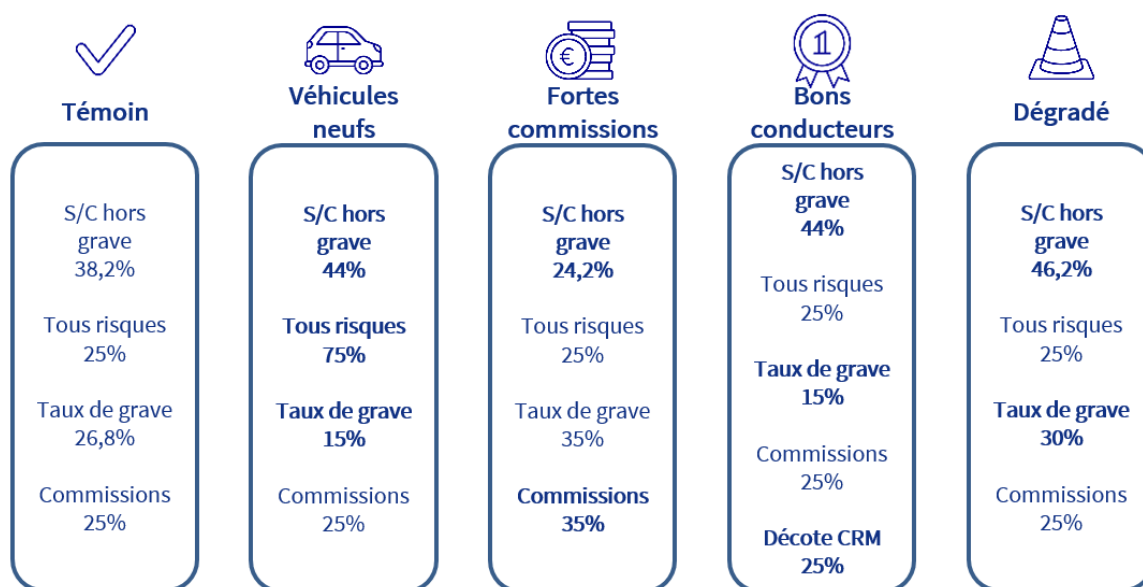


FIGURE 4.1 – Caractéristiques des différents types de portefeuille

Quelques commentaires sont à noter :

- Le portefeuille *Témoïn* est construit de sorte à ce que sa rentabilité soit neutre et donc pouvoir comparer tous les autres programmes à celui-ci.
- La spécificité du programme *Véhicules neufs* est qu'il est composé en plus grande partie que les autres de tous nouveaux véhicules. Les assurés veulent donc l'assurer en dommages et donc 75% du portefeuille est assuré en Tous Risques. Cela implique donc que ce programme est celui qui rapporte le plus de primes annuellement. Le taux de grave réalisé est assez faible, potentiellement explicable par le caractère plus prudent des conducteurs vis-à-vis de leur véhicule neuf mais aussi par la plus grosse quantité de primes.
- Lors des différents échanges avec les parties prenantes comme le courtier gestionnaire, il a été mentionné un pourcentage de commissions de 35% pour le portefeuille *Fortes Commissions*, supérieur aux 25% des différents programmes proposés. Cette négociation découle du très bon rapport sinistres sur cotisations hors grave, et donc du partage des gains équilibré avec le courtier.

- Le portefeuille *Bons conducteurs* est le programme où une décote de la prime est appliqué à hauteur de 25%, du fait du bon CRM de l'ensemble des assurés. Cela implique donc que ce programme rapporte le moins de primes annuellement. A noter que le taux de grave réalisé est faible, du fait du bon comportement des conducteurs.
- Enfin, le programme *Dégradé* se démarque par ses S/C et taux de grave forts, sans circonstances atténuantes. Sans doute que ce programme affiche une mauvaise rentabilité qu'importe la méthode qui sera utilisée.

Ces hypothèses impacteront donc les analyses qui vont suivre, et ces analyses s'effectueront sous plusieurs angles.

4.1.1 Analyse selon le ratio combiné

La première métrique qui sera employée pour analyser ces programmes et leur rentabilité sera le ratio combiné. Il permet d'étudier si les portefeuilles sont rentables selon leur sinistralité, mais aussi en prenant en compte des coûts additionnels. Dans le cadre de l'étude, le ratio combine est calculé comme suivant :

$$\text{Ratio combiné} = S/C + \frac{\text{Frais de gestion} + \text{Commissions}}{\text{Primes}}$$

$$\text{Ratio combiné} = S/C_{\text{Hors grave}} + \text{Taux de grave}_{\text{réalisé}} + \frac{\text{Frais de gestion} + \text{Commissions}}{\text{Primes}}$$

Ce ratio combiné est calculé pour être un indicateur en base 1 par rapport aux primes, c'est-à-dire qu'un ratio combiné supérieur à 100% indique un programme qui n'est pas rentable. A l'inverse un portefeuille présentant un ratio combiné inférieur à 100% sera donc un portefeuille rentable pour la Direction des Partenariats. Comme vu précédemment, le programme *Témoin* est calibré pour avoir une rentabilité neutre et donc un ratio combiné à 100%.

Le graphique suivant reprend donc le ratio combiné de chaque programme.

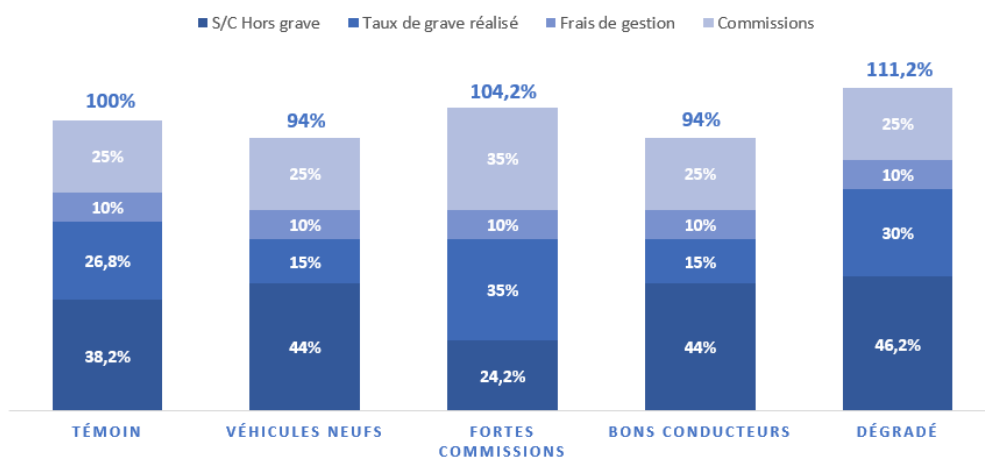


FIGURE 4.2 – Ratio combiné de chaque portefeuille

Il est donc visible que selon le prisme du ratio combiné, les programmes *Véhicules neufs* et *Bons conducteurs* sont rentables. Cela paraît intuitif, car les taux de graves réalisés sont très faibles et cela se justifie par le fait que d'après l'analyse vue au préalable c'est la garantie Responsabilité civile, à

travers des sinistres corporels responsable qui renferme la plupart des sinistres graves. Un portefeuille avec un taux de souscription de garantie tous risques plus importants, permet d'accumuler de la prime au titre des garanties dommages, mais cette garantie n'entraîne que très rarement des sinistres graves, expliquant le faible volume de sinistre grave en comparaison du niveau de la prime concernant le programme *Véhicules neufs*. De même, les assurés du portefeuille *Bons conducteurs* n'ont provoqué que très peu de sinistres graves, raison pour laquelle le taux de grave est faible. Le raisonnement est donc différent mais les résultats sont similaires.

A l'inverse, le portefeuille *Fortes commissions* présente une mauvaise rentabilité d'après le ratio combiné. Cela s'explique par un fort taux de grave réalisé dans l'année. Le taux de commissions est lui aussi haut mais contrebalancé et lié au S/C hors grave très faible. Enfin, le programme *Dégradé* porte bien son nom, et propose plus de 11% de pertes, explicables par un fort taux de grave réalisé et un haut S/C hors grave.

En conclusion, la métrique du ratio combiné rend bien compte de l'état de la rentabilité d'un programme. A la seule vue de ce ratio combiné et pour converger vers le programme *Témoin*, des modifications tarifaires seraient imaginables. Une diminution de la prime pour les programmes rentables et des majorations pour les programmes déficitaires.

Programme	Ratio combiné	Conclusions
Bons conducteurs	94%	Programme sur-tarifé
Véhicules neufs	94%	Programme sur-tarifé
Témoin	100%	Programme à l'équilibre
Fortes commissions	104,2%	Programme sous-tarifé
Dégradé	111,2%	Programme particulièrement sous-tarifé

TABLE 4.2 – Ratio combiné et ses conclusions pour chaque programme

Il est intéressant de noter que si est considérée la rentabilité conjointe des cinq programmes, alors le ratio combiné de l'ensemble est égal à 100,6%, et donc tous pris ensemble ces portefeuilles sont légèrement déficitaires, largement explicités par le programme *Dégradé*. Si la rentabilité globale est étudiée alors il pourrait suffire de n'agir que sur ce portefeuille-ci, tout en veillant à ne pas observer de dérives sur le reste des programmes.

Toutefois cette méthode d'analyse de la rentabilité par le ratio combiné possède une problématique majeure. L'approche par le ratio combiné permet une analyse factuelle de la rentabilité du programme mais en isolant, dans le ratio combiné réalisé, les sinistres graves réalisé on peut déjà se rendre compte de l'importance de ces sinistres dans la rentabilité de chacun de ces programmes. La question sous-jacente serait donc de déterminer quel serait le bon niveau d'évolution tarifaire à appliquer? Ces sinistres graves (ou leur absence) sont-ils la preuve que le programme est sous/sur-tarifé ou s'agit-il juste d'une année particulièrement atypique?

4.1.2 Analyse selon le ratio combiné écrêté mutualisé

Le ratio combiné écrêté mutualisé est une variante du ratio combiné classique, et se base sur le taux de grave global déterminé dans l'ensemble des travaux qui vaut 26,8%. L'idée est donc de suivre la rentabilité en lissant la sinistralité grave et donc obtenir un indicateur de rentabilité qui relativise une déviation anormale annuelle de la sinistralité extrême. La formule de calcul est donc très ressemblante de celle du ratio combiné classique :

$$\text{Ratio combiné écrêté mutualisé} = S/C_{\text{Hors grave}} + \text{Taux de grave}_{\text{global}} + \frac{\text{Frais de gestion} + \text{Commissions}}{\text{Primes}}$$

Comme pour le ratio combiné, le ratio combiné écrêté mutualisé est un indicateur en base 1 par

rapport aux primes. En reprenant les programmes précédents sous le prisme du ratio combiné écrêté mutualisé, voici la rentabilité qui en découle.

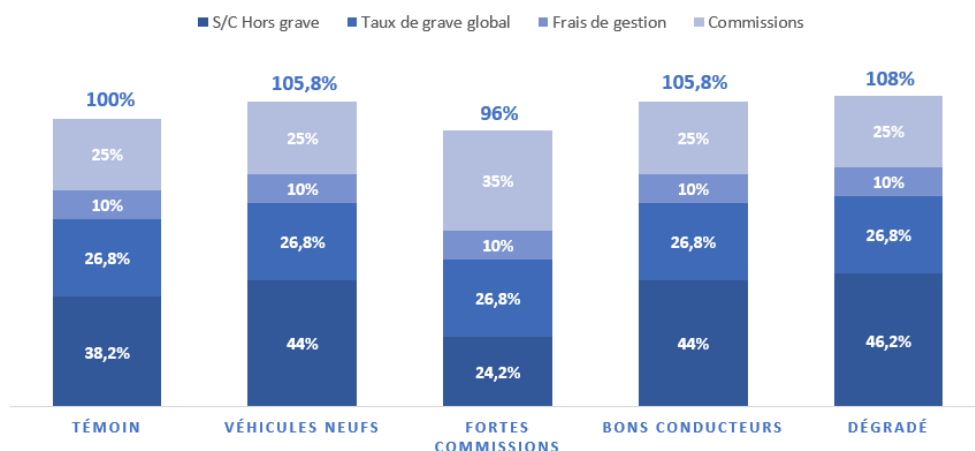


FIGURE 4.3 – Ratio combiné écrêté mutualisé de chaque portefeuille

D'après ce graphique, il semblerait que le seul portefeuille rentable soit le portefeuille *Fortes commissions*. Au contraire, les programmes *Véhicules neufs*, *Bons conducteurs* et *Dégradé* sont déficitaires de plus de 5%. A noter que la rentabilité conjointe des 5 programmes est de 103,1%, donc supérieure de 2,5 points par rapport à la rentabilité conjointe étudiée via le ratio combiné. Il en résulte donc que l'année est moins grave que la moyenne.

L'intérêt du ratio combiné écrêté mutualisé est qu'il neutralise une surdispersion de la sinistralité grave. Selon cet indicateur, les programmes seraient donc classés comme suivant d'après leur rentabilité :

Programme	Ratio combiné écrêté mutualisé	Conclusions	Rappel des conclusions ratio combiné
Fortes commissions	96%	Ressources du programme excédentaires	sous-tarifé
Témoin	100%	Ressources à l'équilibre	à l'équilibre
Véhicules neufs	105,8%	Ressources du programme déficitaires	sur-tarifé
Bons conducteurs	105,8%	Ressources du programme déficitaires	sur-tarifé
Dégradé	108%	Ressources du programme très déficitaires	Particulièrement sous-tarifé

TABLE 4.3 – Ratio combiné écrêté mutualisé et ses conclusions pour chaque programme

Les conclusions à tirer peuvent donc être différentes selon l'indicateur. Par exemple, le portefeuille *Véhicules neufs* propose un ratio combiné de 94% et un ratio combiné écrêté mutualisé de 105,8%. Bien qu'à première vue ce programme est très rentable pour l'année écoulée, et une évolution tarifaire à la baisse pourrait être envisagée pour réduire la quantité de primes et être plus compétitif. Cette bonne rentabilité est-elle à une sur-tarification ou simplement à la surdispersion de la sinistralité grave? S'agit-il d'un simple coup de chance? D'après le ratio combiné écrêté mutualisé cela serait effectivement le cas. Le programme nécessiterait en fait une forte majoration tarifaire. Pourtant avec du recul on peut se demander si le niveau du taux de grave utilisé sur ce programme est adéquat. La question est donc de savoir si le taux de grave réalisé est une anomalie ou réellement représentatif de la réalité et des caractéristiques propres du portefeuille. Cette problématique est majeure pour la bonne gestion du programme : un indicateur biaisé entraînant une prise de décision totalement inadaptée. Les décisions basées sur le ratio combiné peuvent entraîner des sur-réactions, et de fortes évolutions tarifaires à la hausse ou à la baisse d'une année sur l'autre sont aussi préjudiciables pour la bonne santé des programmes qu'une sur-tarification ou une sous-tarification constante liée à une mauvaise

interprétation du taux de grave. Et ceci est d'autant plus vrai sur un programme à l'historique réduit ou de volumétrie fiable. La suite des travaux va donc s'attacher à proposer un indicateur ou plutôt une approche qui permette de mieux prendre en compte les caractéristiques des programmes (compte tenu de ces deux contraintes)

4.1.3 Crédibilité des portefeuilles

Comme vu précédemment les indicateurs que sont le ratio combiné classique et le ratio combiné écrêté mutualisé ne rendent pas bien compte de l'atypisme d'un programme. En effet les sous-jacents de ces indicateurs de rentabilité sur la sinistralité grave que sont le taux de grave réalisé et le taux de grave global peuvent se révéler défaillants. De son côté le taux de grave réalisé peut être très fluctuant, tandis que le taux de grave global est calculé sur le portefeuille entier de la Direction des Partenariats, et ne peut donc pas correspondre à un programme particulier. Dans cette partie sera développé un nouvel indicateur qui utilisera les taux de grave réalisé et global de chaque programme en s'appuyant sur des notions de la théorie de la crédibilité en mettant l'accent sur deux caractéristiques, que sont la taille et l'historique du portefeuille. L'idée est que la taille du programme influe sur la fluctuation du taux de grave réalisé, où les assurés peuvent se mutualiser si le portefeuille est composé d'un nombre assez élevé de contrats. L'historique de la sinistralité est aussi une caractéristique majeure où le taux de grave réalisé sera plus crédible si l'historique est profond. Il est important de noter que dans ce mémoire seules des bribes de théorie de la crédibilité seront appliquées car l'angle utilisé ne permet pas une application complète. En effet cette étude ne porte pas sur des données réelles mais sur des portefeuilles qui représentent des programmes typiques de la Direction des Partenariats sans historique. Ainsi il n'est pas possible d'appliquer des modèles classiques de crédibilité comme le modèle de Bühlmann-Straub. Les travaux suivant s'efforceront donc à crédibiliser heuristiquement le taux de grave de chaque portefeuille grâce à son historique et sa taille.

Le nouveau taux de grave crédibilisé aura donc la formule suivante :

$$Taux\ de\ grave_{crédibilisé} = \alpha\ Taux\ de\ grave_{réalisé} + (1 - \alpha)\ Taux\ de\ grave_{global}$$

α se décompose en deux facteurs :

- α prendra une valeur initiale qui va varier selon la taille du portefeuille.
- l'évolution dans le temps d' α dépendra de l'historique du programme.

Taille du portefeuille

La première composante pour calculer α provient de la taille du portefeuille. L'hypothèse principale retenue serait qu'une plus grande confiance est accordée aux portefeuilles les plus fournis. En effet, la sinistralité grave est plus stable pour des programmes de grandes ampleurs par principe de mutualisation.

Afin de déterminer une valeur initiale d' α , la première idée fut de classer des tailles de programmes. La méthodologie appliquée a été de simuler des années de sinistralité grave pour en déterminer des taux de grave annuels, et ainsi en calculer l'écart-type.

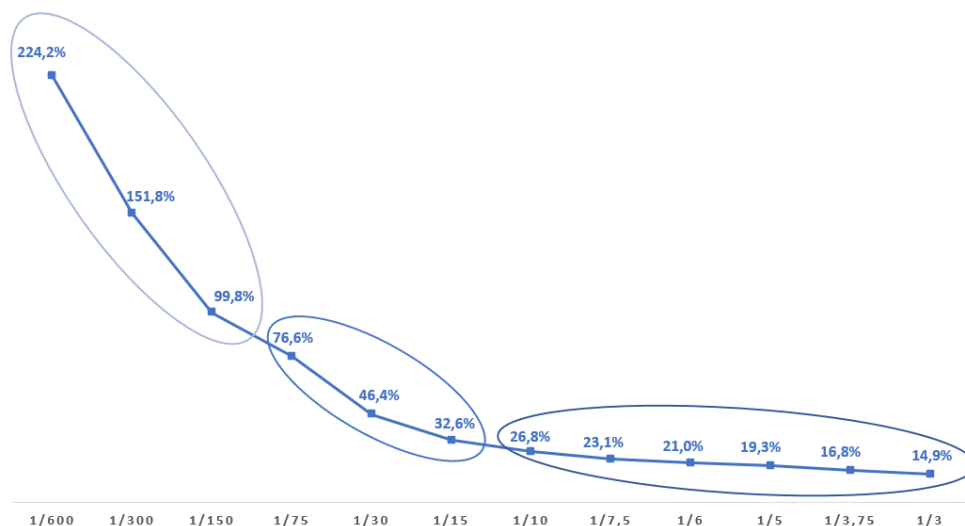


FIGURE 4.4 – Ecart-type des taux de grave pour différentes tailles de portefeuille

Sur ce graphique sont visibles les écart-types du taux de grave pour des tailles de programme allant de 1/600 à 1/3 du portefeuille Auto 4 roues de la Direction des Partenariats. Quelques clefs de lecture sont à apporter :

- Le choix de l'écart-type se justifie par le fait que cet indicateur montre la stabilité du taux de grave, ce qui est intéressant dans l'optique d'attribuer de la crédibilité au taux de grave réalisé.
- Il a été décidé de garder trois groupes qui ont du sens graphiquement : Les programmes inférieurs à 1/150 du portefeuille Auto 4 roues total, ceux compris entre 1/150 et 1/15 et ceux supérieurs à 1/15.
- Les portefeuilles les plus petits ont une variance bien trop grande et il est difficile de leur accorder une grande confiance initiale.
- Les portefeuilles moyens proposent une dispersion plus faible et feront donc partie du second groupe.
- Enfin, les programmes les plus gros sont ceux qui ont l'écart-type le plus faible, ainsi leur valeur initiale pour α sera la plus grande.

Pour déterminer quelle valeur initiale attribuer à chaque groupe de programmes, aucun calcul n'a été mené. Les valeurs initiales sont donc les suivantes :

Taille de programme	α initial
$< 1/150$	10%
$> 1/150$ et $< 1/15$	20%
$> 1/15$	40%

TABLE 4.4 – Valeur initiale d' α selon la taille du programme

Ces valeurs reflètent la confiance donnée à chaque portefeuille et ainsi à la stabilité et à la crédibilité de son taux de grave réalisé selon uniquement la taille du programme.

Historique du portefeuille

Cette sous-partie s'attachera à déterminer quelle évolution donner à α suivant l'historique de la sinistralité du programme. Tout d'abord, voici quelques hypothèses qui guideront les travaux :

- La progression du coefficient de crédibilité doit être de forme logarithmique. Effectivement, la différence d'information entre la seconde et la première année d'historique sera plus forte que celle entre la 8e et la 7e année.
- La progression sera la même pour les trois classes de taille de portefeuilles déterminées précédemment. La valeur initiale permet déjà de les différencier.
- L'objectif sera qu'un bout d'un certain temps, le taux de grave réalisé soit crédible à 100%.

Comme vu précédemment, aucun calcul sur les données ne peut être mené autour de la théorie de la crédibilité, ainsi l'évolution sera une évolution heuristique qui pourra être confrontée avec une étude construite sur des données sur lesquelles la théorie de la crédibilité pourra être appliquée. L'évolution dans le temps est disponible dans le tableau suivant :

Historique disponible	Evolution
Entre 1 et 4 ans	+15% par année
Entre 5 et 6 ans	+10% par année
Entre 7 et 8 ans	+5% par année

TABLE 4.5 – Evolution du coefficient de crédibilité en fonction de l'historique de la sinistralité

Résultats

Les deux sous-parties précédentes ont permis de déterminer α grâce à la taille et l'historique du portefeuille. L'intérêt était de donner une meilleure crédibilité aux plus grands programmes, et aux programmes qui ont l'historique le plus profond. Ainsi, voici la valeur de alpha pour chaque tranche de programme et son évolution dans le temps.

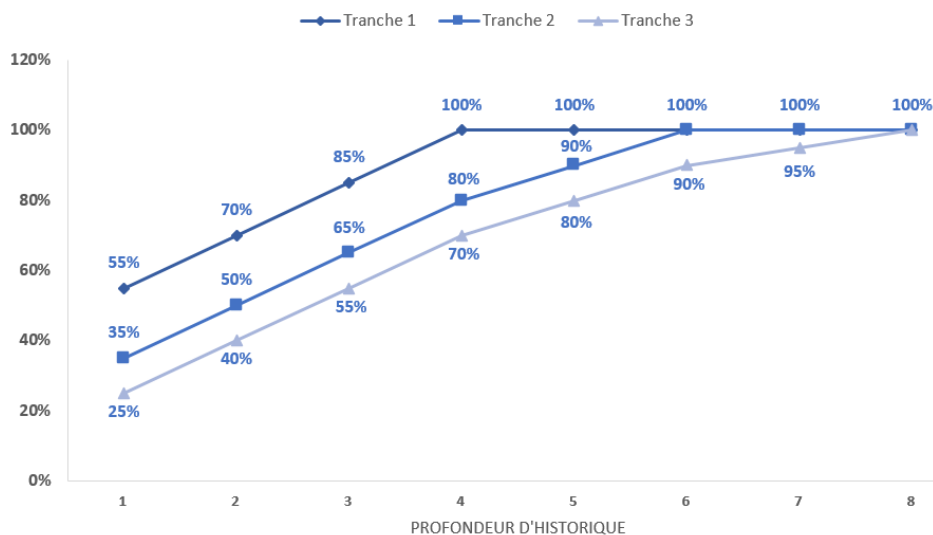


FIGURE 4.5 – Evolution d' α dans le temps selon la taille du programme

Ainsi le taux de grave crédibilisé peut apparaître comme un bon compromis en tant qu'indicateur du suivi de la rentabilité par rapport aux taux de grave global et réalisé. En reprenant les exemples des 5 programmes précédents et en implémentant le taux de grave crédibilisé, quels en seraient les résultats ? Par définition du cas d'étude, l'historique de sinistralité sera d'un an. De plus, la taille des programmes fera partie de la tranche 2, entre 1/15 et 1/150 du chiffre d'affaire Auto de la Direction des Partenariats, qui est la tranche la plus répandue. De par ces hypothèses, le coefficient de crédibilité sera de 35%.

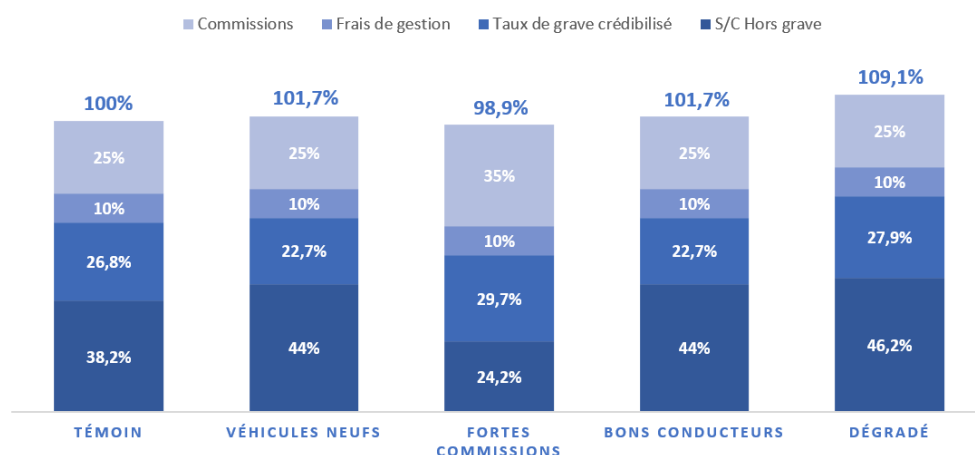


FIGURE 4.6 – Ratio combiné crédibilisé de chaque portefeuille

D'après ce graphique, le seul programme qui ressort clairement est le programme *dégradé* qui est fortement déficitaire. Mais l'utilisation du taux de grave crédibilisé permet de lisser la rentabilité des portefeuilles dans les cas où le risque est bien calibré mais l'instabilité de la sinistralité grave peut empêcher la bonne lecture de la santé du programme.

4.1.4 Rappel du contexte et conclusion

Le pilotage actuel des résultats techniques de la direction s'appuie sur la décomposition de la sinistralité grave et non grave grâce à un taux de grave global. L'approche actuelle ne différencie pas assez le taux de grave selon les spécificités du programme. Cela permet certes de s'assurer au global de la rentabilité de la direction mais entraîne des demandes d'évolutions tarifaires non adaptées face aux risques ou la structure du programme. Les différents profils présentés ont permis de pointer les limites de l'approche actuelle et le besoin de personnaliser le taux de grave. L'approche par crédibilisation permet de proposer une formalisation de règle de réévaluation des taux de grave pour le pilotage et ainsi harmoniser les différents programmes. Cela permettra un passage progressif à l'expérience du programme selon la croissance du portefeuille. Un autre avantage de cette méthodologie est une facilité de mise en place pour les programmes rentables et peut permettre d'améliorer la souscription et la défense du portefeuille. Toutefois cet indicateur rencontre quelques limites. Tout d'abord comme tout indicateur il n'est pas exhaustif et doit être comparé avec d'autres visions pour obtenir une totale compréhension des caractéristiques et des résultats d'un programme. Une autre problématique opérationnelle que peut rencontrer l'emploi du taux de grave crédibilisé concerne les échanges avec les intermédiaires. En effet cette évolution du taux de grave peut être questionnée par les courtiers, et peut être difficilement acceptée dans le cadre d'une hausse du taux. Enfin le taux de grave crédibilisé peut avoir tendance à accentuer le besoin de ressources des programmes dégradés.

4.2 Traité de réassurance

Les travaux précédents ont permis de mettre en évidence différents seuils de gravité dans la sinistralité du portefeuille Auto 4 roues. Le taux de grave global qui a été déterminé est un indicateur pour comprendre et suivre la rentabilité dans le temps. Mais il serait intéressant de trouver un moyen de gérer réellement des sauts dans la rentabilité si il devait y en avoir. La solution la plus commune est la réassurance, et cette section aura comme objectif de proposer un traité de réassurance pour le portefeuille auto 4 roues entier. Le but sera de trouver une prime pure de réassurance avec un traité

qui a du sens pour la Direction des Partenariats. L'estimation de la prime pure n'est que la première étape pour la détermination de la réelle prime commerciale, mais cette partie n'étant pas au coeur du mémoire il a été décidé de ne calculer qu'une prime pure de réassurance. Toutefois des pistes de réflexion pour aller plus loin seront menées.

4.2.1 Justification du processus

Les différentes études liées à la détermination du taux de grave global ont mis en évidence trois seuils de grave pour le portefeuille Auto 4 roues. Le premier seuil est un seuil global à 55 000 qui est utilisé pour trouver le taux de grave égal à 26,8%. Les deux suivants à 378 000 et 1 540 000 sont des seuils de grave pour les sinistres corporels et prennent tout leur sens par leur comportement spécifique. Comme vu précédemment le taux de grave permet à la Direction des Partenariats de suivre la rentabilité de ses programmes de tailles variées dans le temps pour des indications stratégiques, mais il ne permet pas d'agir directement sur la rentabilité. En considérant le cas où l'objectif est réellement de gérer la rentabilité selon la sinistralité grave, la première méthode serait de faire réassurer une partie du portefeuille. Cela permettrait en échange d'une prime de réassurance de se protéger face à certains événements extrêmes. La signature du traité de réassurance concernerait donc la rentabilité au global, et non pas par programme. Mais avant de dissenter sur quel traité serait optimal, il est intéressant de savoir si employer de la réassurance a un sens vis-à-vis de la sinistralité.

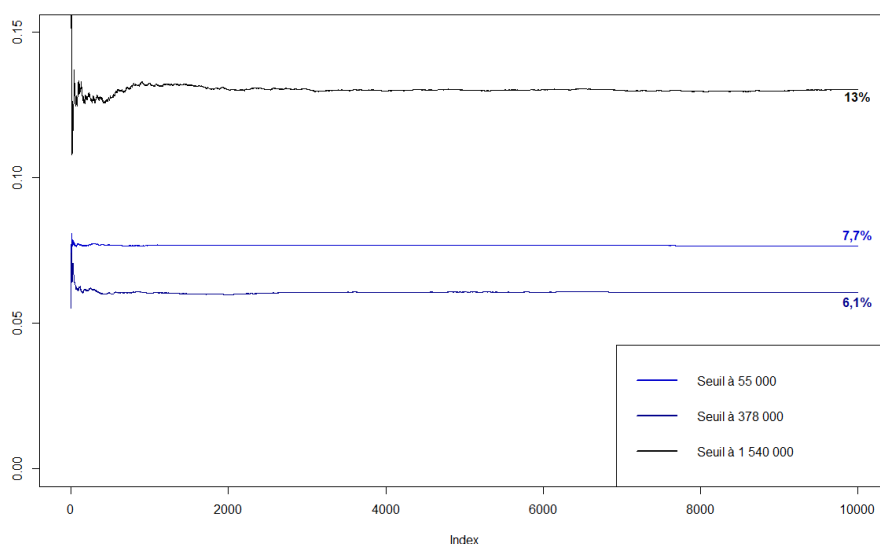


FIGURE 4.7 – Taux de grave par tranche, estimation par simulation de Monte-Carlo

Ce graphique décompose le taux de grave global de 26% selon les trois tranches qui correspondent aux trois seuils. Il est visible qu'un peu moins de 50% du taux de grave est expliqué par la sinistralité au-delà du seuil à 1 540 000. Ce sont donc les sinistres extrêmes du portefeuille qui impactent le plus le taux de grave, et ainsi la rentabilité.

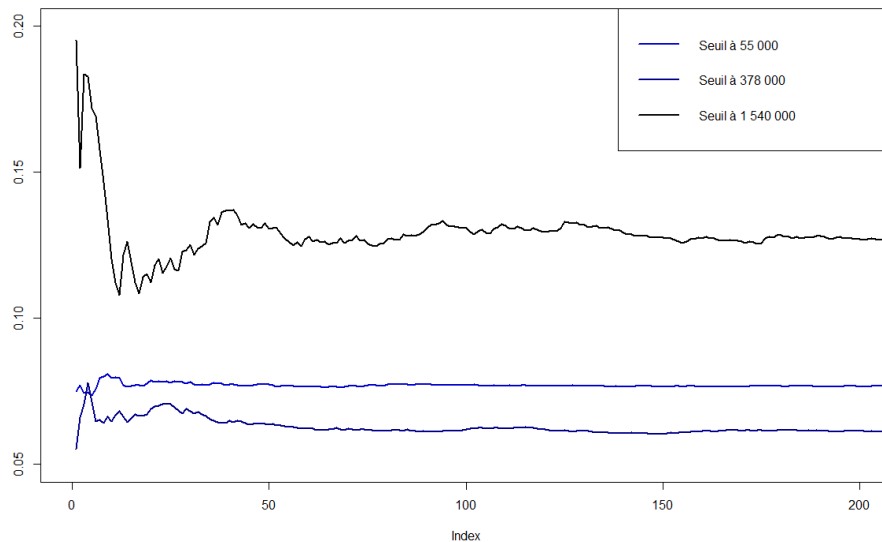


FIGURE 4.8 – Taux de grave par tranche, estimation par simulation de Monte-Carlo

Cette troncature du graphique précédent aux 200 premières simulations renseigne sur les volatilités des taux de grave par tranche. En plus d'être la tranche la plus influente sur le taux de grave, la tranche la plus atypique apparaît comme la plus volatile par rapport aux deux autres. Cela semble logique, tant un sinistre extrême est rare mais a une très forte sévérité.

Il a donc été vu que les sinistres extrêmes du portefeuille impactent le plus la rentabilité parmi les trois tranches de grave, et qu'ils sont les plus volatiles car moins fréquents mais plus sévères. Ces propriétés permettent donc de valider l'emploi de la réassurance pour ce type de sinistre, et donc de lisser la rentabilité.

4.2.2 Détermination du type de traité de réassurance

Décomposée en deux parties, cette section introduira les concepts non exhaustifs de réassurance essentiels à l'étude. Ensuite le type de traité optimal sera discuté en prenant quelques hypothèses simplificatrices.

Introduction à la réassurance

Dans un cadre classique de réassurance, la compagnie d'assurance appelée cédante va transférer son risque moyennant une prime de réassurance. Deux types de réassurance sont communément utilisés, la réassurance proportionnelle et non-proportionnelle. Comme son nom l'indique, la réassurance proportionnelle intervient dans le cas où la cédante va payer un pourcentage X de primes pour que le réassureur récupère la même répartition du portefeuille. Ce type de réassurance n'est que très rapidement présenté car il ne sera pas retenu. En effet il implique un montant de primes élevé pour une couverture correcte, ce qui n'est pas le but des travaux. La réassurance non-proportionnelle en revanche intervient lorsque un seuil défini préalablement est franchi. Cette définition correspond bien aux différentes études précédentes. Deux grandes catégories se démarquent concernant la réassurance non-proportionnelle : l'excédent de sinistres (ou *Excess of loss*) et l'excédent de plein (ou *Stop-loss*). L'*excess of loss* couvre la cédante des sinistres extrêmes à partir d'un certain seuil appelé priorité, pour une valeur limite maximale appelée portée. Un traité en *excess of loss* se note $BXS A$ avec A la priorité et B la portée. Soit l'*excess of loss* suivant, avec une priorité de 100 et une portée de 100 noté $100XS100$;

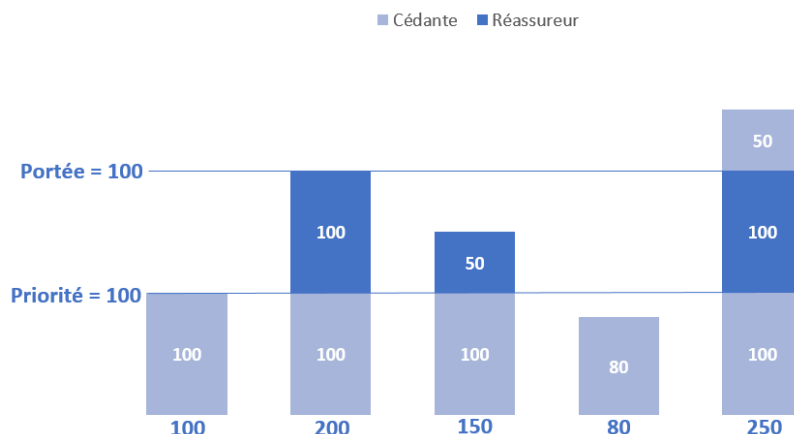


FIGURE 4.9 – Exemple de sinistralité pour un traité 100 XS 100

Sur ce graphique la somme agrégée des coûts des sinistres est de 780 qui serait totalement à la charge de la cédante sans traité. Avec le traité, la cédante ne porte plus que 530 tandis que le réassureur devra s'acquitter de 250.

Un excess of loss peut être de deux types :

- XS par risque, où le réassureur intervient pour un unique sinistre
- XS par événement, qui cumule les sinistres individuels d'un même événement, en général un événement CAT-NAT.

Dans le cas des travaux sur le portefeuille Auto 4 roues étudié, le traité de réassurance n'interviendrait que pour des sinistres corporels extrêmes, un XS par événement n'est donc pas nécessaire.

Le traité en excédent de pertes permet à la cédante de se protéger contre une potentielle importante sinistralité, et donc de garantir la rentabilité de la cédante. Il s'écrit de la même manière qu'un excess of loss avec une priorité et une portée, mais la forme est en pourcentage de pertes. Sur l'exemple suivant qui est un traité 20%SL 90%, alors le réassureur intervient lorsque les pertes de la cédante dépassent 90% et jusqu'à 110% de pertes.

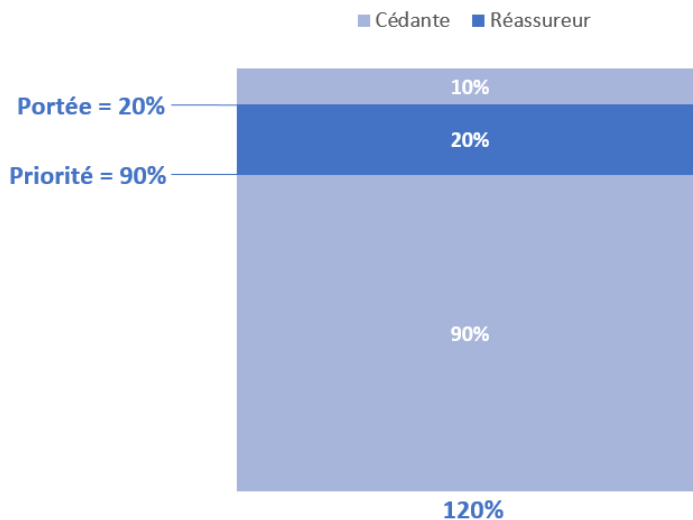


FIGURE 4.10 – Exemple de sinistralité pour un traité 20%SL 90%

Le S/C de la cédante est donc de 120% hors réassurance. Après application du traité, le réassureur prendra en charge 20% des pertes.

Ces deux types de traité sont intéressants pour le cadre posé. En effet l'excess of loss par risque correspond bien si les sinistres extrêmes corporels sont réassurés, et il a été vu que c'est la sinistralité visée lors des études sur la décomposition du taux de grave. De même le stop loss pourrait être un bon choix par rapport à l'ensemble des travaux sur le taux de grave. Mais du point de vue de la Direction, les récupérations peuvent être très élevés, et le traité sera ainsi très cher. Le choix final du traité sera donc un traité en excédent de sinistre par risque. La réassurance n'étant pas un pan majeure du mémoire, certaines hypothèses simplificatrices vont être néanmoins présentées ci-dessous.

Hypothèses du traité

Certains concepts liés à l'excess of loss vont être définis dans cette partie, et avec eux leurs hypothèses sous-jacentes.

- Est appelée reconstitution le nombre limite de fois que le réassureur interviendra. Pour un exemple de 4 reconstitutions, le réassureur va donc accorder une couverture annuelle de 5 fois la portée, c'est à dire 4 reconstitutions plus la garantie de base. Ces reconstitutions coûtent une prime calculée au prorata capita, c'est à dire proportionnelle au pourcentage de la portée touchée. Pour cette étude, il sera considéré que les reconstitutions sont illimitées et gratuites, donc déjà intégrées dans la prime pure.
- L'annual Aggregate Deductible (AAD) est une franchise annuelle à partir de laquelle le réassureur interviendra. L'hypothèse est prise que l'AAD est nulle.
- A l'inverse de l'AAD, l'Annual Aggregate Limit (AAL) est un plafond annuel de paiement par le réassureur. Cette fois-ci, l'AAL sera pris comme infini.

Ces hypothèses sont les plus simples et pourront être discutées en fin de partie pour améliorer la vraisemblance du traité de réassurance que pourra signer la Direction des Partenariats.

4.2.3 Prime pure de réassurance et impacts

Objectifs

Avant d'expliciter certains résultats, il est important de déterminer les différents objectifs du traité de réassurance en excess of loss suivant.

- Il a été vu précédemment que ce sont les sinistres corporels extrêmes au-delà du seuil à 1 540 000 qui doivent être impactés par la réassurance. L'idée est donc de tester un traité avec une priorité de 1 500 000, nombre légèrement plus faible que le seuil mais qui est plus lisible dans un traité. Il n'y a pas d'a priori sur la portée, mais elle sera déterminée selon les critères suivants.
- La portée considérée devra permettre à la prime pure de réassurance de ne pas être trop élevée. Il a été défini qu'une prime pure acceptable se situerait entre 5% et 10% des primes totales du portefeuille Auto 4 roues de la Direction des Partenariats. Sans être fatale pour la rentabilité en cas de bonne année aux niveaux des sinistres extrêmes corporels, cet encadrement devrait permettre d'obtenir une portée réaliste.
- Il a été vu que la sinistralité extrême est très volatile, un des objectif du bon choix de la portée est donc d'abaisser cette volatilité pour lisser la rentabilité au cours du temps. En plus d'avoir un impact sur la volatilité, le traité de réassurance aura une influence sur l'indicateur du taux de grave. Une diminution entre 4 et 6 points de pourcentage est recherchée, afin de tout de même conserver une grande partie de la sinistralité.

Résultats

Comme vu ci-dessus, la priorité conservée est donc de 1 500 000. Pour le choix de la portée plusieurs tests ont été menés pour des valeurs comprises entre 1 500 000 et 7 500 000. Les faibles portées n'offraient que de faibles changements dans le taux de grave et sur la volatilité pour une prime pure basse, tandis qu'à l'inverse une forte portée provoquait une prime de réassurance beaucoup trop élevée. Un entre-deux a donc été choisi, et la portée sera donc de 4 500 000. Le traité sera donc un traité en excédent de sinistre par risque noté $4.5XS1.5$ en millions, avec reconstitutions gratuites et illimitées, une AAD nulle et une AAL infinie.

Par définition de la prime pure qui est l'espérance des récupérations de la cédante par le réassureur, elle a été estimée avec 10 000 simulations d'année de sinistres selon la méthode de Monte-Carlo. Il en résulte une prime pure de réassurance qui équivaut à 6,5% des primes totales sur l'année 2021 du portefeuille. Ce pourcentage correspond aux attentes où la prime est assez modérée. Une fois la prime pure de réassurance déterminée, un nouveau taux de grave après application du traité de réassurance a été trouvé. De 26,8% avant réassurance il passe à 21,8%, donc 5 points de pourcentage d'écart, valide par rapport aux objectifs fixés précédemment.

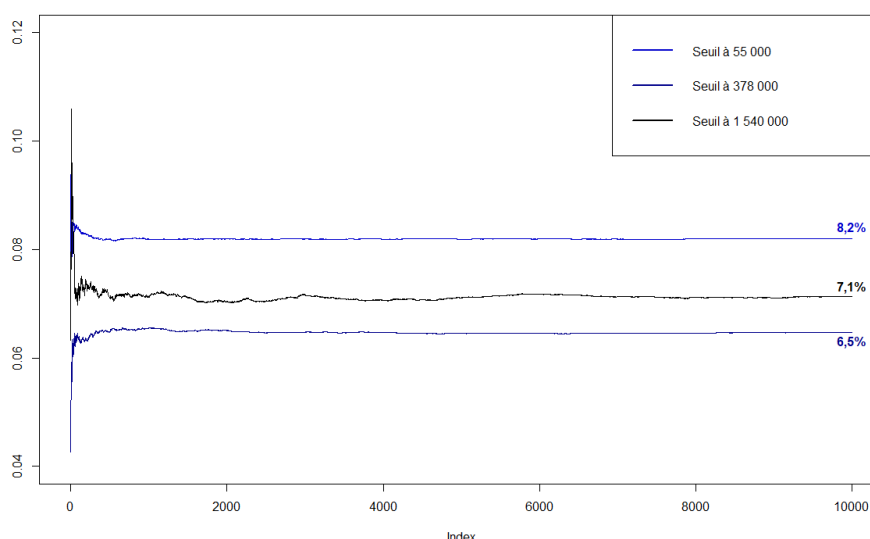


FIGURE 4.11 – Décomposition du taux de grave après traité de réassurance

Il est visible que la diminution du taux de grave est due à la diminution de la charge de la tranche des sinistres corporels extrêmes au-delà du seuil à 1 540 000, qui était le but du processus. Il passe de 13,8% à 7,1% et ne représente un peu moins d'un tiers du taux de grave global après réassurance, bien plus faible que les presque 50% hors réassurance.

L'impact de la sinistralité extrême corporelle a donc été grandement diminué, mais qu'en est-il de la volatilité ?

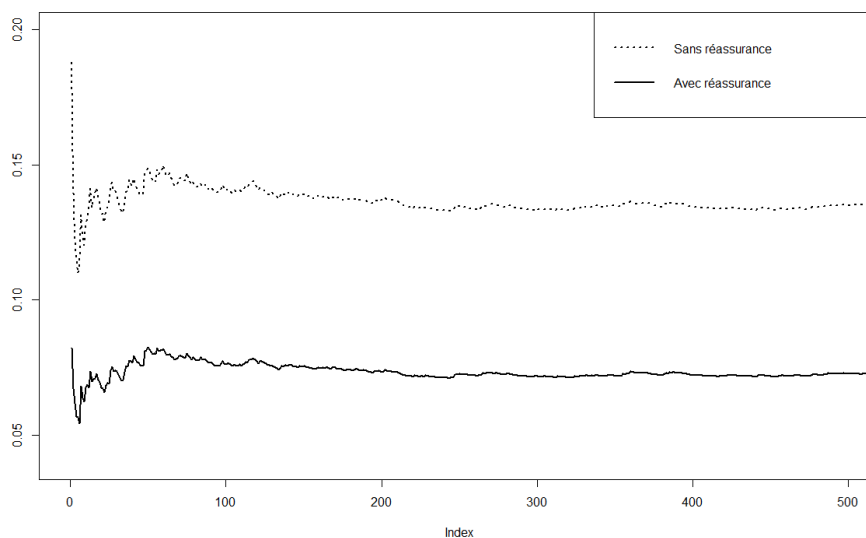


FIGURE 4.12 – Comparaison du taux de grave au-delà de 1 540 000 selon application de la réassurance.

Ce graphique est une troncature à la 500e simulation de Monte-Carlo des taux de grave pour les sinistres dont la charge est supérieure à 1 540 000, avec et sans réassurance. Les sauts sont plus modérés lors des simulations avec réassurance, la volatilité est donc plus faible. Cela est aussi mis en évidence lors de l'étude de l'écart-type des taux de grave selon réassurance.

Seuil	Taux de grave	Ecart-type
Sans réassurance	26,8%	8,66%
Avec réassurance	21,8%	5,79%

TABLE 4.6 – Ecart-type du taux de grave selon application de la réassurance

En effet l'écart-type baisse d'environ 3 points de pourcentage, ce qui est loin d'être négligeable.

Ces travaux ont donc permis de prouver l'intérêt du traité de réassurance pour ce portefeuille. Mais en réalité, que propose comme résultats ce traité sur un petit échantillon d'année ? Il est proposé de regarder sur 10 ans de simulation quels sont les résultats.

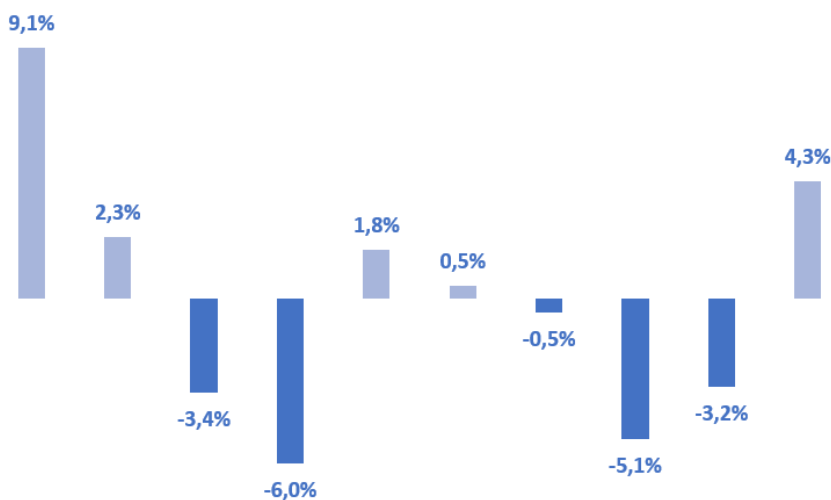


FIGURE 4.13 – Gains et pertes grâce au traité de réassurance sur 10 ans de simulation

Sur ce graphique sont mis en évidence les gains et les pertes de la Direction des Partenariats sur 10 années de simulation après application de la réassurance. Ces taux sont calculés par la formule suivante :

$$Gain = \frac{Récupérations_{Cédante} - P_{pure}}{P_{Cédante} - P_{pure}}$$

Ici, sur 10 ans le gain est négatif et égal à -0,3% de la prime annuelle amputée de la prime pure de réassurance. Ce pourcentage équivaut à une perte agrégée d'environ quelques centaines de milliers d'euros sur 10 ans, ce qui est négligeable pour le gain en stabilité et le lissage de la rentabilité dans le temps. Toutefois ces résultats peuvent varier dans le bon sens comme dans le mauvais sens sur une période aussi petite. Les pertes sont plafonnées à des récupérations de 0 malgré le paiement de la prime pure. En revanche, sans AAL les récupérations peuvent s'avérer bien supérieures, comme vu dans l'exemple où pour la première année les récupérations sont au moins deux fois supérieures à la prime pure de réassurance.

4.2.4 Pour aller plus loin

L'étude précédente a réussi à mettre en évidence l'utilité de la réassurance pour le lissage de la sinistralité extrême corporelle et donc de la rentabilité dans le temps. Mais la cadre étudié est un cadre théorique, et dans la pratique, de nombreux facteurs doivent être pris en compte pour la mise en place réelle d'un traité de réassurance.

- Les hypothèses simplificatrices qui ont été choisies doivent être révisées, afin d'obtenir un nombre de reconstitution, et des valeurs d'AAD et d'AAL optimales pour faire diminuer la prime pure.
- Il a été envisagé une unique tranche, entre 1 500 000 et 6 000 000. Il aurait pu être intéressant d'étudier le cas de deux ou plus de tranches.
- La prime pure est la première étape de la réflexion pour obtenir une véritable prime commerciale de réassurance. En effet en se plaçant du côté du réassureur il aurait fallu prendre en compte des frais, le coût du capital et une marge de rentabilité. Ainsi les gains de la Direction des Partenariats seraient bien diminués. La suite de l'étude aurait donc porté sur la détermination de l'appétence au risque de la cédante afin de savoir quelle serait la perte maximale que pourrait subir la cédante tout en souhaitant se faire réassurer.

4.3 Impact sur-inflation

4.3.1 Contexte actuel

Cette étude d'impact s'inscrit dans le contexte macro-économique qui a touché le monde entier et ainsi la France lors des derniers mois. Les explications sont multiples et peuvent être résumées comme ceci :

- La guerre en Ukraine. Le conflit russo-ukrainien marqué par l'invasion russe le 24 Février 2022 est une des causes principales de la flambée des prix. En effet ces deux pays étant d'importants exportateurs de gaz et de blé, l'offre de ces denrées diminue mais la demande reste similaire et les prix augmentent fortement.
- La reprise économique post-pandémie. Lors des années 2020 et 2021 qui ont encaissé de plein fouet la pandémie du COVID-19 et ainsi les différents confinements, la consommation des français a fortement diminué et ils ont pu accumuler plus d'épargne qu'habituellement. L'année 2022 se symbolise par une relance économique et un certain retour à la normale des habitudes des français. Mais cette forte augmentation de la consommation n'a pas été suivie par l'offre,

l'industrie ayant été plus lente à reprendre. Comme précédemment, l'asymétrie entre l'offre et la demande provoque la hausse des prix.

- Le reconfinement en Chine. Contrairement à la France, de nombreuses régions en Chine ont vécu un nouveau confinement. Deuxième puissance économique mondiale avec un PIB de 12 237 Md\$ et premier pays exportateur au monde, ce ralentissement extrême de la production entraîne une grande hausse des coûts de production et de transports.
- D'autres raisons peuvent expliquer cet accroissement de l'inflation : le dérèglement climatique qui a des impacts sur les récoltes, la grippe aviaire ou encore le mauvais fonctionnement du parc nucléaire français où fin Novembre 2022, 25 des 56 réacteurs nucléaires du territoire n'étant pas en fonctionnement.

Toutes ces conjonctures économiques ont fortement influencé la hausse des prix en 2022 en France. D'après l'INSEE en prenant en compte l'indice des prix à la consommation (IPC), en Décembre 2022 l'inflation est de 5,9% sur un an.



FIGURE 4.14 – Glissements annuels de l'indice des prix à la consommation (IPC) entre 2014 et 2022
Source : INSEE

Entre 2014 et 2021, l'inflation était comprise entre -0,5% et 3%. Elle a fortement augmenté début 2022 pour dépasser 5,5% en Juin et s'est stabilisée depuis entre 5,6% et 6,2%. Il serait donc intéressant d'étudier les prévisions pour 2023. Toujours d'après l'INSEE et suite à la note de conjoncture de Décembre 2022 en prenant en compte l'IPC, L'inflation pourrait monter jusqu'à 7% cet hiver et refluerait au printemps.

Pour donner plus de contexte que l'inflation générale avancée par l'INSEE, il semble pertinent d'étudier la différence des coûts influant sur la charge des sinistres corporels et matériels.

D'après le Livre blanc RC Auto communiqué par la CCR en 2019 [CCR Re \(2019\)](#) nommé *L'indemnisation des préjudices corporels graves en RC Automobile* le coût moyen de l'indemnisation

d'un sinistre corporel grave est de 4,6M€ (il est à noter que le seuil de grave pris par la CCR est de 1M€). 50% de ce coût moyen provient de l'ATP, qui est l'assistance d'une tierce personne. De plus ce document produit par la CCR rapporte que l'indemnisation des sinistres les plus graves augmente d'environ 7% par an. Ainsi une grande partie de l'inflation sur les sinistres corporels s'explique par l'évolution du salaire du personnel médical. D'autres composantes de l'indemnisation des sinistres corporels graves comme les pertes de gains professionnels futures et les dépenses de santé à venir ont un rôle à jouer.

Concernant la sinistralité matérielle, d'après l'organisme Sécurité & Réparation Automobile (SRA), la décomposition des coûts automobiles s'effectue en trois postes : les pièces de rechange, la main d'œuvre et les frais de peinture. Le coût des pièces de rechange représente 52% des coûts totaux, tandis que la main d'œuvre couvre elle 38% des coûts. De plus, un document produit par l'Observatoire Addactis [Observatoire Addactis \(2022\)](#) nommé *L'évolution de l'assurance dommages en 2022* mentionne que les coûts des réparations ont augmenté de 30% sur les 6 dernières années. Ainsi les indicateurs pour évaluer l'inflation sur la sinistralité matérielle concerne l'évolution de la rémunération des mécaniciens et les variations de coûts sur les pièces de rechange, et plus particulièrement sur les matières premières. Les matériaux ferreux représentent environ 70% d'un véhicule et sont mentionnés le fer, l'aluminium, le cuivre, le zinc et le nickel.

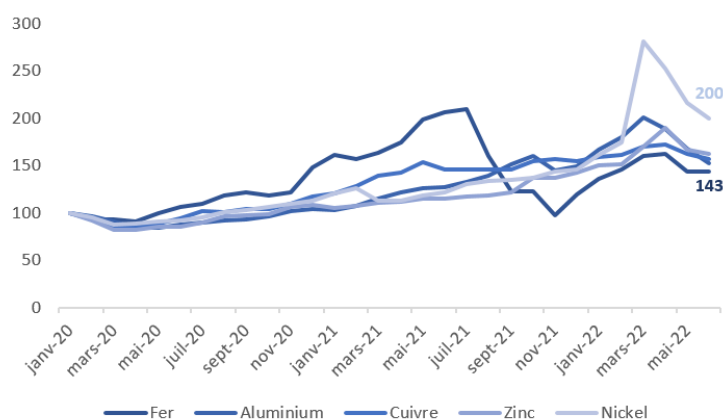


FIGURE 4.15 – Evolution du prix en euros des métaux ferreux (Base 100 Janvier 2020) *Source : INSEE*

Ainsi entre début 2020 et mi-2022, ces matériaux ont connu une hausse de leur prix entre 43 % et 100%. Toutes ces composantes serviront de base pour étudier l'impact d'une sensibilité de l'inflation sur le taux de grave.

4.3.2 L'impact d'une sur-inflation sur le taux de grave

Comme vu précédemment, la mise en AS-IF des sinistres s'est effectuée en deux temps :

- Les sinistres graves corporels avec un taux de 5% par an à partir de 2011.
- Les sinistres graves matériels avec un taux de 3,56% par an.

Ainsi l'objectif de cette étude sera de mesurer la sensibilité de l'inflation sur le taux de grave et anticiper son impact d'une variation de l'inflation sur celui-ci. Le taux d'inflation utilisé pour les sinistres corporels graves étant un indice spécial prenant en compte principalement de l'évolution des salaires du personnel médical et de tous les autres coûts consécutifs à un sinistre corporel, cette étude ne sera donc appliquée qu'aux sinistres matériels graves.

Les taux testés sont compris entre 5% et 7% par pas de 0,5 point de pourcentage.

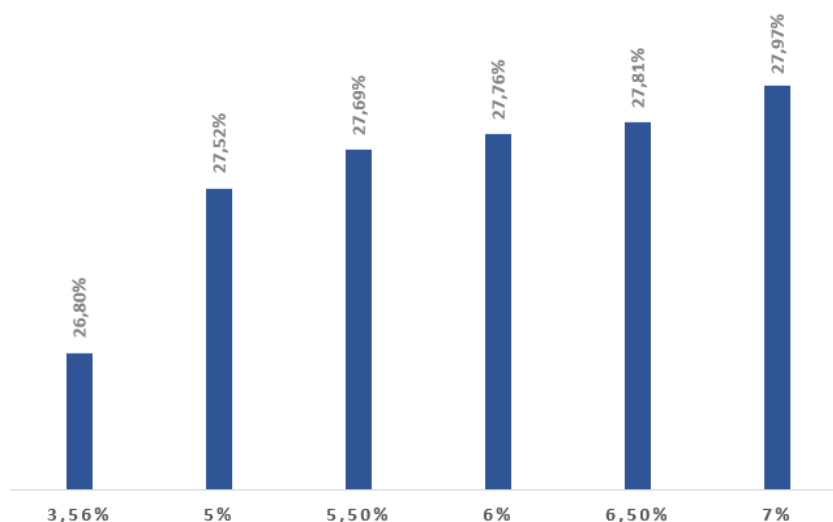


FIGURE 4.16 – Taux de grave en fonction du taux d'inflation appliqué aux sinistres graves matériels

Le graphique informe que le taux de grave augmente de près de 1,2 point de pourcentage entre un taux d'inflation de 3,56% et le taux théorique de 7%. Toutefois l'augmentation entre 5% et 7% n'est que de 0,45 point. La hausse actuelle que vit la France en terme d'inflation pourrait donc avoir un certain impact sur le taux de grave. Cependant il est important de se souvenir de l'application en réassurance où il a été vu que plus de la moitié du taux de grave est expliqué par la sinistralité corporelle extrême, qui est une sinistralité très volatile. L'impact de l'inflation des sinistres graves matériels sera donc limité.

Ces travaux ont été menés avec l'hypothèse d'un seuil de grave constant. Cela implique donc que certains sinistres non graves peuvent le devenir et la fréquence en sera impactée. Une modification de l'inflation toute chose égale par ailleurs a donc un impact sur la sévérité et aussi la fréquence pour un seuil de grave constant.

Ainsi la question peut se poser du futur du seuil année après année :

- Garder le seuil tel quel chaque année, au risque de dégrader le taux de grave trop fortement. Cette solution a tout de même comme qualité sa simplicité.
- Revaloriser le seuil avec l'inflation actuelle. Cette idée permet donc de se protéger de la hausse de la fréquence induite par une inflation à taux de grave constant.
- Recalculer un seuil de grave et donc un taux de grave. Cette solution semble inadaptée car demande trop de ressources pour un faible gain.

A l'heure actuelle aucune solution n'a été gardée. Il est à noter que toute cette étude s'effectue à primes constantes. Une évolution de la prime pourrait neutraliser cette problématique. Tester l'évolution du taux de grave en changeant les hypothèses de l'inflation des sinistres corporelles pourrait se révéler intéressant mais ne sera pas mené dans ce mémoire.

Conclusion

Ce mémoire a eu comme tout premier objectif de réviser le seuil de grave au sein de la Direction des Partenariats d'AXA France IARD. Cette réévaluation s'est effectuée dans un contexte d'impact de la sinistralité grave sur la rentabilité. Il a pu être observé que le contexte de rentabilité était très spécifique. En effet, les contrats étant regroupés par programme de taille variable, la rentabilité ne se calcule pas seulement au global mais aussi par programme. Cette rentabilité est suivie au sein des Partenariats en écrétant les sinistres graves et en les remplaçant par un taux de grave fixe.

Afin de résoudre cette problématique, les différentes méthodes de détermination de seuil ont été employées. La théorie des valeurs extrêmes étant sous-jacente de ces méthodologies, il était essentiel d'en présenter les principales propriétés.

Le portefeuille étudié étant un portefeuille Auto 4 roues, un zoom sur les sinistres corporels a été tout d'abord présenté. Cette maille se justifiait au premier abord de par les montants extrêmes que peuvent atteindre certains sinistres. De plus cela permet d'appliquer le taux de grave à la rentabilité du portefeuille global de la Direction dans son entièreté. Les analyses graphiques de détermination de seuil ont finalement renseignés que pour une modélisation optimale, deux seuils étaient nécessaires, le premier ayant pour valeur 378 000, le second 1 540 000.

Malgré leur intérêt concernant le comportement des sinistres, ces deux seuils se sont révélés trop élevés pour l'objectif principal de rentabilité par programme. Effectivement, pour des programmes de taille modéré un sinistre juste en-deçà du premier seuil va grandement dégrader la rentabilité. Une seconde étude a donc été menée afin de trouver un seuil de grave global. Cette dernière a proposé trois différents seuils, chacun ayant leurs avantages et inconvénients. Le choix final a été fait en faveur du seuil à 55 000, avec un taux de grave égal à 26,8%. Ce seuil était le plus bas proposé et est en adéquation avec le cadre de la Direction des Partenariats.

Cette détermination du taux de grave a pu amener une autre problématique : Quel serait l'indicateur de rentabilité qui aurait le plus de sens dans le contexte de la direction basé sur la sinistralité grave. Pour se faire des programmes fictifs ont été créés qui reflètent l'activité de la Direction des Partenariats, et qui ont été pensés comme étant des programmes avec un historique peu profond. Les deux premières métriques de suivi de la rentabilité étudiées ont été le ratio combiné, basé sur le taux de grave réalisé et le ratio combiné écrété mutualisé, qui se base sur le taux de grave global. Il se trouve que les conclusions sur l'état des programmes peuvent être bien différentes selon l'utilisation de l'un ou l'autre des indicateurs. Un troisième indicateur a donc été testé, qui se base sur la crédibilisation du taux de grave réalisé de chaque programme. Ce ratio combiné crédibilisé permet de tenir compte des caractéristiques de chaque portefeuille, tout en conservant une part de sécurité grâce au taux de grave global. L'évolution du coefficient de crédibilité s'effectue en fonction de la taille du portefeuille et de la profondeur de son historique. Ce ratio combiné crédibilisé permet d'être appliqué sur tout type de programme. L'étude suivante a permis de révéler le puissant levier que peut être la réassurance dans le cadre du suivi de la rentabilité grâce à son impact sur la sinistralité extrême. Enfin, il découle des travaux autour de la sensibilité sur l'inflation que les paramètres et hypothèses autour du taux de grave doivent être révisés régulièrement.

Bibliographie

- Anderson, T. (1962), ‘On the distribution of the two-sample cramer-von mises criterion’, *Annals of Mathematical Statistics : Institute of Mathematical Statistics* **33**, 1148–1159.
- Balkema, A. & Haan, L. D. (1974), ‘Residual life time at great age’, *Annals of Probability* **2**, 792–804.
- CCR Re (2019), Livre blanc : *L’indemnisation des préjudices corporels graves en RC Automobile*.
- Deckers, A., Einmahl, J. & Haan, L. D. (1989), ‘A moment estimator for the index of an extreme value distribution’, *Annals of Statistics* **17**, 1833–1855.
- Derkaoui, S. (2017), Mémoire d’actuaire : *Modélisation de la sinistralité grave dans le cadre des revalorisations de primes du partenariat*, ISUP.
- ElBaamrani, M. (2017), Mémoire d’actuaire : *Modélisation du risque atypique pour la responsabilité civile automobile : nouvelle approche pour la détermination du seuil*, EURO Institut d’Actuariat.
- Embrechts, P., Klueppelberg, C. & Mikosch, T. (1997), *Modelling extremal events for insurance and finance*, Berlin : Springer.
- Gnedenko, B. (1943), ‘Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire’, *Annals of Mathematics* **46**, 423–453.
- Hill, B. (1975), ‘A simple general approach to inference about the tail of a distribution’, *Annals of Statistics* **3**, 1163–1174.
- Kolmogorov, A. (1933), ‘Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione’, *Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari* **4**, 83–91.
- Mornet, A. (2021), Notes de cours : Théorie des valeurs extrêmes. Institut de Science Financière et d’Assurances ISFA, Université Lyon 1.
- Observatoire Addactis (2022), *Evolution de l’assurance dommages en 2022*.
- Pickands, J. (1975), ‘Statistical inference using extreme order statistics’, *Annals of Statistics* **3**, 119–131.
- Xu, Y. (2017), Mémoire d’actuaire : *Modélisation des sinistres graves dans l’assurance santé internationale*, ESSEC Business School.

Lois utilisées

Sévérité

Loi log-normale

Soit X une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ , $Y = \ln(X)$ suit une loi log-normale avec comme densité la formule suivante :

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec $y > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ Les moments d'ordre k de la loi-lognormale sont donnés par :

$$\mu^k = \exp(k\mu + k^2\frac{\sigma^2}{2})$$

et il en découle que l'espérance et la variance de la log-normale sont comme ceci :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ \mathbb{V}(Y) &= [\exp(2\mu + \sigma^2)] [\exp(\sigma^2) - 1]\end{aligned}$$

Loi de Weibull

La fonction de répartition de la loi de Weibull possède l'écriture suivante :

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-u}{b}\right)^c\right]$$

avec u le paramètre de localisation, b le paramètre d'échelle et c le paramètre de forme et $x > u$.

L'espérance et la variance sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= u + b\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right) \\ \mathbb{V}(X) &= b^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right]^2 \right\}\end{aligned}$$

avec

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Loi de Pareto tronquée à droite

La fonction de répartition de la loi de Pareto tronquée à droite est de la forme suivante :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{u}{x}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{u}{M}\right)^\alpha} & \forall x \geq u \\ 0 & \forall x < u \end{cases}$$

avec l'espérance et variance :

$$E(X) = \left(\frac{u}{1 - \frac{1}{\alpha}}\right) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{u}{M}\right)^{\alpha-1}}{1 - \left(\frac{u}{M}\right)^\alpha}\right)$$

$$V(X) = \left(\frac{u^2}{1 - \frac{2}{\alpha}}\right) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{u}{M}\right)^{\alpha-2}}{1 - \left(\frac{u}{M}\right)^\alpha}\right) - [E(X)]^2$$

Fréquence

Loi de Poisson

La densité de la Loi de Poisson s'écrit comme :

$$f(k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$$

avec $E(N) = V(N) = \lambda$

Loi Binomiale Négative

La densité de la loi Binomiale Négative est de la forme suivante :

$$f(k) = \binom{k+n-1}{k} p^n q^k$$

avec l'espérance et la variance comme ceci :

$$\mathbb{E}(N) = n \frac{q}{p}$$

$$\mathbb{V}(N) = n \frac{q}{p^2}$$