



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 25 Août 2023

Par : MAHRANE Yanis

Titre : Choix de la meilleure combinaison de modèles pour réaliser un GSE sur un portefeuille d'assurance vie

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut

des Actuaire :

HABART Marine

ROUCHATI Faris

Signature :

Entreprise :

Périclès Actuarial

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA : Directeur de mémoire en entreprise :

VERMET Franck

BUCKDAHN Rainer

ETIENNE Pierre-Alexandre

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

Le contexte de la réglementation Solvabilité 2 exige une évaluation en valeur de marché de l'actif et du passif des organismes d'assurance, conformément au principe de *market-consistency*. Il est donc crucial d'inclure de manière adéquate les différentes options présentes dans les contrats dans le calcul du *Best Estimate*. Pour réaliser cette évaluation, l'utilisation d'un Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est primordiale. L'objectif de ce mémoire est de créer les modèles de taux, d'inflation, d'actions et d'immobilier, ainsi que de combiner ces différentes sources pour obtenir quatre scénarios économiques. Ces modèles sont ensuite intégrés dans un modèle actif-passif afin de choisir la meilleure combinaison pour un portefeuille d'assurance-vie. Les modèles de taux utilisés comprennent le Libor Market Model avec sa forme décalée, le Displaced Diffusion Libor Market Model et le modèle de Hull & White à un facteur. Pour modéliser l'inflation, la relation de Fisher est utilisée, en combinant cela avec le modèle de Vašíček pour estimer une courbe de taux réel. L'indice immobilier est projeté en utilisant la dynamique de Black & Scholes avec une volatilité déterministe. L'indice des actions est également modélisé avec cette dynamique ainsi qu'avec le modèle de Merton à sauts. Une attention particulière est portée à la description théorique de chaque modèle, à leur calibration ainsi qu'à la validation par des tests de martingalité et de *market-consistency*. Enfin, l'impact de chaque combinaison de modèles sur un portefeuille d'assurance-vie est analysé au travers d'indicateurs tels que la fuite de modèle, le *Best Estimate* et la *Time Value of Financial Options and Guarantees*. L'objectif est de déterminer la combinaison de modèles qui représente le mieux le portefeuille étudié. Ce mémoire met donc en évidence l'importance des choix théoriques, des calibrations et des tests de validation pour obtenir des scénarios économiques pertinents dans le cadre de l'évaluation réglementaire des organismes d'assurance.

Mots clefs: Solvabilité 2, Générateurs de Scénarios Économiques (GSE), Modèles de taux, Modèles d'actions, Immobilier, Inflation, Libor Market Model, Displaced Diffusion Libor Market Model, Black & Scholes, Merton à sauts, Relation de Fisher, Risque neutre, Martingalité, Market-consistency, Validation, Calibration, Fuite de modèle, Best Estimate, TVFOG.

Abstract

In the context of Solvency 2, an insurance company's assets and liabilities must be valued at market value, in accordance with the market-consistency principle. The various options present in euro fund contracts must be adequately included in the calculation of the Best Estimate. To do this, it is essential to use an Economic Scenario Generator (ESG). The aim of this thesis is to produce the complete Python codes for the interest rate, inflation, equity and real estate models, to combine them to obtain four ESGs and, after integration in an asset-liability model, to choose the best combination for a life insurance portfolio. The interest-rate models used are the Libor Market Model with its shifted form, the Displaced Diffusion Libor Market Model, and the one-factor Hull & White model. Inflation is calculated using Fisher's relation and a Vašíček real-rate curve. Finally, the real estate index is projected using Black's dynamics with deterministic volatility. The equity index will also be produced using these dynamics, as well as the Mertons model with jumps. Attention will be paid to the theoretical description of these models, then to their calibration and finally to the validation of martingality and market-consistency tests. The results of these models are studied, with the possibility of opening them up. Lastly, the impact of each of the model combinations on a life insurance portfolio is analyzed using indicators such as model leakage, Best Estimate and Time Value of Financial Options and Guarantees, in order to identify the model that best represents the portfolio.

Keywords: Solvency 2, Economic Scenario Generators (ESG), Interest rate models, Equity models, Real estate, Inflation, Libor Market Model, Displaced Diffusion Libor Market Model, Black & Scholes, Merton jump diffusion model, Fisher relationship, Neutral risk, Martingality, Market-consistency, Validation, Calibration, Model leakage, Best Estimate, TVFOG.

Remerciements

Je tiens à remercier mon tuteur en entreprise M. Pierre-Alexandre ETIENNE pour sa disponibilité, son expertise et sa prise de recul durant la réalisation du mémoire.

Je remercie sincèrement M. Rainer BUCKDAHN, Mme. Pauline SALAUN, Mme. Léa GUILLOT, M. Gaël PINAULT, M. Stanislas ROUSSEAU, Mme. Solène QUEFFEULOU et M. Imran BOUKHENFER pour leurs conseils et retours avisés.

J'adresse aussi des remerciements à M. Alain PAGNAIN et M. Koï COUBEH pour leur sympathie et leur écoute.

Merci à ma famille et à mes amis pour le soutien.

Note de synthèse

Contexte et problématique

Dans le contexte de la réglementation Solvabilité 2, il est nécessaire d'évaluer l'actif et le passif d'un organisme d'assurance en valeur de marché, ce qui correspond au principe de *market-consistency*. Cette évaluation est réalisée dans un cadre théorique de travail, l'univers "*risque neutre*".

C'est en ce sens que les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) sont nécessaires pour simuler stochastiquement et projeter à un horizon de temps défini les facteurs financiers auxquels un organisme d'assurance est exposé. Nous entendons par facteurs financiers : les taux d'intérêts, les rendements immobiliers et d'actions ainsi que l'inflation.

Le choix du modèle pour représenter chacun des facteurs financiers est un choix important qui peut entraîner des écarts non négligeables dans le calcul du *Best Estimate*. De plus, les modèles doivent être choisis pour correctement représenter le portefeuille que nous allons projeter tout en respectant les exigences de la directive Solvabilité 2.

C'est en ce sens que nous allons créer quatre combinaisons de modèles pour représenter le portefeuille d'assurance vie qui se trouve à notre disposition et déterminer la meilleure d'entre elles.

La démarche que nous allons suivre est la suivante :

- Étude théorique des modèle choisis
- Pour une meilleure clarté et visibilité des codes, réalisation intégrale de la dynamique, de la calibration des modèles et des tests de martingalité et de *market-consistency*.
- Implémentation dans un modèle actif-passif
- Analyse et comparaison des fuites de modèles, des *Best Estimate* et de la TVFOG.

Modélisation des taux

Le premier choix s'est porté sur le modèle Hull & White à un facteur (HW1F), qui s'inscrit dans le cadre Heath, Jarrow et Morton (HJM) et permet de reproduire la structure de la courbe de taux grâce à la propriété d'absence d'opportunité arbitrage. Pour le second choix, nous avons opté pour le LIBOR Market Model (avec sa version

décalée, le Displaced Diffusion LIBOR Market Model), ce modèle de marché permet de modéliser un ensemble de taux forward (le taux LIBOR forward), qui ont pour principal avantage d'être observables directement sur le marché.

Ces deux modèles ont été calibrés sur une matrice de swaptions At the Money (ATM) extraite de Bloomberg dont nous avons déduit les volatilités normales et décalées. L'objectif est de minimiser la distance entre les volatilités de marché et celles des modèles en utilisant la méthode des moindres carrés.

Dans le cas du modèle HW1F, deux paramètres sont à calibrer : κ la vitesse de retour à la moyenne et σ la volatilité. Pour réaliser cette calibration nous nous sommes basés sur la méthode des arbres trinomiaux. Dans le cas du DDLMM, cinq paramètres sont à calibrer : a, b, c, d les quatre paramètres du modèle de volatilité et β le paramètre de la structure de corrélation. Pour réaliser cette calibration nous avons utilisé l'algorithme de Nelder-Mead.

HW1F		DDLMM				
κ	σ	a	b	c	d	β
0,025	0,97%	0,126	0,015	0,214	0,053	0,113

Après la diffusion avec ces paramètres nous pouvons appliquer les tests de martingalité et de *market-consistency* pour vérifier que nos projections sont correctes. Pour le test de martingalité, l'écart le plus important apparaît à plus de 45 ans dans les deux cas avec 0,03% pour le modèle HW1F et 0,65% pour le DDLMM. La moyenne des erreurs respectivement est de $1,74 \times 10^{-4}$ et de $3,40 \times 10^{-3}$. Ce qui permet une reproduction parfaite de la courbe de taux dans les deux cas.

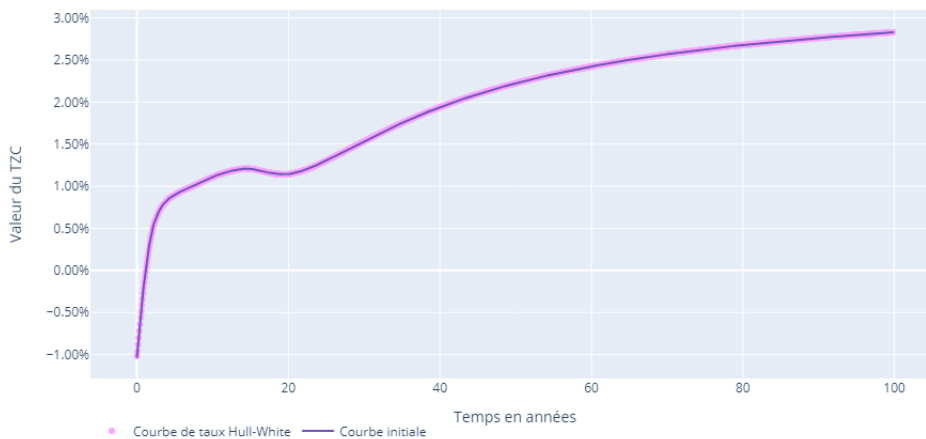


FIGURE 1 – Courbe de taux reproduite par HW1F vs courbe de taux initiale

Le test de *market-consistency* est également vérifié pour les deux modèles. Une meilleure performance est cependant attendue concernant le DDLMM au vu des écarts entre les volatilités théoriques et les calibrées. Nous obtenons une moyenne des erreurs sur l'ensemble des tenors pour le DDLMM de 5,10% contre 7,40% pour le modèle HW1F.

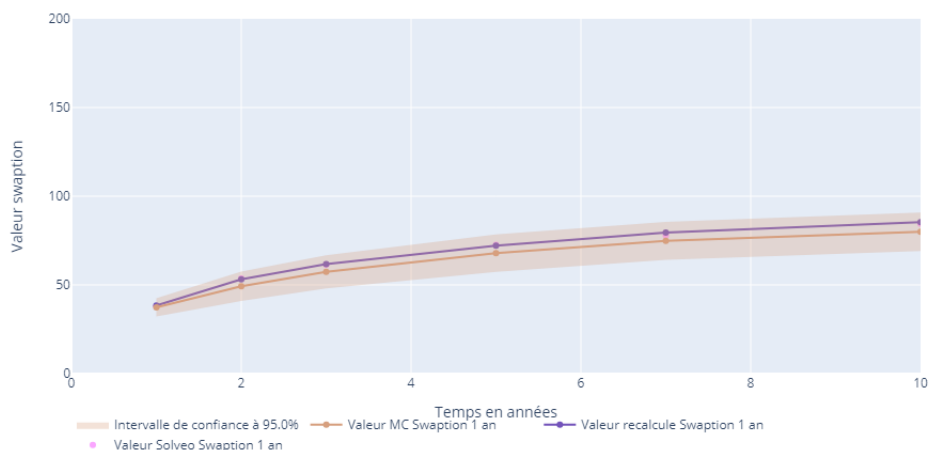


FIGURE 2 – Repricing swaption Tenor 1 an DDLMM

Modélisation de l'inflation

Pour modéliser l'inflation, nous avons décidé d'employer la relation de Fisher, qui permet de déduire l'inflation de la différence entre le taux nominal et le taux réel. Nous avons récupéré des valeurs d'OATi pour pouvoir extraire des valeurs de taux réels. Après extraction et interpolation de la courbe de taux réels, nous l'avons simulé avec le modèle de Vašíček. Ce modèle a été choisi en raison de sa simplicité et de sa capacité à produire des taux négatifs sans reproduire une courbe de taux particulière. Nous avons calibré les trois paramètres (a, b, σ respectivement la vitesse de retour à la moyenne, la moyenne à long terme et la volatilité) de ce modèle de tel façon à minimiser la distance entre les taux extraits des OATi et les taux simulés par Vašíček. Les résultats de calibration obtenus sont les suivants :

Vašíček			
b	a	σ	$r_r(0)$
0,017	0,174	0,032	-0,024

Nous appliquons ensuite la relation de Fisher avec les courbe de taux nominaux modélisés dans la partie précédente et la courbe de taux réel obtenue grâce au modèle

de Vašíček. Nous obtenons dans les deux cas une valeur d'inflation comprise entre 2% et 2,5% ce qui est en accord avec les attentes de la BCE.

Modélisation de l'indice action & immobilier

La première méthodologie employée pour modéliser l'indice action et l'immobilier consiste à utiliser le modèle de Black & Scholes à volatilité déterministe. Cependant, en raison des limites de ce modèle, nous avons décidé d'utiliser une seconde méthode pour modéliser l'indice action : le modèle de Merton à sauts. L'intérêt de ce modèle réside dans l'ajout d'une dimension plus réaliste en intégrant la présence de sauts des marchés financiers. Pour ce dernier, nous avons calibré les paramètres de sauts (m, v, λ respectivement la taille moyenne d'un saut, la volatilité de la taille d'un saut et le nombre moyen de sauts par unité de temps) sur un historique de données mensuelles du CAC40.

Les volatilités locales σ_t des deux modèles sont calibrées directement sur des prix de Call observables sur le marché. Avant de présenter les tests de martingalité et de *market-consistency* des deux modèles, il est à noter que le modèle de Merton à sauts est très dépendant de la graine aléatoire utilisée, ce qui peut avoir une incidence sur les résultats des tests de validation. Nous avons donc pris la décision de créer un algorithme qui calcule l'erreur quadratique pour récupérer des graines optimales.

Le test de martingalité est validé pour les deux modèles avec la mise en place d'un intervalle de confiance à 95%. L'erreur maximale pour le modèle de Black & Scholes est de 6,57% pour une moyenne des erreurs de 2,51%, l'erreur maximale pour le modèle de Merton à sauts (due à la présence des sauts) est supérieure pour une valeur de 18,11% avec une moyenne des erreurs de 6,32%.

Les résultats des test de *market-consistency* sont également validés pour les deux modèles avec la mise en place d'un intervalle de confiance à 95%. L'erreur maximale de 12,03% et la moyenne des erreurs de 5,69% du modèle de Black & Scholes permettent la validation du test. Cependant, dans le cas du modèle de Merton, notons que l'erreur maximale est de 28,43% passé 45 ans. Néanmoins, la moyenne des erreurs de 7,95% nous permet d'accepter le test.

Résultats

Nous avons obtenu 4 combinaisons de modèles (présentées de la façon suivante Taux-Inflation-Actions-Immo et en notant BS le modèle de Black & Scholes) :

- GSE HW1F-BS composé de HW1F-Fisher-BS-BS
- GSE HW1F-Merton composé de HW1F-Fisher-Merton-BS
- GSE DDLMM-BS composé de DDLMM-Fisher-BS-BS
- GSE DDLMM-Merton composé de DDLMM-Fisher-Merton-BS

Nous analyserons dans un premier temps la fuite de modèle engendrée par chaque GSE testé. Puis, nous mesurerons l'impact de cette dérive dans les indicateurs sélectionnés et le résultat de ces indicateurs par GSE étudié. Enfin, nous concluons quant au GSE optimal à utiliser dans le cadre de cette étude.

Fuite de modèle / Dérive

Sur l'horizon de projection de 50 années et pour 1000 simulations, nous obtenons les résultats suivants :

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
$\delta_{\text{moy}}/\text{an}$ (en %VM)	0,00529%	0,00982%	0,08488%	0,09075%

TABLE 1 – Fuite de modèle pour les 4 GSE réalisés

Intervalles d'acceptation définis par l'ACPR :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \leq 0,2\%VM & : \text{Calcul accepté} \\ 0,2\%VM < \delta \leq 0,5\%VM & : \text{Calcul accepté mais révision pour le prochain exercice} \\ 0,5\%VM < \delta & : \text{Correction} \end{array} \right.$$

Les résultats de fuite de modèle pour nos 4 GSE se situent tous dans le critère $\delta \leq 0,2\%$. Cela implique que nos GSE ont été correctement réalisés sans erreurs de choix mathématiques ou de programmation.

Néanmoins, nous pouvons voir que la dérive avec le DDLMM sont plus importants que ceux réalisés avec le modèle HW1F. Cette augmentation de la fuite de modèle du DDLMM peut s'expliquer par le fait que nous avons utilisé des prix de marché et une courbe de taux pouvant être négative. Cette prise en compte de taux négatifs est introduite par le facteur de décalage de la courbe de taux $h = 5\%$, qui n'est pas présent dans la modélisation HW1F. Selon l'article de F.Planchet & K.Armel [17], le modèle DDLMM diverge lors d'un calibrage sur les swaptions lorsqu'un facteur de décalage, aussi petit soit-il, est ajouté. Ils préfèrent considérer un paramétrage non *market-consistent* pour valoriser les contrats d'épargne en euro.

Best Estimate

Les valeurs de nos dérives étant toutes positives, elles sont intégrées au *Best Estimate*.

Dans la suite, les valeurs de *Best Estimate* concernent les portefeuilles totaux et non seulement les contrats en euros. Néanmoins, cela reflète la même vision que si nous regardions uniquement les valeurs des produits en euros, car les *Best Estimate* des produits en unités de compte sont similaires pour tous les GSE.

Nous pouvons constater qu'une fois de plus, la projection avec le modèle de Merton donne une dispersion de valeurs beaucoup plus importante par rapport à celle du modèle de Black & Scholes, quelle que soit la modélisation des taux.

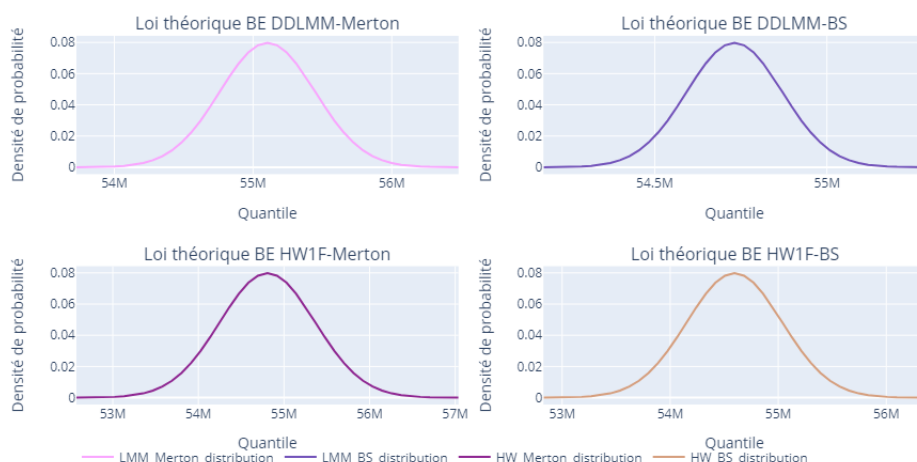


FIGURE 3 – Loi théorique des *Best Estimate* totaux (prise en compte des produits UC) pour chaque GSE

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
Ecart-Type (en k€)	13 980 809	17 644 493	4 384 378	10 890 029

TABLE 2 – Ecart-Type sur la distribution du *Best Estimate* total de chaque portefeuille (prise en compte des produits UC)

Nous remarquons que les écarts-types entre les modélisations HW1F et DDLMM sont assez importants. Ce phénomène est intrinsèque aux modèles utilisés. Dans le cas du DDLMM, nous capturons une structure de volatilité qui permet d'être plus flexible et de fournir des simulations plus précises, tandis que le modèle HW1F a un paramètre de volatilité constant.

De même, le DDLMM utilise une structure de corrélation $\rho_{ij}(t) = e^{-\beta|T_i - T_j|}$, ce qui implique une diminution de la corrélation entre deux dates éloignées, tandis que le modèle HW1F a une corrélation implicitement constante.

Enfin le modèle HW1F possède le paramètre κ de retour à la moyenne, ce qui signifie que si les taux s'écartent de la moyenne à long terme, ils auront tendance à y revenir avec le temps. Cette tendance peut entraîner une variation plus importante de l'écart type.

Le modèle HW1F ayant un écart-type de scénarios plus élevé, il peut capturer des scénarios extrêmes qui ne seront pas présents dans le cadre du DDLMM.

Time Value of Financial Options and Guarantees

Nous constatons des écarts assez importants de TVFOG entre chacun des modèles. En fonction du modèle retenu, l'organisme d'assurance augmentera le *Best Estimate* jusqu'à

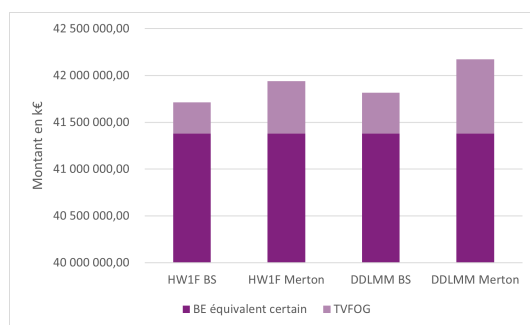


FIGURE 4 – *Best Estimate* & TVFOG pour les quatre GSE

792M€ de plus dans le cas du GSE DDLMM-Merton. Nous remarquons également que les TVFOG sont supérieurs avec le DDLMM, quel que soit le modèle d’actions choisi.

Ce phénomène est lié à la structure de volatilité capturée par le DDLMM, qui permet de mieux reproduire le marché que celle du modèle HW1F. Le DDLMM a des extrêmes moins importants que le modèle HW1F, mais il présente moins d’asymétrie d’informations grâce à cette structure de volatilité. Par conséquent, le DDLMM a plus de valeurs supérieures au *Best Estimate équivalent certain*, ce qui se traduit par des *Best Estimate* et une TVFOG plus élevés. Le DDLMM nous permet donc de capturer des scénarios extrêmes en plus grand nombre, tandis que le modèle HW1F nous permet de capturer des scénarios plus extrêmes mais moins nombreux.

L’impact du modèle de Merton à sauts se reflète également ici, car il implique des scénarios plus extrêmes en plus grand nombre, ce qui augmente le coût des garanties et options financières pour le client.

Nous avons constaté que la fuite de modèle était impactée par chacune des composantes de nos modèles. La meilleure reproduction de la courbe des taux est obtenue avec le modèle HW1F, ce qui permet de minimiser la fuite de modèle. En revanche, l’impact d’un modèle spécifique d’action reste minime.

Ensuite, nous avons étudié les valeurs de *Best Estimate*. Le modèle de Merton présente des valeurs plus dispersées en raison de sa volatilité plus élevée par rapport au modèle de Black & Scholes. Nous avons également constaté que l’analyse des écarts-types et de la TVFOG a révélé un phénomène intéressant. Le modèle DDLMM, en reproduisant la structure de volatilité du marché, offre une flexibilité qui permet d’obtenir des simulations plus précises (avec moins d’extrêmes) et moins d’asymétrie. Par conséquent, le DDLMM est capable de capturer un plus grand nombre de scénarios extrêmes, tandis que le modèle HW1F est plus apte à capturer des scénarios plus extrêmes, mais avec une fréquence moindre.

En combinant ces résultats, il en ressort que, compte tenu des limites des modèles, notre hypothèse d’utiliser le GSE HW1F-Merton se confirme. C’est ce GSE qui nous permet de trouver le meilleur compromis entre une prudence face aux scénarios extrêmes et la minimisation la fuite de modèle.

Limites et ouvertures

Il est important de noter que notre étude s'est concentrée sur un portefeuille d'assurance vie spécifique, mais que ce travail est adaptable et applicable à n'importe quel autre portefeuille.

La première limite concerne la calibration du DDLMM. Une calibration plus approfondie du modèle de volatilité et de corrélation du DDLMM pourrait améliorer ses performances. De plus, l'utilisation de swaptions dans un environnement de taux négatifs a introduit certains biais qui ne se seraient pas produits dans un contexte de taux positifs.

La deuxième limite concerne le modèle inflation. L'intégration du modèle de Jarrow-Yildirim aurait pu corriger les problèmes de neutralité au risque de la relation de Fisher. Il aurait également été intéressant d'utiliser d'autres produits, tels que les *Zero Coupon Inflation Indexed Swap*, pour extraire la courbe des taux réels, car ils sont plus abondants que les OATi et avec la possibilité de déduire le prix zéro coupon réel en fonction du prix zéro coupon nominal.

De plus, nous avons constaté des problèmes liés à la sélection des graines optimales pour le modèle de Merton avec sauts, remettant en question le caractère pseudo-aléatoire requis pour tout GSE. Bien que nous ayons utilisé un ensemble de graines optimales, il serait préférable de générer un ensemble plus large pour garantir la propriété de pseudo-aléatoire.

Il convient également de souligner que les paramètres du modèle de Merton avec sauts ont été calibrés sur les données du CAC40. L'utilisation d'un autre indice pour la calibration des paramètres de sauts pourrait rendre les résultats plus robustes.

Malgré ces limites, nous avons étudié plusieurs combinaisons de différents modèles de facteurs financiers et vérifié leur implémentation. Nous avons pu observer l'impact des modèles de taux et d'actions sur les résultats du modèle ALM. Nous avons également souligné l'importance du choix du GSE pour les assureurs, car il permet de capturer des phénomènes tels que les scénarios extrêmes et la fuite de modèle. Il est crucial de comprendre le choix des paramètres, des hypothèses et des calibrations pour se conformer aux exigences réglementaires, car un mauvais choix peut avoir des conséquences sur l'évaluation des agrégats de Solvabilité 2.

Pour aller plus loin, nous envisageons de développer un outil sous forme d'interface graphique permettant de visualiser les calibrations et les contrôles de chaque modèle de manière plus accessible.

Executive Summary

Context and issues

In the context of Solvency 2 regulations, it is necessary to value the assets and liabilities of an insurance company at market value, which corresponds to the principle of *market-consistency*. This valuation is carried out within a theoretical framework known as the "risk-neutral" universe.

It is in this sense that Economic Scenario Generators (ESG) are needed to stochastically simulate and project over a defined time horizon the financial factors to which an insurance organization is exposed. By financial factors we mean : interest rates, real estate and equity yields, and inflation.

The choice of model to represent each of the financial factors is an important one, and can lead to significant differences in the calculation of the *Best Estimate*. In addition, models must be chosen to correctly represent the portfolio we are going to project, while complying with the requirements of the Solvency 2 directive.

With this in mind, we're going to create four model combinations to represent the life insurance portfolio at our disposal, and determine which is the best.

The procedure we will follow is as follows :

- Theoretical study of selected models
- For greater clarity and visibility of the codes, full realization of model dynamics, calibration and martingality and market-consistency tests.
- After validating the dynamics of the four model combinations, we implement them in an active-passive model
- Analysis and comparison of model leakage, *Best Estimate* and TVFOG.

Rate modeling

The first choice was the one-factor Hull & White model (HW1F), which is part of the Heath, Jarrow and Morton (HJM) framework and reproduces the structure of the yield curve thanks to the no arbitrage opportunity property. For the second choice, we opted for the LIBOR Market Model (with its displaced version, the Displaced Diffusion LIBOR

Market Model). This market model models a set of forward rates (the LIBOR forward rate), whose main advantage is that they can be observed directly on the market.

These two models were calibrated on a matrix of At the Money (ATM) swaptions extracted from Bloomberg, from which we deduced normal and lagged volatilities. The aim is to minimise the distance between the market volatilities and those of the models using the least squares method.

In the case of the HW1F model, two parameters need to be calibrated : κ the mean reversion speed and σ the volatility. To carry out this calibration we used the trinomial tree method. In the case of the DDLMM, five parameters need to be calibrated : a, b, c, d the four volatility model parameters and β the correlation structure parameter. We used the Nelder-Mead algorithm to perform this calibration.

HW1F		DDLMM				
κ	σ	a	b	c	d	β
0,025	0,97%	0,126	0,015	0,214	0,053	0,113

After diffusion with these parameters, we can apply the martingality and *market-consistency* tests to check that our projections are correct. For the martingality test, the largest gap appears at over 45 years in both cases, with 0.03% for the HW1F model and 0.65% for the DDLMM. The mean errors are respectively 1.74×10^{-4} and 3.40×10^{-3} . This gives a perfect reproduction of the yield curve in both cases.

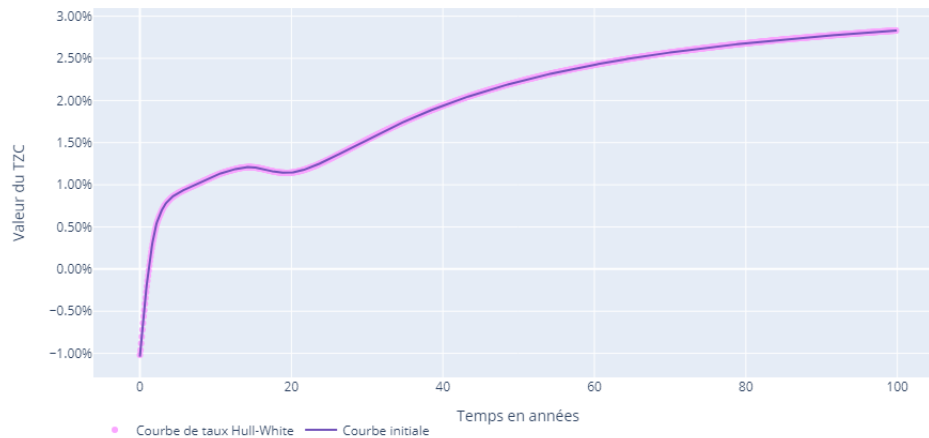


FIGURE 5 – Rate curve reproduced by HW1F vs initial rate curve

For the *market-consistency* test, the results are suitable for both models. However, a better performance is expected for the DDLMM, given the discrepancies between theoretical and calibrated volatilities. We obtain a mean error on all tenors for the DDLMM of 5.1% versus 7.40% for the HW1F model.

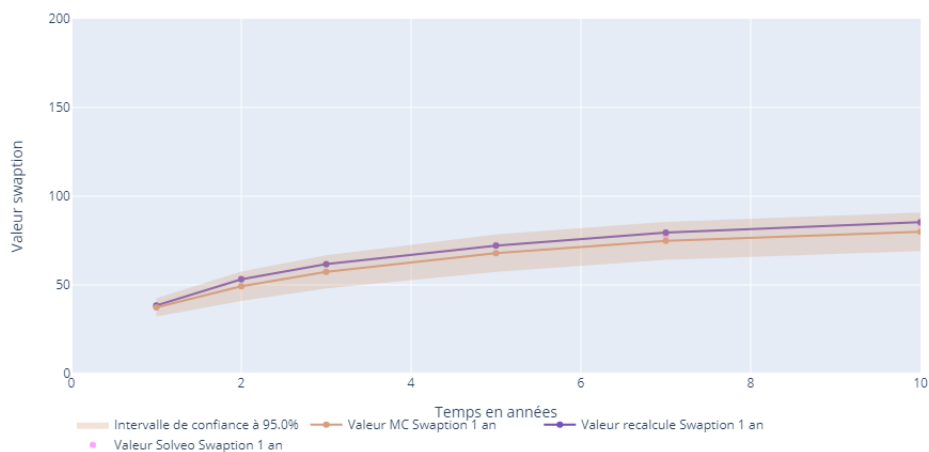


FIGURE 6 – Repricing swaption Tenor 1 an DDLMM

Inflation modeling

To model inflation, we decided to use the Fisher relationship, which allows inflation to be deduced from the difference between the nominal rate and the real rate. We recovered OATi values in order to extract real rate values. After extracting and interpolating the real rate curve, we simulated it with the Vašíček model. This model was chosen because of its simplicity and its ability to produce negative rates without reproducing a particular yield curve. We calibrated the three parameters (a, b, σ respectively the speed of return to the mean, the long-term average and volatility) of this model in such a way as to minimise the distance between the rates extracted from the OATi and the rates simulated by Vašíček. The calibration results obtained are as follows :

Vašíček			
b	a	σ	$r_r(0)$
0,017	0,174	0,032	-0,024

We then apply Fisher's relation to the nominal rate curves modelled with the HW1F model and the DDLMM and the real rate curve obtained with the Vašíček model. In both cases, we obtain an inflation value of between 2% and 2.5%, which is in line with the ECB's expectations.

Equity and real estate index modelling

The first methodology used to model the equity index and real estate was to use the Black & Scholes model with deterministic volatility. However, due to the limitations of this model, we decided to use a second method to model the equity index : the Merton jump model. The advantage of this model is that it adds a more realistic dimension by incorporating the presence of financial market jumps. For the latter, we calibrated the jump parameters (m, v, λ respectively the average size of a jump, the volatility of the size of a jump and the average number of jumps per unit of time) on a history of monthly CAC40 data. The local volatilities σ_t of the two models are calibrated directly on observable Call prices on the market. Before presenting the martingality and *market-consistency* tests for the two models, it should be noted that the Merton jump model is highly dependent on the random seed used, which may have an impact on the results of the validation tests. We therefore decided to create an algorithm that calculates the squared error to recover optimal seeds.

The martingality test was validated for both models, with a confidence interval set at 95%. The maximum error for the Black & Scholes model is 6.57% with an average error of 2.51%, while the maximum error for the Merton model with jumps (due to the presence of jumps) is higher at 18.11% with an average error of 6.32%.

The results of the *market-consistency* tests are also validated for both models with the implementation of a 95% confidence interval. The maximum error of 12.03% and the mean error of 5.69% for the Black & Scholes model allow the test to be validated. However, in the case of the Merton model, we note that the maximum error is 28.43% after 45 years. Nevertheless, the average error of 7.95% allows us to accept the test.

Results

We obtained 4 combinations of models (presented as follows Rates-Inflation-Shares-Immo and noting BS the Black & Scholes model) :

- GSE HW1F-BS composed of HW1F-Fisher-BS-BS
- GSE HW1F-Merton composed of HW1F-Fisher-Merton-BS
- GSE DDLMM-BS composed of DDLMM-Fisher-BS-BS
- GSE DDLMM-Merton composed of DDLMM-Fisher-Merton-BS

We will first analyse the model leakage generated by each GSE tested. Then, we will measure the impact of this drift in the selected indicators and the result of these indicators by GSE studied. Finally, we will conclude which is the optimal GSE to use in this study.

Model leakage / Drift

Over the 50-year projection horizon and for 1000 simulations, we obtain the following results :

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
$\delta_{\text{moy}}/\text{an}$ (en %VM)	0,00529%	0,00982%	0,08488%	0,09075%

TABLE 3 – Model leakage for the 4 GSEs carried out

Acceptance intervals set out by the ACPR :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \leq 0,2\%VM & : \text{Calculation accepted} \\ 0,2\%VM < \delta \leq 0,5\%VM & : \text{Calculation accepted but revised for next year} \\ 0,5\%VM < \delta & : \text{Correction} \end{array} \right.$$

The model leakage results for our 4 GSEs are all within the criterion $\delta \leq 0,2\%$. This implies that our GSEs have been correctly performed without any errors in mathematical choices or programming.

Nevertheless, we can see that the drift results with the DDLMM are greater than those achieved with the HW1F model. This increase in the DDLMM model leakage can be explained by the fact that we used market prices and a yield curve that could be negative. This consideration of negative rates is introduced by the yield curve shift factor $h = 5\%$ not present in the HW1F model. According to the article by F.Planchet & K.Armel [17], the DDLMM model diverges during calibration on swaptions when a lag factor is added, however small. They prefer to consider a non-textitmarket-consistent parameterisation to value euro savings contracts.

Best Estimate

As the values of our drifts are all positive, they are included in the *Best Estimate*.

From now on, the *Best Estimate* values are those of the total portfolio and no longer only those of the euro contracts. Nevertheless, this reflects the same vision as if we were only looking at the values of euro products because the *Best Estimate* of unit-linked products are similar for all GSEs.

We can see that once again the projection with the Merton model gives a much greater dispersion of values compared to the Black & Scholes model, whatever the rate model.

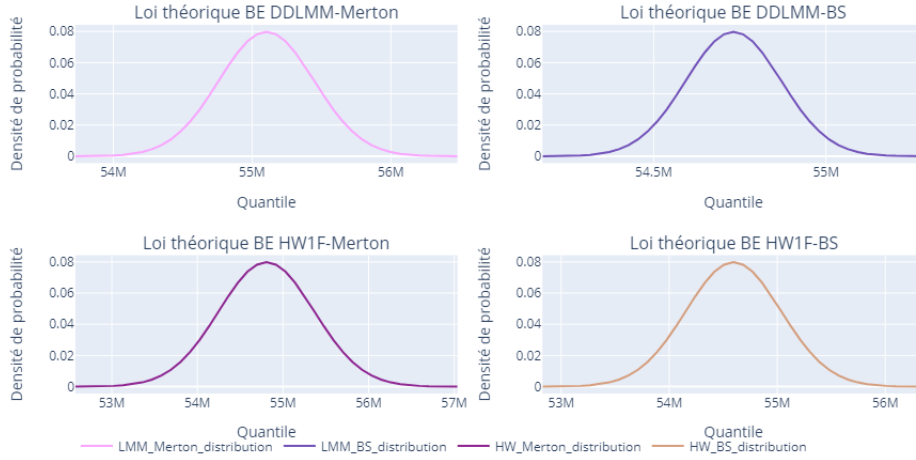


FIGURE 7 – Theoretical law of total *Best Estimate* (taking into account UC products) for each GSE

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
Ecart-Type (en k€)	13 980 809	17 644 493	4 384 378	10 890 029

TABLE 4 – Statistics on the distribution of the total *Best Estimate* of each portfolio (including unit-linked products)

We can see that the standard deviations between the HW1F and DDLMM models are quite large. This phenomenon is intrinsic to the models used : the DDLMM captures a volatility structure that allows for greater flexibility and more accurate simulations, whereas the HW1F model has a constant volatility parameter.

Similarly, the DDLMM uses a correlation structure $\rho_{ij}(t) = e^{-\beta|T_i - T_j|}$ which implies that it decreases between two distant dates whereas the HW1F model has an implicitly constant correlation.

Finally, the HW1F model has a mean-reverting parameter κ which implies that if rates deviate from the mean in the long term, they will tend to return to it over time. This tendency can introduce a larger variation in the standard deviation.

Since the HW1F model has a larger standard deviation of scenarios, it can capture extreme scenarios that will not be present in the DDLMM framework.

Time Value of Financial Options and Guarantees

We observe fairly large differences in TVFOG between each of the models. Depending on the model chosen, the insurer will increase the *Best Estimate* by up to 792945k€ in

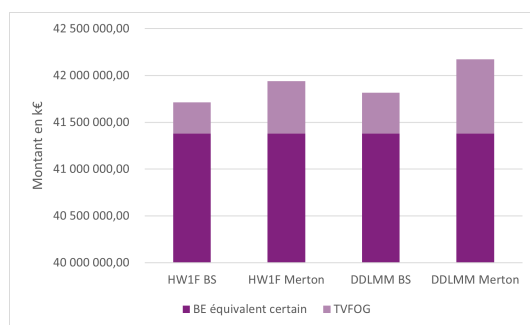


FIGURE 8 – *Best Estimate* & TVFOG for the four GSEs

the case of the DDLMM-Merton GSE. We note that the TVFOG are higher with the DDLMM whatever the equity model.

This phenomenon is linked to the volatility structure captured by the DDLMM, which reproduces the market better than that of the HW1F model. The DDLMM has smaller extremes than the HW1F model but it has less asymmetric information thanks to this volatility structure. This model has more values above the *Best Estimate equivalent certain* and therefore higher *Best Estimate* and TVFOG. The DDLMM therefore allows us to capture a greater number of extreme scenarios, whereas the HW1F model allows us to capture more extreme but fewer scenarios.

The impact of the Merton jump model is reflected here as it involves more extreme scenarios in greater numbers, which will increase the cost of the customer's financial guarantees and options.

We have seen that model leakage is impacted by each of the components of our models. The best reproduction of the yield curve is obtained with the HW1F model, which minimizes model leakage. On the other hand, the impact of a specific stock model remains minimal. Next, we studied the values of *Best Estimate*. The Merton model shows more dispersed values due to its higher volatility than the Black & Scholes model. We found that the analysis of standard deviations and TVFOG revealed an interesting phenomenon. The DDLMM model, by reproducing the market's volatility structure, offers the flexibility to obtain more accurate simulations (with fewer extremes) and less asymmetry. As a result, the DDLMM is able to capture a greater number of extreme scenarios, while the HW1F model is better able to capture more extreme scenarios, but with less frequency.

Combining these results, it appears that, given the models' limitations, our hypothesis of using the HW1F-Merton GSE is confirmed. It is the GSE that enables us to find the best compromise between caution on extreme scenarios while minimizing model leakage.

Limits and openings

It should be noted that we've focused on a particular life insurance portfolio, but that the entire project is adaptable and can be used on any portfolio.

Nevertheless, there are a number of limitations to our study. The first is the technical nature of the calibration. Due to the presence of local minima, calibration of the DDLMM was complex. Further calibration of the DDLMM's volatility and correlation model could improve its final results. Similarly, the integration of the lag parameter and the calibration on swaption values that took place in a negative context led to certain biases that would not have occurred in an environment with positive rates.

The second issue concerns the inflation model. The integration of the Jarrow-Yildirim model could be a correction to the risk-neutrality concerns of the Fisher relationship. It would also have been interesting to use products other than OATi to extract the real yield curve, such as *Zero Coupon Inflation Indexed Swap* which can be found on Bloomberg, in larger quantities than OATi and with the possibility of deducting the real zero-coupon price from the nominal zero-coupon price.

In addition, we should point out a problem with the choice of optimal seeds for the Merton model with jumps, which calls into question the pseudo-random nature that any ESG must respect. Despite the fact that we have created a group of optimal seeds, a possible solution would be to create a larger set of optimal seeds, so as to preserve the notion of pseudo-randomness.

In addition, it is important to note that the parameters of this model have been calibrated on CAC40 data. Using another index to calibrate the jump parameters could help make the results more robust.

However, despite the limitations found, we set up several combinations of different financial factor models and verified their implementation. We were able to see the impact of different interest rate and equity models on the results of an ALM model. We were able to see that the choice of a ESG is important and a major task for an insurance organization, as it enables phenomena such as extreme scenarios or model leakage to be captured. That it is important to understand the choice of parameters, assumptions and calibrations to comply with regulatory constraints, and that the wrong choice can have consequences for the evaluation of Solvency 2 aggregates.

To take things a step further, we want to set up a tool in the form of a graphical interface that will give us an overview of the calibrations and controls for each model.

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte et généralités sur les Générateurs de Scénarios Économiques	3
1.1 Contexte	3
1.2 Univers risque neutre	4
1.3 Génération des aléas	5
1.4 Variables antithétiques	6
1.5 Modélisation de la dépendance	7
1.6 Tests de validation et d'acceptation d'un GSE	7
1.6.1 Test de martingalité	7
1.6.2 Test de <i>market-consistency</i>	8
1.6.3 Implémentation statistique et approbation d'un GSE	8
1.7 Produits financiers	9
1.7.1 Généralités	9
1.7.2 Options & OATi	11
1.7.3 Numéraire & Risque neutre	12
2 Modélisation des taux	15
2.1 Enjeux	15
2.2 Hull & White à un facteur (HW1F)	16
2.2.1 Présentation du modèle	16
2.2.2 Calibration du modèle	17
2.3 LIBOR Market Model (LMM)	20
2.3.1 Présentation du modèle	20
2.3.2 Calibration du modèle	23
2.4 Validation des modèles	26
2.4.1 Test de martingalité	26
2.4.2 Test de <i>market-consistency</i>	29
2.5 Comparaison des résultats inter-modèles & vision critique	32
3 Modélisation de l'inflation	33
3.1 Enjeux	33
3.2 Relation de Fisher	33

3.2.1	Taux réels par Vašíček	34
3.2.2	Validation du modèle, vision critique & ouverture	35
4	Modélisation de l'indice action & immobilier	39
4.1	Enjeux	39
4.2	Black & Scholes à volatilité déterministe	39
4.2.1	Présentation du modèle	39
4.3	Merton à sauts	40
4.3.1	Présentation du modèle	40
4.4	Validation des modèles	42
4.4.1	Test de martingalité	42
4.4.2	Test de <i>market-consistency</i>	44
4.5	Comparaison des résultats inter-modèles & vision critique	46
5	Comparaison & analyse des GSE réalisés	49
5.1	Indicateurs étudiés	49
5.1.1	Fuite de modèle / Dérive	49
5.1.2	<i>Best Estimate</i>	50
5.1.3	<i>Time Value of Financial Options and Guarantees</i>	50
5.2	Présentation du portefeuille étudié et du modèle utilisé	51
5.2.1	Présentation générale	51
5.3	Résultats	52
5.3.1	Fuite de modèle / Dérive	52
5.3.2	<i>Best Estimate</i>	53
5.3.3	<i>Time Value of Financial Options and Guarantees</i>	55
6	Conclusion, limites & ouverture	57
	Tables des figures	60
	Liste des tableaux	61
	Bibliographie	63
A	Aléas et dépendance	65
A.1	Variables antithétiques	65
A.2	Aléas corrélés	65
B	Validation et acceptation d'un GSE	67
B.1	Test de Kolmogorov	67
B.2	Seuil d'erreur	67
C	Produits financiers	69
C.1	Formule d'Itô	69

D	Discrétisation	71
	D.1 Discrétisation exacte	71
	D.2 Schéma d'Euler	71
E	Calibration	73
	E.1 Méthode de Newton-Raphson	73
	E.2 Arbres trinomiaux HW1F	73
	E.3 Algorithme de Nelder-Mead	75
F	Résultats DDLMM	77
	F.1 Inflation	77
	F.2 Actions	78
	F.2.1 Test de martingalité	78
	F.2.2 Test de <i>market-consistency</i>	79
G	Exemples de résultats avec la courbe de taux de décembre 2022	81

Introduction

Dans le contexte de la réglementation Solvabilité 2, il est nécessaire d'évaluer l'actif et le passif d'un organisme d'assurance en valeur de marché, c'est le principe de *market-consistency*. De plus les différentes options présentes dans les contrats en fonds euro doivent être incluses de manière adéquate dans le calcul du *Best Estimate*.

Pour répondre à ces exigences réglementaires, le recours à l'utilisation des Générateurs de Scénarios Économiques est indispensable. En effet, ils permettent de générer des simulations stochastiques et de projeter les facteurs financiers et économiques tels que les taux d'intérêts, l'inflation, les rendements des obligations, de l'immobilier et des actions.

Ce mémoire a pour objectif d'exposer la création de quatre Générateurs de Scénarios Économiques risque neutre et de déterminer l'optimal pour une compagnie d'assurance vie spécifique. Pour cela, ce mémoire se décomposera en trois grandes parties.

Le premier segment de ce mémoire explicite les éléments qui sont indispensables à la compréhension du sujet. Il permet de s'approprier le concept de Générateurs de Scénarios Économiques et de comprendre les points essentiels pour l'encadrer et le concevoir. Il disposera également d'une présentation des différents tests de validation et d'acceptation effectués afin de répondre aux besoins réglementaires de Solvabilité 2. Enfin, une description du socle mathématiques et financiers, employées pendant toute l'étude, permettra de conclure ce premier axe sur les bases essentielles à la compréhension de ce mémoire.

Le deuxième segment de notre étude se focalise sur les différents modèles utilisés pour représenter les quatre facteurs financiers mentionnés. Dans un premier temps, nous examinerons deux modèles de taux d'intérêt, à savoir le modèle Libor Market et le modèle Hull & White à un facteur. Nous analyserons l'importance de leur modélisation, ainsi que les méthodes utilisées pour leur calibration et leur validation des tests. Par la suite, nous nous consacrerons sur la modélisation de l'inflation en utilisant la relation de Fisher, et nous expliquerons comment extraire une courbe de taux réels. Ensuite, nous nous intéresserons à la modélisation de cette courbe avec le modèle de Vašíček. Nous clôturons cet axe en abordant les modèles action et immobiliers. Pour l'indice immobilier, nous utiliserons le modèle de Black & Scholes avec une volatilité déterministe. Quant aux actions, nous utiliserons à la fois le modèle de Black & Scholes avec une volatilité

déterministe et le modèle de Merton avec sauts. Dans chaque cas, nous examinerons en détail les implications de ces modèles, comment ils sont calibrés et la validation des tests.

Le dernier segment de notre étude consiste à tester les scénarios générés précédemment à un organisme d'assurance vie, à l'aide d'un modèle ALM. Tout d'abord, nous présenterons la compagnie étudiée et les indicateurs permettant de comparer nos résultats. Ensuite, nous analyserons les résultats obtenus lors de l'introduction de ces scénarios dans le modèle actif-passif. Nous nous concentrerons particulièrement sur la valeur de dérive des modèles utilisés, sur les *Best Estimate* et sur la TVFOG (*Time Value of Financial Options and Guarantees*). L'objectif est de comprendre l'impact de nos quatre combinaisons de modèles sur le portefeuille d'assurance vie et de démontrer l'importance de choisir une combinaison appropriée. Nous finirons en choisissant la combinaison adaptée pour ce portefeuille.

Chapitre 1

Contexte et généralités sur les Générateurs de Scénarios Économiques

1.1 Contexte

Les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) sont une nécessité pour appréhender les risques auxquels sont exposées les compagnies d'assurance. Ils permettent de répondre aux exigences réglementaires et comptables, notamment pour l'évaluation des indicateurs Solvabilité 2. Le GSE est un groupement de modèles de facteurs financiers et économiques auxquels l'assureur fait face. Il permet de simuler stochastiquement ces facteurs financiers et économiques et de les projeter à un horizon de temps défini.

On entend par facteurs financiers et économiques : les taux d'intérêts, les rendements obligataires, immobiliers et d'actions ainsi que l'inflation. L'utilisation d'une modélisation stochastique permet d'évaluer le coût de certaines options des contrats d'assurance vie qui n'est pas mesurable sur une trajectoire déterministe. Le stochastique permet de générer des trajectoires qui ont en réalité une probabilité très faible de se produire.

La création d'un GSE nécessite de mettre en place des éléments importants au fonctionnement des différents modèles. Tout d'abord, nous allons introduire le cadre de travail de la directive Solvabilité 2 : l'univers risque neutre.

Puis, sachant que les GSE nécessitent la génération d'un volume important de nombres aléatoires dû à l'utilisation des trajectoires stochastiques, nous étudierons leur génération et par la suite un moyen de diminuer la variance de ces aléas.

Nous présenterons également la manière dont nous modéliserons les dépendances entre les différentes valeurs projetées. Une fois nos facteurs projetés et tenant compte de leur corrélation, nous réaliserons des tests de validation et d'acceptation sur nos GSE.

Enfin la calibration et la représentation des facteurs de risque d'un GSE nécessitent de comprendre le fonctionnement de produits financiers qui seront donc présentés à la fin de cette partie.

1.2 Univers risque neutre

Nous avons choisi une approche "*risque neutre*" qui correspond à un cadre théorique sous le référentiel de la directive Solvabilité 2 et qui est recommandé pour une évaluation "*market consistent*".

On peut alors valoriser les instruments en ignorant les primes de risque c'est à dire qu'on les considère toutes nulles. Dans la réalité, la prime de risque vise à rémunérer le risque pris, elle doit donc être prise en compte lors de l'actualisation des flux.

L'approche "*risque neutre*" permet de capter les effets uniquement liés au sous-jacent observé, sans impliquer l'aversion au risque et les biais comportementaux de l'investisseur.

L'univers *risque neutre* repose sur deux hypothèses fondamentales :

- L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) qui exprime le fait qu'il n'existe pas de moyen pour un investisseur de réaliser un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive tout en étant certain de ne pas subir de perte pour un capital investi initialement nul.
- La complétude des marchés financiers qui est atteinte si et seulement s'il existe un portefeuille autofinçant qui peut répliquer tous les cash-flows futurs d'un portefeuille donné, composé d'un ensemble d'actifs sans risque et risqués, générant à l'échéance les mêmes flux de trésorerie qu'à l'initial.

Dans la réalité, l'hypothèse de non arbitrage peut être considérée comme vérifiée sur les marchés liquides malgré de légers écarts présents mais négligeables. Cependant, son unicité vient du fait que les marchés sont complets or ceci n'est souvent pas le cas car on peut avoir plusieurs prix possibles pour un même actif.

En combinant ces deux hypothèses, il existe alors une unique probabilité sous laquelle le prix actualisé d'un actif est une martingale. On notera la mesure associée, la mesure "*risque neutre*" \mathbb{Q} .

On peut noter deux autres conséquences utiles de la mesure "*risque neutre*" :

- Sous cette mesure, tous les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque
- Elle est équivalente au sens des probabilités à la mesure historique, notée \mathbb{P} . Les deux mesures s'accordent sur les événements dont la mesure est nulle. Mathématiquement :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \quad (1.1)$$

Une description de la partie mathématique autour de l'univers "*risque neutre*" sera traité dans la partie 1.7.3

Après avoir introduit ce cadre, les éléments à la base de la structure d'un GSE vont être repris un à un en commençant par la génération des aléas.

1.3 Génération des aléas

La création de nombreux scénarios nécessite une utilisation importante de nombres aléatoires. Pour cela, nous allons utiliser un générateur de nombre pseudo-aléatoire. Il en existe de nombreux dans la littérature comme :

- Mersenne-Twister
- Box-Muller
- ACORN (Additive Congruential Random Numbers)

Leur fonctionnement peut se résumer en quelques étapes simples :

1. Initialisation d'une graine c'est à dire un nombre initial. Dans notre cas, nous avons récolté un ensemble de graines optimales pour éviter certaines valeurs dans notre processus à sauts.
2. Génération au hasard de nombres à l'aide d'une fonction de transfert propre à chaque générateur.
3. Conversion, grâce à une fonction de sortie, des nombres pseudo-aléatoires en réels compris dans l'intervalle $[0, 1]$ qui représentent alors des variables aléatoires i.i.d uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$.

Dans notre cadre, il est nécessaire d'avoir un générateur rapide, avec une période élevée permettant de générer des nombres équi-répartis. Le générateur de Mersenne-Twister répond à ces critères, des présentations plus détaillées peuvent être retrouvées dans le cours de V.NOZICK [15] et dans les résultats du groupe de travail de l'ISFA [9] :

- Période de $2^{19937} - 1$.
- Uniformément distribué sur une grand nombre de dimensions.
- Plus rapide que la plupart des autres générateurs.
- Générateur présent dans le package `numpy` de Python

La génération de ces aléas combinée à la méthode de Monte Carlo qui nécessite une grande quantité de trajectoires stochastiques, implique une variance importante dans nos résultats. Pour réduire la variance des aléas générés, nous allons présenter la méthode des variables antithétiques dans la partie suivante.

1.4 Variables antithétiques

Les énoncés qui suivent proviennent du cours sur la simulation de processus stochastiques délivrés à EURO Institut d'Actuariat [16].

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ et $(Y_i)_{i \geq 1}$ des suites de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une espérance finie. Cette méthode va nous permettre d'améliorer les résultats de la méthode de Monte Carlo (cf l'annexe A.1) en trouvant une moyenne $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ qui converge vers $\mathbb{E}[X_1]$ mais avec une variance plus faible que $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$.

Supposons que $X_i = g(Y_i)$ et que Y_i a la même loi que $\psi(Y_i)$ pour une fonction appropriée ψ sous l'hypothèse d'iid, pour $Y_i, i \geq 1$ et sous l'existence de $\mathbb{E}[g(Y_1)]$, On a :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(Y_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[g(Y_1)] = \mathbb{E}[X_1]$$

et

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\psi(Y_i)) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[g(\psi(Y_1))] = \mathbb{E}[g(Y_1)] = \mathbb{E}[X_1]$$

On définit

$$\bar{S}_{2N} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (g(\psi(Y_i)) + g(Y_i)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(Y_i),$$

avec $h(x) = \frac{g(\psi(x)) + g(x)}{2}$.

On a $Var(\bar{S}_{2N}) = \frac{1}{N} Var(\frac{g(Y_1) + g(\psi(Y_1))}{2}) = \frac{1}{4N} Var(g(Y_1) + g(\psi(Y_1)))$.

$$Var(\bar{S}_{2N}) = \frac{1}{4N} (Var(g(Y_1)) + Var(g(\psi(Y_1))) + 2Cov(g(Y_1), g(\psi(Y_1))))$$

$$Var(\bar{S}_{2N}) = \frac{1}{2N} (Var(g(Y_1)) + Cov(g(Y_1), g(\psi(Y_1))))$$

Donc $Var(\bar{S}_{2N}) < \frac{1}{2} Var(\bar{X}_{2N})$ si $Cov(g(Y_1), g(\psi(Y_1))) < 0$.

Il faut donc s'assurer de la négativité de la covariance.

Dans le cas où $Y = (W_s)_{s \geq 0}$ est un mouvement brownien¹, alors Y a la même loi que $-Y$. On a donc :

$$\bar{S}_{2N} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (g((W_s^{(i)})_s) + g((-W_s^{(i)})_s)).$$

Maintenant que nous avons généré nos aléas et que nous savons comment nous allons réduire la variance de nos projections, nous devons corrélérer ces aléas entre eux car tous les actifs projetés sont connectés de manière intrinsèque. C'est ce que nous verrons dans la partie qui suit.

1. Le lecteur peut trouver une définition du mouvement brownien dans le cours de Renaud Bourles [4]

1.5 Modélisation de la dépendance

La modélisation de la dépendance entre les facteurs de risques du portefeuille va être réalisée de la façon suivante. Elle s'inscrit dans le cadre de la formule standard de la directive Solvabilité 2 et consiste à utiliser une matrice de corrélation entre les différents facteurs de risques. L'utilité de cette méthode repose sur le fait que nous pouvons la combiner avec la décomposition de Cholesky pour obtenir des aléas corrélés et donc des actifs corrélés (cf l'annexe A.2). Les limites de cette méthode résident dans le fait qu'elle n'est pas adaptée pour estimer des dépendances non linéaires et celles de queues liées aux valeurs extrêmes.

Maintenant que nous avons examiné les prérequis nécessaires avant la diffusion des trajectoires, nous allons présenter les méthodes de validation de nos projections. Pour ce faire, nous suivrons les recommandations de l'ACPR et de l'Institut des Actuaire, qui sont détaillées dans deux documents spécifiques[1][2].

1.6 Tests de validation et d'acceptation d'un GSE

Les tests de validation d'un GSE revêtent une importance cruciale.

En effet, en raison de l'utilisation du stochastique, des erreurs d'implémentation humaines et de la complexité de la calibration, les résultats des trajectoires générées peuvent parfois être incohérents et difficiles à exploiter.

Ainsi, les étapes de validation visent à vérifier la cohérence et l'exploitabilité des résultats produits par le GSE.

Ces tests permettent de s'assurer de la robustesse du générateur de scénarios et d'évaluer la qualité des projections économiques fournies. Ces validations sont essentielles pour garantir la fiabilité et la pertinence des résultats obtenus. Il y a 3 points principaux à valider sur les trajectoires :

- La risque neutralité en appliquant un test de martingalité
- La reconstitution des prix utilisés pour le calibrage en réalisant un test de *market-consistency*
- Vérifier que l'implémentation statistique est correcte

Ces éléments sont présentés ci-après.

1.6.1 Test de martingalité

Pour réaliser ce test, il faut confirmer que les prix actualisés des actifs sont martingales² c'est à dire qu'en moyenne la valeur d'un actif au temps $t = T$ multiplié par le

2. Le lecteur peut se référer à la partie 28.3 du livre de John.C Hull[8] pour la définition d'une martingale

déflateur associé est égale à la valeur de cet actif au temps $t = 0$. En se plaçant dans l'univers risque neutre \mathbb{Q} nous avons :

$$\forall t, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(0, t) \times S_t] = S_0 \quad (1.2)$$

En notant ici, $D(0, t)$ le déflateur (l'expression sera développée dans la partie 1.7.1) et $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique.

Ce test sera développé pour chaque facteur financier que nous verrons par la suite.

1.6.2 Test de *market-consistency*

Ce test consiste à effectuer repricing de Monte-Carlo c'est à dire qu'on va essayer de retrouver le prix réel du marché en utilisant les prix calculés pour chaque simulation. On peut définir ce test de la même manière que dans le document d'orientation de l'Institut des actuaires [2].

Notons $I \in \mathbb{N}$ le nombre d'instruments utilisés dans le calibrage. On note aussi pour chaque instrument $i \in [1, I]$ P_i^M son prix sur le marché en $t = 0$:

$$P_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{n,i} \times K_{n,i}, 1 \leq i \leq T. \quad (1.3)$$

où $K_{n,i}$ représente le pay-off de l'instrument i pour le scénario n et $D_{n,i}$ le déflateur associé.

Si les trajectoires respectent la condition alors $P_i = P_i^M$ est vérifiée pour chaque instrument i .

1.6.3 Implémentation statistique et approbation d'un GSE

On note trois points importants pour valider notre générateur, le détail se trouve en annexe B :

- Indépendance et normalité des lois utilisées pour la construction des trajectoires basées sur des mouvements browniens (cf l'annexe B.1)
- Seuil d'erreur (cf l'annexe B.2)
- Intervalles de confiance.

Nous avons parlé de repricing de produits financiers pour le test de *market-consistency*, nous verrons donc maintenant le socle financier utile à la calibration et à la comparaison des résultats finaux.

1.7 Produits financiers

Cette partie a pour but d'être descriptive. Elle va nous permettre d'exposer les diverses notions que nous allons utiliser par la suite dans nos modèles que ce soit pour la construction ou bien la calibration. On peut retrouver les éléments cités ci-dessous dans le livre de Brigo & Mercurio [6] et dans celui de Dana & Jeanblanc [10].

1.7.1 Généralités

On assume l'existence d'un taux sans risque : $r(t)$ qui est la valeur entre $[t, t + \Delta]$ pour emprunter/prêter.

Définition 1 (Bank account). $r(t)$ est le taux court du Bank account c'est à dire :

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{B(t)} = (1 + r(t))^{\Delta t} - 1 \approx r(t)\Delta t \quad (1.4)$$

On définit $B(t)$ comme la valeur d'un compte bancaire au temps $t \geq 0$ avec $B(0) = 1$. elle suit l'équation différentielle :

$$dB(t) = r_t B(t) dt$$

En appliquant la formule d'Itô (cf l'annexe C.1) à $\ln(B(t))$,

$$\Leftrightarrow B(t) = B(0)e^{\int_0^t r_s ds} = e^{\int_0^t r_s ds} \quad (1.5)$$

Définition 2 (Déflateur/Facteur d'actualisation stochastique). Un déflateur $D(t, T)$ entre deux temps t et T est le montant en date t qui est équivalent à une unité monétaire payable à la date T . On le note $D(t, T)$ avec :

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = e^{-\int_t^T r_s ds} \quad (1.6)$$

Définition 3 (Obligation zéro coupon). Une obligation ZC est la valeur à l'instant t du contrat de livraison d'une unité de monnaie à l'instant T sans aucun paiement intermédiaire. On note $P(t, T)$ sa valeur à l'instant $t < T$ et $P(T, T) = 1$.

On remarque qu'en utilisant la propriété de martingalité sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , on a :

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(t, T) \times P(T, T) | \mathcal{F}_t] \\ \Leftrightarrow P(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Et si r est déterministe alors $P(t, T) = D(t, T)$.

Définition 4 (Taux spot continu/simple). Le taux spot continu/simple à l'instant t pour l'échéance T est noté $R(t, T)/L(t, T)$ et représente le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unités de monnaie à l'instant t s'accumule continuellement/proportionnellement pour produire un montant unitaire de monnaie à l'échéance T , on a alors :

En temps continu,

$$R(t, T) := -\frac{\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)} \quad (1.8)$$

En temps discret,

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \quad (1.9)$$

avec $\tau(t, T) = T - t$.

Remarque : $L(t, T)$ est le taux Libor.

Définition 5 (Taux forward). Le taux forward évalué au temps t pour une expiration $T > t$ et de maturité $S > T$ est noté $F(t, T, S)$ et vaut :

$$F(t, T, S) := \frac{1}{\tau(T, S)} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right) = \frac{P(t, T) - P(t, S)}{\tau(T, S)P(t, S)} \quad (1.10)$$

Définition 6 (Contrat FRA). C'est un contrat forward défini en t pour une expiration $T > t$ de maturité $S > T$ qui garantit à l'acheteur un taux fixe K en S contre le paiement à cette date du taux spot $L(T, S)$ fixé en T . La valeur du contrat en S est :

$$N\tau(T, S)(K - L(T, S))$$

et la valeur totale du contrat à n'importe quel temps t :

$$\mathbf{FRA}(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N [P(t, S)\tau(T, S)K - P(t, T) + P(t, S)]$$

Définition 7 (Taux forward instantané). Le taux forward instantané déterminé au temps t de maturité $T > t$ est noté $f(t, T)$ et défini par :

$$f(t, T) := \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{P(t, T) - P(t, S)}{\tau(T, S)P(t, S)} = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T} \quad (1.11)$$

Remarque : On a alors $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$.

Définition 8 (Contrat swap forward). Ces contrats sont une généralisation des contrats **FRA** présentés ci-dessus. On se met dans le cas d'un contrat swap receveur. C'est un contrat payant à son détenteur un taux fixe $N\tau_i K$ contre le taux spot $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$ à toutes dates $T_i, i \in \{\alpha + 1, \dots, \beta\}$ de maturité T_α et de ténor $T_\beta - T_\alpha$, il peut s'exprimer :

$$\begin{aligned} RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \mathbf{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, \tau_i, N, K) \\ &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) \\ &= N [P(t, T_\beta) - P(t, T_\alpha) + \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) K \tau_i] \end{aligned}$$

Définition 9 (Taux swap forward). *Le taux swap forward $S_{\alpha,\beta}(t)$ en t pour les ensembles de temps \mathcal{T} et fractions d'années τ est le taux fixe K pour lequel le contrat swap forward $RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = 0$, on obtient alors :*

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (1.12)$$

Remarque : si on évalue le taux swap forward en $T_\alpha = t$ alors on a le taux swap $S_\beta(t)$ tel que :

$$S_\beta(t) = \frac{1 - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

1.7.2 Options & OATi

On présentera ici les produits optionnels que nous allons utiliser pour calibrer nos modèles sur les taux et les actions et par la suite les obligations utilisées pour l'inflation.

Définition 10 (Option). *Une option est un contrat entre deux contreparties qui donne le droit d'acheter/vendre une quantité d'actifs sous-jacents pendant un certain temps et à un prix fixé au préalable.*

Il en existe de multiples mais les plus connues sont l'option européenne (exercice à maturité seulement pour l'acheteur) et l'option américaine (exercice possible quand l'acheteur veut jusqu'à maturité comprise). Les options peuvent être de 3 types :

- *In the money*, si le cours du sous-jacent dépasse le prix d'exercice,
- *At the money*, si le cours du sous-jacent est égal au prix d'exercice,
- *Out the money*, si le cours du sous-jacent n'atteint pas le prix d'exercice.

1.7.2.1 Taux

Définition 11 (Swaption européenne). *Une swaption européenne donne le droit d'entrer dans un swap à une date future. Elle peut être **payeuse** ou **receveuse**, le fonctionnement est similaire dans les deux cas. Le propriétaire peut mettre en place un swap **payeur/receveur** en T_α de ténor $T_\beta - T_\alpha$ au taux fixe K en échange du taux Libor forward.*

$$\begin{cases} \text{Payoff actualisée payeuse} & : ND(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \\ \text{Payoff actualisée receveuse} & : ND(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (K - F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i)) \right)^+ \end{cases} \quad (1.13)$$

1.7.2.2 Actions

Définition 12 (Call/Put). *Un call/put est une option d'achat/vente sur un sous-jacent S à un prix d'exercice K à l'échéance T .*

$$\begin{cases} \text{Payoff acheteur Call européen} & : (S_T - K)^+ \\ \text{Payoff acheteur Put européen} & : (K - S_T)^+ \end{cases} \quad (1.14)$$

1.7.2.3 Inflation

Les informations concernant ce paragraphe proviennent du mémoire réalisé par T. LOPEZ [13].

Définition 13 (OATi). *Les Obligations Assimilables du Trésor indexées sur l'inflation ou OATi sont des emprunts d'État émis par l'État français à taux indexé sur l'inflation. Sa valeur de marché, pour une maturité T , est définie par :*

$$VM_{OATi} = \sum_{k=1}^T (c_k e^{(k-1+\alpha)i(0,k)} e^{-(k-1+\alpha)f_n(0,k)}) + F_T e^{(T-1+\alpha)i(0,T)} e^{-(T-1+\alpha)f_n(0,T)} \quad (1.15)$$

Avec :

- $f_n(0, k)$ le taux nominal de l'année k
- $i(0, k)$ l'inflation de l'année k
- α la fraction d'année $\in [0, 1]$
- c_k le coupon de l'année k
- F_T le remboursement à maturité de l'OATi

1.7.3 Numéraire & Risque neutre

Définition 14 (Numéraire). *Tout actif financier ne payant aucun dividende est un numéraire.*

Théorème 1 (Radon-Nikodym). *Etant donné deux mesures de probabilité équivalentes \mathbb{P} et \mathbb{Q} construites sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}) , il existe une variable aléatoire $X > 0$ telle que :*

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X d_A]$$

avec d_A l'indicatrice de l'événement. On note $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Théorème 2 (Changement de numéraire). *Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $0 \leq t \leq T$. Pour tout numéraire N il existe une probabilité \mathbb{Q}^N équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} telle que pour tout actif X :*

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{X_T}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (1.16)$$

Pour l'univers risque neutre le numéraire associé est le bank account $B(t)$ (cf 1.4).

Nous avons présenté le contexte et l'univers de nos travaux ainsi que les étapes principales pour créer et valider un GSE. Nous avons aussi vu le socle mathématique et financier qui nous sera utile pour chaque facteur projeté. Nous pouvons alors maintenant nous concentrer sur les modèles qui seront employés pour diffuser chacun des facteurs financiers. Nous commencerons par la modélisation des taux, qui serviront ensuite de base pour construire le modèle inflation, l'indice action & immobilier.

Point important :

A partir d'ici, tous les codes des trajectoires, des calibrations et des tests des modèles ont été réalisés en Python en utilisant uniquement les packages `NumPy`, `SciPy`, `Pandas` & `Pytorch`. Le but étant d'avoir la main sur l'intégralité du processus (de la calibration à la génération des courbes) afin que n'importe quels collaborateurs puissent les lire et voir la réalisation. Le problème d'utiliser des librairies déjà construites est que nous ne savons pas ce qu'il y a derrière.

Chapitre 2

Modélisation des taux

2.1 Enjeux

La modélisation des taux d'intérêt permet de comprendre comment sont influencés les prix et les rendements. Elle doit permettre de représenter la courbe de taux à la date de projection et intégrer son évolution tout en prenant en compte les déformations possibles sur le marché. En assurance, c'est un point primordial dans la gestion des risques car les assureurs vie peuvent être impactés négativement à la hausse comme à la baisse des taux.

- Si les taux augmentent : Inertie à court terme du portefeuille et diminution de la valeur de marché. L'assureur est alors exposé à un risque de rachat et d'arbitrage et donc de cession d'actifs en moins-values pour financer ces sorties.
- Si les taux baissent : Baisse du rendement des actifs, ce qui implique une baisse de la marge financière et donc entraîne des difficultés à satisfaire les obligations associées à des taux garantis.

Le choix de la courbe de taux est un élément qui va aussi impacter particulièrement nos résultats. Ici nous allons utiliser la courbe de taux zéro coupon (ZC) sans *Volatility Adjustment*¹ fournie par l'*European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA). Comme il s'agit de la courbe de référence pour les assureurs, nous avons décidé de la modéliser. La courbe de taux utilisée et reproduite dans cette étude est celle de mars 2022, les résultats ont été vérifiés avec une courbe de taux différente et positive. La courbe des taux de décembre 2022 a été appliquée car positive sur l'ensemble. (cf l'annexe G).

1. C'est une mesure visant à assurer le traitement approprié des produits d'assurance avec des garanties à long terme dans le cadre de Solvabilité 2

2.2 Hull & White à un facteur (HW1F)

C'est un modèle développé par J. Hull et A. White dans les années 90 qui a permis de répondre aux limites des modèles d'évaluations de taux d'intérêts présents à cette période. Il introduit la possibilité de reconstruire parfaitement la structure de la courbe de taux grâce à la propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage. Ce modèle permet entre autre de valoriser caps, floors et swaptions grâce à des formules fermées.

2.2.1 Présentation du modèle

Tout d'abord nous devons décrire le cadre général qui permet de modéliser la structure de la courbe de taux compatible avec l'absence d'opportunité arbitrage, le cadre Heath, Jarrow et Morton (HJM) défini dans *Bond pricing and the term structure of interest rate : a discret time approximation* [11], $0 \leq t \leq T$:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

avec :

- $f(t, T)$ le taux forward instantané en t pour une maturité T
- $\sigma(t, T)$ la volatilité, un processus \mathcal{F}_t -adapté
- $\alpha(t, T)$ le drift, un processus \mathcal{F}_t -adapté complètement déterminé par le choix de σ tel que $\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds$
- W_t un \mathbb{F} -mouvement brownien.

Le modèle HW1F fait donc partie de cette classe de modèle dont la dynamique sur le taux court permet la reproduction de la courbe de taux par terme et est définie sous la probabilité risque neutre tel que :

$$dr(t) = (\theta(t) - \kappa.r(t))dt + \sigma dW_t \quad (2.1)$$

avec :

- κ la vitesse de retour à la moyenne
- $\theta(t)$ est une fonction déterministe choisie pour reproduire la structure par terme des taux, qui correspond à la moyenne à long terme
- σ la volatilité

On peut noter ici que le modèle HW1F est une généralisation du modèle de Vašíček présenté dans la partie 3.2.1. La suite de la description suit les travaux du livre de Brigo & Mercurio [6] et repris dans l'article de F.Planchet & K.Armel [18]

L'équation différentielle du modèle a pour solution :

$$r(t) = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-\kappa(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u \quad (2.2)$$

avec :

- $\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t})^2$

- $f^M(0, t) = -\frac{\partial \ln(P^M(0, t))}{\partial T}$ le taux forward instantané,
- $\theta(t) = \frac{\partial \ln(P^M(0, t))}{\partial T} + \kappa f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})$

En utilisant les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien et en prenant un pas de discrétisation h , on obtient le schéma récursif exact suivant (cf l'annexe D.1) :

$$r_{t+h} = r_t e^{-\kappa h} + \alpha(t+h) - \alpha(t) e^{-\kappa h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa h}}{2\kappa}} \varepsilon_t \quad (2.3)$$

avec $(\varepsilon_t)_{t \geq 1}$ i.i.d, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

En partant de la définition du prix d'une obligation zéro coupon (cf 1.7), on peut trouver l'expression du prix lorsque r_t suit la dynamique HW1F.

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | r_t]$$

or $\int_t^T r_s ds | r_t$ suit une loi normale,

$$\Rightarrow \int_t^T r_s ds | r_t \sim \mathcal{N}\left(B(t, T)[r_t - \alpha(t)] + \ln\left(\frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)}\right) + \frac{1}{2}[V(0, T) - V(0, t)], V(t, T)\right)$$

avec :

$$— B(t, T) = \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})$$

$$— V(t, T) = \frac{\sigma^2}{\kappa^2}(T - t + \frac{2}{\kappa}e^{-\kappa(T-t)} - \frac{1}{2\kappa}e^{-2\kappa(T-t)} - \frac{3}{2\kappa})$$

$$\text{En posant } A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} e^{B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})B(t, T)^2},$$

on a alors le prix d'une obligation zéro coupon de la dynamique HW1F :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (2.4)$$

Point important :

Le modèle HW1F permet de générer des taux négatifs étant un modèle normal car $r_t | \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}\left(r_s e^{-\kappa(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-\kappa(t-s)}; \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)})\right)$. Cela permet de reproduire un environnement à taux négatifs sans nécessité de modifications.

2.2.2 Calibration du modèle

L'avantage du modèle HW1F est qu'il possède des formules fermées pour les caps, les floors et les swaptions. Dans notre cas, nous disposons en entrée d'une matrice de swaptions de six prix d'exercice m allant de 1 à 10 années et de dix ténors $T_T = n - m$ allant de 1 à 10 ans.

Ces prix de swaptions étant ceux du marché, nous pouvons extraire la volatilité normale (ou de Bachelier) de telle sorte que :

$m \setminus T_T$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	37,91	76,21	113,31	148,49	182,16	214,56	245,70	275,83	305,21	334,09
2	53,69	105,91	155,13	201,59	245,34	287,50	328,09	367,40	405,76	443,49
3	61,43	120,40	176,55	230,27	282,08	332,85	382,58	431,24	478,78	525,16
5	72,66	143,96	213,61	281,06	346,54	409,85	470,97	530,10	587,42	643,10
7	77,99	155,01	229,96	301,99	371,37	438,33	502,84	565,21	625,74	684,70
10	84,45	166,14	245,06	321,04	393,35	462,80	529,37	593,67	656,28	717,80

TABLE 2.1 – ATM Swaptions extraites de Bloomberg

$$\sigma_{m,T_T}^{\text{normale}} = \frac{\text{Prix Swaption}_{m,T_T} \times \sqrt{2\pi}}{\sqrt{m} \times \text{Rente}_{m,T_T}}$$

avec $\text{Rente}_{m,T_T} = \sum_{i=m+1}^n P(t, T_{i+1})$. Il en résulte le tableau suivant :

$m \setminus T_T$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,96%	0,97%	0,97%	0,96%	0,94%	0,93%	0,92%	0,91%	0,90%	0,89%
2	0,97%	0,96%	0,95%	0,93%	0,91%	0,89%	0,88%	0,87%	0,86%	0,85%
3	0,92%	0,91%	0,89%	0,88%	0,86%	0,86%	0,85%	0,84%	0,84%	0,83%
5	0,86%	0,86%	0,85%	0,85%	0,84%	0,84%	0,83%	0,82%	0,82%	0,81%
7	0,80%	0,80%	0,80%	0,79%	0,79%	0,78%	0,77%	0,76%	0,76%	0,75%
10	0,76%	0,75%	0,74%	0,74%	0,73%	0,72%	0,71%	0,70%	0,69%	0,68%

TABLE 2.2 – Volatilités normales des swaptions extraites

La formule du payoff pour une swaption européenne payeuse est définie par Brigo & Mercurio [6] comme :

$$PS(t, T, \mathcal{T}, N, X) = N \sum_{i=1}^n c_i ZBP(t, T, t_i, X_i) \quad (2.5)$$

Avec :

- T la maturité, N le nominal et X le strike
- $X_i := A(T, t_i) e^{-B(T, t_i) r^*}$
- $c_i := X \tau_i$
- r^* est la valeur du taux spot en T tel que $\sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i) r^*} = 1$
- $ZBP(t, T, t_i, X_i)$ est le prix d'un floor en t de strike X_i , maturité T

On note $\lambda = (\kappa, \sigma)$ les deux paramètres du modèle HW1F que nous allons calibrer et $f_i^{HW}(\lambda)$ le prix de la i -ème swaption valorisée avec le modèle HW1F.

Pour réaliser cette calibration nous allons nous baser sur la méthode présentée par Brigo & Mercurio [6] qui consiste à utiliser les arbres trinomiaux. Il s'agit d'un algorithme récursif suivant la méthode de Newton (cf l'annexe E.1). Au cours de chaque itération,

un arbre est construit, et à chaque nœud de cet arbre, un prix de swaption est évalué et actualisé avec le déflateur associé. On calcule ensuite la distance entre les prix initiaux et ceux calculés. (cf l'annexe E.2)

Les paramètres optimaux $\hat{\lambda} = (\hat{\kappa}, \hat{\sigma})$ résultent de l'utilisation de la méthode des moindres carrés. Il convient de minimiser la distance entre le prix de marché des swaptions observés et ceux obtenus via le modèle HW1F tel que :

$$S(\hat{\lambda}) = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^N (\operatorname{Prix}_i^{\text{Marche}} - f_i^{\text{HW}}(\hat{\lambda}))^2 \right) \quad (2.6)$$

Or minimiser cette distance revient à minimiser l'écart entre les volatilités normales des prix calculés et celles observées sur le marché. En suivant cette démarche, nous obtenons les paramètres suivants :

Résultat	
κ	0,025
σ	0,97%

Graphiquement, nous pouvons voir des écarts qui seront discutés dans la partie 2.4 sur la validation des modèles :

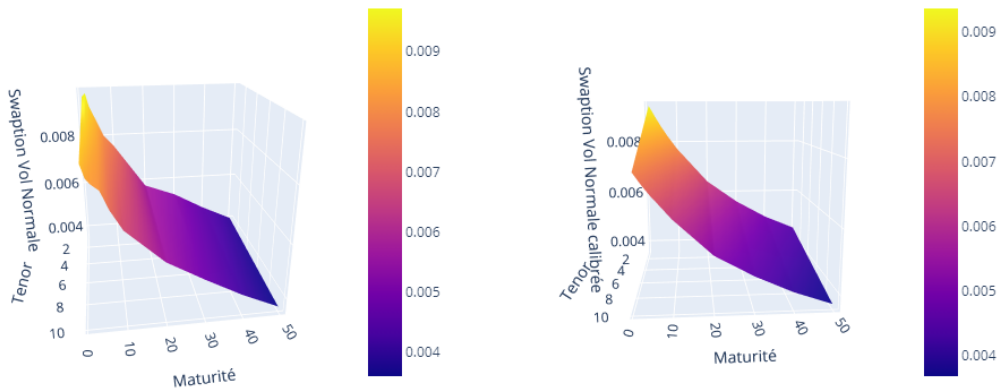


FIGURE 2.1 – Nappe de volatilité normale théorique vs calibrée

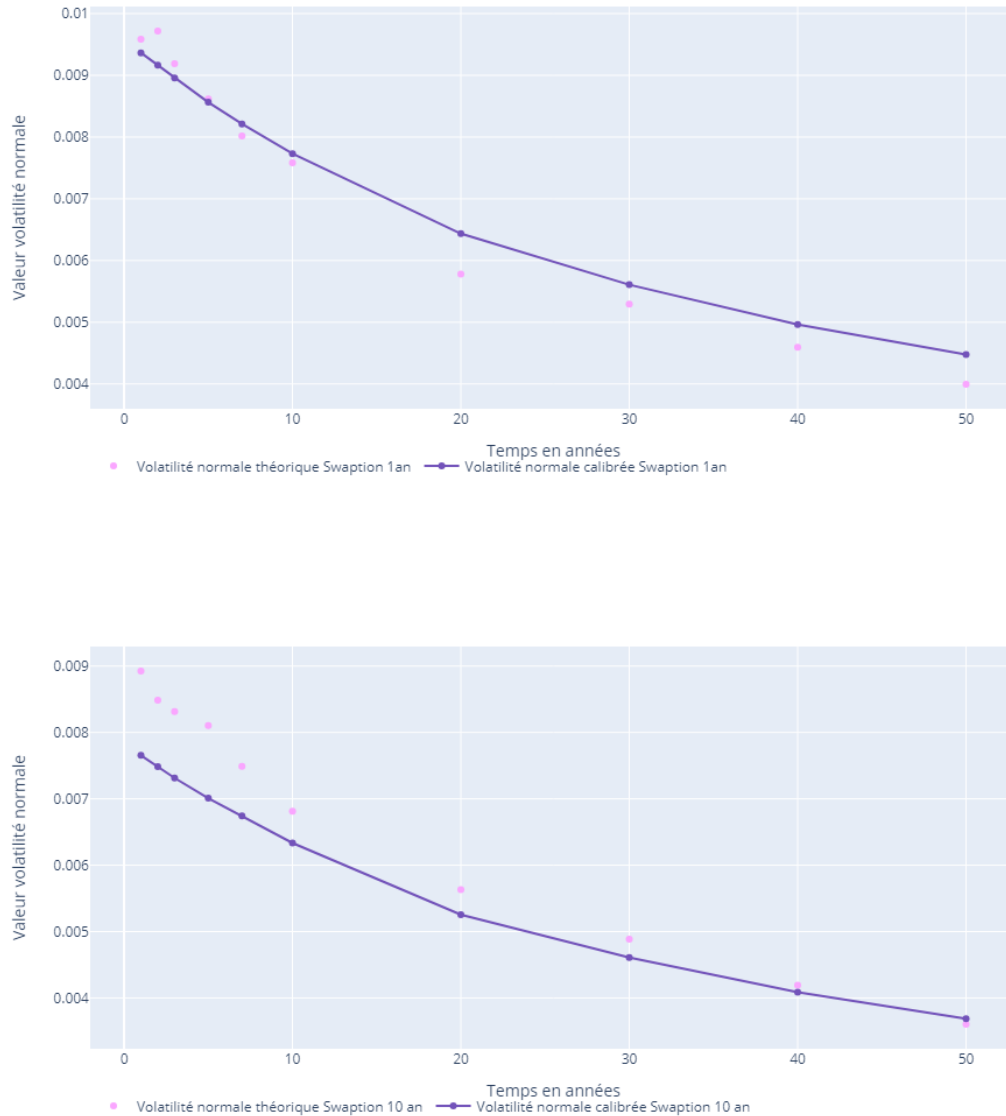


FIGURE 2.2 – Différence des valeurs de volatilité normale sur tenor 1 an et 10 an

2.3 LIBOR Market Model (LMM)

2.3.1 Présentation du modèle

A la différence du modèle HW1F, qui modélise le taux court ici les quantités modélisées sont un ensemble de taux forward (taux LIBOR forward) qui ont pour principal

avantage d'être observables directement sur le marché. Il a été proposé pour la première fois par Brace, Gatarek & Musiela [5] et nous reprendrons ici la formulation exprimée par Brigo & Mercurio [6].

Comme ce modèle utilise les taux forwards, nous introduisons un nouvel univers de probabilité, l'univers forward neutre.

Considérant le prix d'un zéro coupon $P(t, T)$ comme numéraire et en utilisant le théorème sur le changement de numéraire (cf 1.16), il existe une probabilité \mathbb{Q}^T sous laquelle $\left(\frac{X_t}{P(t, T)}\right)_{t \geq 0}$ est martingale avec $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique. Nous passons donc de la mesure risque neutre à la mesure forward neutre :

$$X_t = B(t) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{X_T}{B(T)} \right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [D(t, T) X_T]$$

$$X_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{B(T)}{B(t)} \frac{P(t, T)}{P(T, T)} D(t, T) X_T \right]$$

$$X_t = P(t, T) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^T} [X_T]$$

Donc sous la mesure \mathbb{Q}^T , le taux forward est une martingale et cette mesure est appelée mesure forward neutre.

On note maintenant \mathbb{Q}^{T_k} la mesure associée au numéraire $P(\cdot, T_k)$. Il en suit directement par définition que :

$$F_k(t) P(t, T_k) = \frac{P(t, T_{k-1}) - P(t, T_k)}{\tau_k} \Leftrightarrow P(t, T_k) = \frac{P(t, T_{k-1})}{1 + \tau_k F_k(t)}$$

avec :

— $F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k)$ le taux forward

— $\tau_i = T_i - T_{i-1}$

La dynamique des taux forward F_k sous \mathbb{Q}^{T_k} est représentée par :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t), \quad t \leq T_{k-1}$$

qui indique que les taux forwards sont lognormaux avec σ_k une fonction déterministe qui représente la volatilité et $(W_k)_{k \geq 1}$ un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^{T_k} tel que $dW_k(t) dW_l(t) = d\langle W_k, W_l \rangle_t = \rho_{k,l} dt$.

On peut réécrire cette dynamique pour 3 cas différents d'un entier $i > 0$. Le taux forward sous \mathbb{Q}^{T_i} s'exprime alors :

— si $i < k$

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j} \tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t)$$

— si $i = k$

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t)$$

— si $i > k$

$$dF_k(t) = -\sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho_{k,j}\tau_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t)dW_k(t)$$

Pour résoudre cette solution de l'équation différentielle et réaliser notre discrétisation nous introduisons la mesure spot Libor \mathbb{Q}^d qui a comme numéraire :

$$B_d(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)-1})}{\prod_{j=0}^{\beta(t)-1} P(T_{j-1}, T_j)} = \prod_{j=0}^{\beta(t)-1} (1 + \tau_j F_j(T_{j-1})) P(t, T_{\beta(t)-1})$$

avec β un fonction de t et $B(T)$ le bank account.

La dynamique du taux forward sous cette mesure s'écrit :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\rho_{j,k}\tau_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t)dW_k^d(t) \quad (2.7)$$

En utilisant le schéma d'Euler (cf l'annexe D.2), on peut écrire la discrétisation pour $i < k$:

$$F_k(T_{i+1}) = F_k(T_i) \exp \left(\sigma_k(T_i) \left(\sum_{j=i+1}^k \rho_{j,k} \frac{\tau_j \sigma_j(T_i) F_j(T_i)}{1 + \tau_j F_j(T_i)} - \frac{1}{2} \sigma_k(T_i) \right) \tau_i + \sigma_k(T_i) \sqrt{\tau_i} \zeta_i \right)$$

avec $\zeta_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $F_k(0) = \frac{e^{L(0, T_k)T_k - L(0, T_{k-1})T_{k-1} - 1}}{\tau_k}$.

Rappel : $L(t, T)$ est le taux Libor (cf 1.9).

En s'appuyant sur l'expression de $P(\cdot, T_k) = \frac{P(t, T_{k-1})}{1 + \tau_k F_k(t)}$ à partir des taux forward, nous sommes en mesure d'avoir la formule du prix d'une obligation zéro coupon lorsque $i < k$. En sachant que $P(T, T) = 1$ alors en raisonnant par récurrence :

$$P(T_i, T_k) = \prod_{l=i+1}^k \frac{1}{1 + \tau_l F_l(T_i)} \quad (2.8)$$

Maintenant que nous avons fini de présenter la dynamique des taux forward et le prix d'une obligation zéro coupon suivant cette diffusion, il reste deux éléments importants à déterminer pour réaliser la modélisation : le modèle de volatilité et le modèle de corrélation.

Nous avons fait le choix d'utiliser les deux modèles paramétriques présentés par Rebonato [20] pour le LIBOR Market Model.

— Modèle de volatilité :

$$\sigma(t) = (at + b)e^{-ct} + d$$

avec c la vitesse de convergence, d la limite de convergence, $\frac{a-bc}{ac}$ la valeur maximale et $b + d$ la volatilité initiale.

— Modèle de corrélation :

$$\rho_{ij}(t) = e^{-\beta|T_i - T_j|}$$

avec $\beta > 0$, ce qui assure une matrice de corrélation réelle, symétrique avec des valeurs propres positives ce qui permettra d'appliquer le théorème de Cholesky (cf l'annexe A.2)

Point important :

Le modèle LMM est un modèle lognormal, ce qui signifie que ce modèle nécessite des modifications pour intégrer les taux négatifs. On parle alors de Displaced Diffusion LIBOR Market Model (DDLMM), quand on intègre uniquement un facteur de translation h dans la dynamique du taux forward (sinon on parle de LMM+ lorsque on intègre également une variance stochastique). La dynamique devient alors :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)(F_k(t) + h)dW_k(t), \quad t \leq T_{k-1}$$

La dynamique discrétisée est alors la suivante :

$$F_k(T_{i+1}) = (F_k(T_i) + h) \exp \left(\sigma_k(T_i) \left(\sum_{j=i+1}^k \rho_{j,k} \frac{\tau_j \sigma_j(T_i) F_j(T_i)}{1 + \tau_j F_j(T_i)} - \frac{1}{2} \sigma_k(T_i) \right) \tau_i + \sigma_k(T_i) \sqrt{\tau_i} \varepsilon_i \right) - h$$

Le coefficient h est déterminé comme un hyper-paramètre à l'extérieur du modèle.

2.3.2 Calibration du modèle

Brigo & Mercurio [6] ont montré que le prix d'une swaption payeuse formulée en partant du LMM est similaire à celle donnée par la formule de Black qui est la formule de valorisation des instruments de marché. Nous notons $\lambda = (a, b, c, d, \beta)$ les paramètres du modèle à calibrer. Comme pour le modèle HW1F on veut minimiser la distance entre le prix de marché des swaptions observées, qui coïncident avec le modèle de Black, et ceux trouvés par le LMM, qui sont calculés par la formule de Black). Donc cela revient à minimiser la distance entre les volatilités du marché et celles obtenues grâce à la formule de Rebonato :

$$S(\hat{\lambda}) = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^N (\sigma_{m,n}^{\text{Black}} - \nu_{m,n}(\hat{\lambda}))^2 \right) \quad (2.9)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
- \nu_{m,n}^2 &= \sum_{i,j=m+1}^n \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}}{S^{m,n}(0)^2} \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt \\
- w_i(t) &= \frac{\tau_i P(t, T_i)}{\sum_{j=i+1}^n \tau_j P(t, T_j)} \\
- S^{i,n}(t) &= \sum_{j=i+1}^n w_j(0)F_j(t)
\end{aligned}$$

Pour réaliser ce calibrage on s'appuiera sur l'algorithme de Nelder-Mead (cf l'annexe E.3). L'évaluation du prix des swaptions du LMM étant une fonction complexe, elle devient assez facile à optimiser avec un algorithme comme celui-ci qui demande peu d'itérations pour une convergence rapide.

En reprenant la matrice de swaption présentée sur le tableau 2.1 et pour un paramètre de décalage $h = 5\%$ (ce paramètre a été choisi par avis d'expert à la suite d'une étude sur les taux où un minimum de -2% avait été constaté) on peut en déduire les volatilités décalées de Black :

$m \setminus T_T$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	15,86%	15,79%	15,70%	15,52%	15,31%	15,10%	14,86%	14,63%	14,42%	14,24%
2	15,61%	15,52%	15,30%	15,01%	14,69%	14,38%	14,10%	13,84%	13,63%	13,47%
3	14,84%	14,69%	14,44%	14,18%	13,93%	13,72%	13,53%	13,39%	13,26%	13,15%
5	13,99%	13,90%	13,75%	13,57%	13,39%	13,24%	13,10%	12,96%	12,85%	12,78%
7	12,75%	12,67%	12,54%	12,40%	12,27%	12,14%	12,03%	11,96%	11,93%	11,92%
10	11,77%	11,67%	11,56%	11,47%	11,40%	11,37%	11,34%	11,28%	11,18%	11,07%

TABLE 2.3 – Volatilités décalées des swaptions extraites

Elles sont trouvées en appliquant la formule suivante :

$$\sigma_{m,n}^{Black} = \left(\frac{2}{\sqrt{m}} \right) \times \phi^{-1} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\text{Prix Swaption}_{m,T_T}}{\text{Rente}_{m,T_T}(S^{m,n}(t) + h)} \right) \right)$$

avec ϕ^{-1} la fonction inverse de la loi normale standard.

En adaptant la formule de calcul des volatilités de Rebonato (2.9) avec la prise en compte du facteur de décalage, on obtient les paramètres suivants :

Résultat	
a	0,126
b	0,015
c	0,214
d	0,053
β	0,113

Nous remarquons que nos paramètres ont bien un sens, $\beta > 0$ nous assure une matrice de corrélation semi-définie positive lors de l'application du théorème de Cholesky (cf l'annexe A.2). Les paramètres a , b , c et d permettent de reproduire la forme de la courbe de volatilité proposée par Rebonato (Figure 2.3).

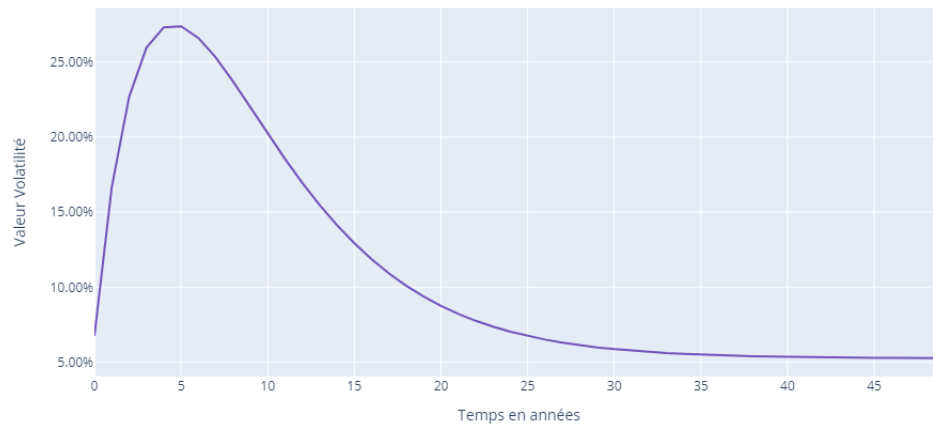


FIGURE 2.3 – Courbe de volatilité avec les paramètres a , b , c et d calibrés

Comme pour le modèle HW1F, nous discuterons plus précisément des résultats dans la partie suivante mais nous pouvons déjà noter que la nappe de volatilité est particulièrement bien reproduite avec le DDLMM.

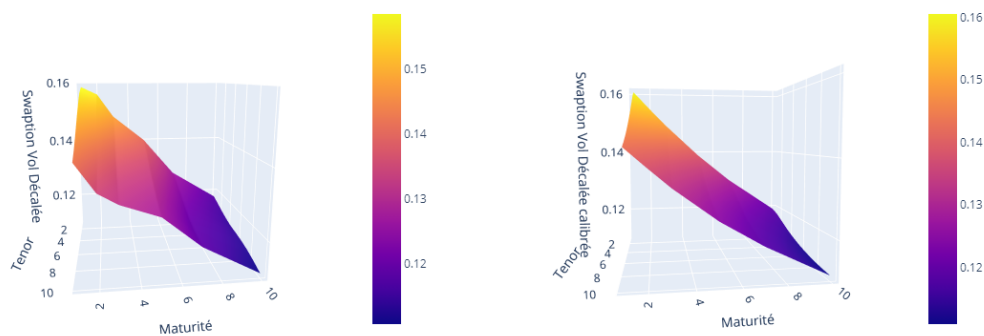


FIGURE 2.4 – Nappe de volatilité décalée théorique vs calibrée

Ce résultat se confirme quand on regarde les écarts entre les valeurs de volatilités décalées théoriques, et celles calibrées, qui sont tous inférieurs à 0,5% (Tableau 2.4)

$m \setminus T_T$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0,19%	-0,11%	0,04%	0,11%	0,14%	0,14%	0,11%	0,06%	0,01%	-0,03%
2	0,14%	0,20%	0,21%	0,15%	0,06%	-0,03%	-0,12%	-0,21%	-0,28%	-0,32%
3	-0,06%	-0,08%	-0,10%	-0,13%	-0,16%	-0,17%	-0,18%	-0,17%	-0,16%	-0,17%
5	0,11%	0,15%	0,21%	0,24%	0,26%	0,27%	0,28%	0,27%	0,26%	0,26%
7	-0,25%	-0,21%	-0,16%	-0,11%	-0,08%	-0,07%	-0,06%	-0,03%	0,01%	0,03%
10	-0,13%	-0,14%	-0,10%	-0,05%	0,01%	0,08%	0,12%	0,11%	0,06%	-0,03%

TABLE 2.4 – Ecart entre volatilités décalées théoriques & calibrées

Nous présenterons dans la section suivante l'application et les résultats obtenus pour chacun des deux modèles, et nous vérifierons leur validité grâce aux différents tests présentés précédemment 1.6. De plus, nous nous attarderons sur les limites de chacun de ces modèles dans la situation présentée. Enfin, nous appliquerons les différents modèles à une courbe de taux qui présente des valeurs négatives pour anticiper la possibilité de retomber sur des taux négatifs dans le futur.

2.4 Validation des modèles

Afin de valider nos deux modélisations, nous devons vérifier que les tests de martingalité et *market-consistency* sont corrects.

2.4.1 Test de martingalité

Concernant les taux, en reprenant la description effectuée dans la partie 1.6.1, nous pouvons réaliser deux tests de martingalité pour s'assurer de la qualité de notre implémentation :

1. Sur le déflateur :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(0, t)] = P(0, t) \quad (2.10)$$

2. Sur les prix zéro coupon :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, T)] = P(0, T) \quad (2.11)$$

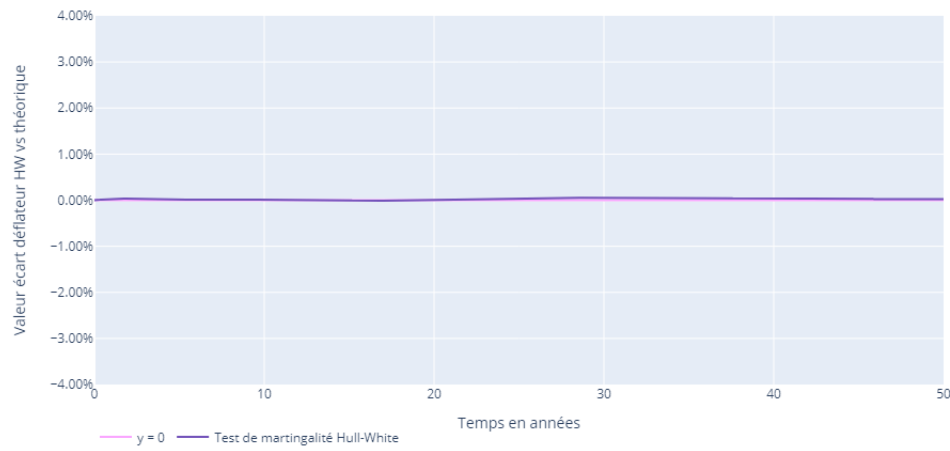


FIGURE 2.5 – Test de martingalité sur le défateur avec la méthode HW1F

Nous remarquons que le test de validation est concluant pour le modèle HW1F, l'écart le plus important apparaît à 50 ans et est seulement de l'ordre de 0,03%. La moyenne des erreurs (cf l'annexe B.2) nous confirme l'acceptation de ce modèle :

$$\mathbb{E}[\epsilon] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|P_i - P_i^M|}{P_i^M} = 1,74 \times 10^{-4}$$

Cette validation semble également se confirmer graphiquement. En effet, notre modèle HW1F reproduit presque à l'identique la courbe de taux initiale utilisée.

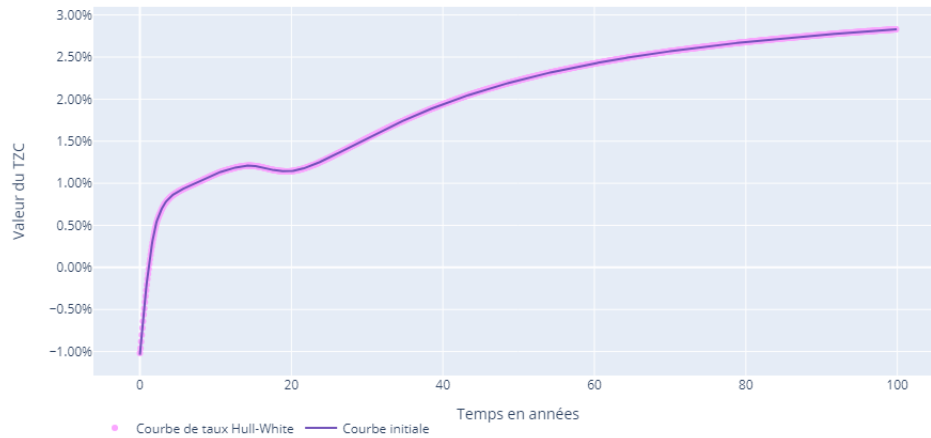


FIGURE 2.6 – Courbe de taux reproduite par HW1F vs courbe de taux initiale

Dans le cas du DDLMM, le test de martingalité sur le déflateur est aussi un succès. l'écart est similaire au précédent, avec une apparition à 48 ans, pour une valeur de 0,65%.

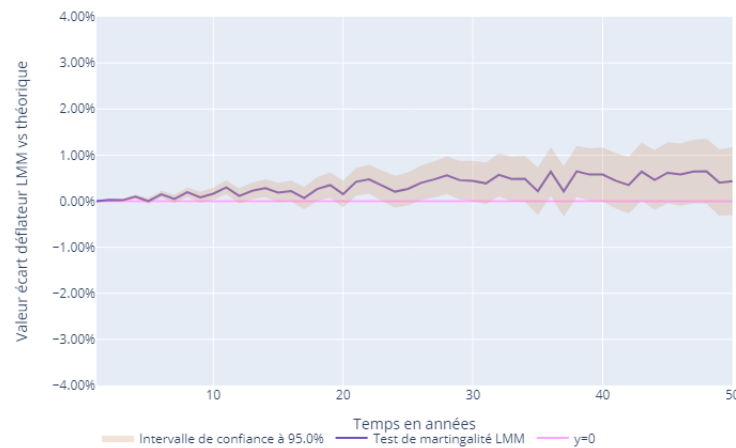


FIGURE 2.7 – Test de martingalité sur le déflateur avec la méthode DDLMM

La moyenne des erreurs d'estimation dans le cas du DDLMM vaut :

$$\mathbb{E}[\epsilon] = 3,40 \times 10^{-3}$$

La courbe de taux initiale est une nouvelle fois presque parfaitement reproduite en

utilisant cette seconde méthode.

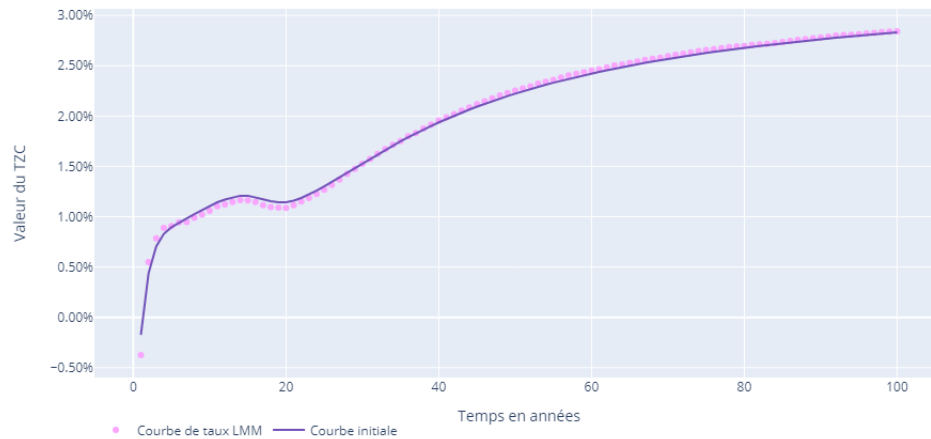


FIGURE 2.8 – Courbe de taux reproduite par DDLMM vs courbe de taux initiale

Nous allons passer maintenant au deuxième test de validation, le test de *market-consistency*.

2.4.2 Test de *market-consistency*

Le test de *market-consistency* dans le cadre des deux modèles de taux consiste à s'assurer que les prix de swaptions ou les valeurs des volatilités utilisées pour le calibrage sont cohérentes avec celles simulées. Le repricing des ténors 1 an et 10 an pour différentes maturités sera analysé.

On a vu sur la figure 2.2 que le calibrage des swaptions avec le modèle HW1F ne reproduisait pas parfaitement la structure de volatilités normales. On peut retrouver ces écarts lorsqu'on va *repricer* ces produits.

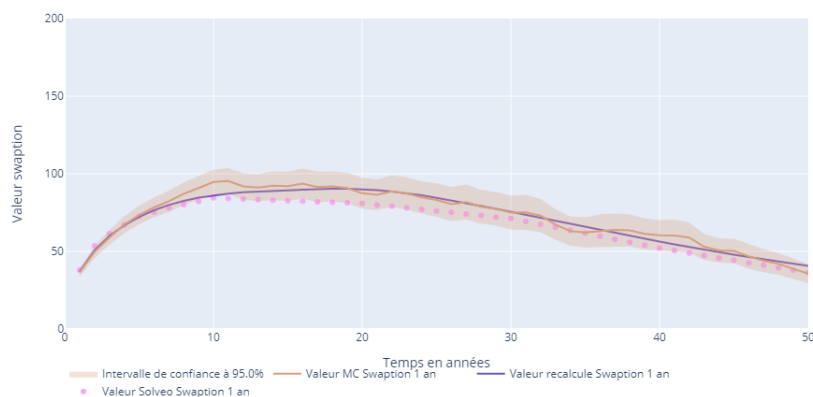


FIGURE 2.9 – Repricing swaption Tenor 1 an HW1F

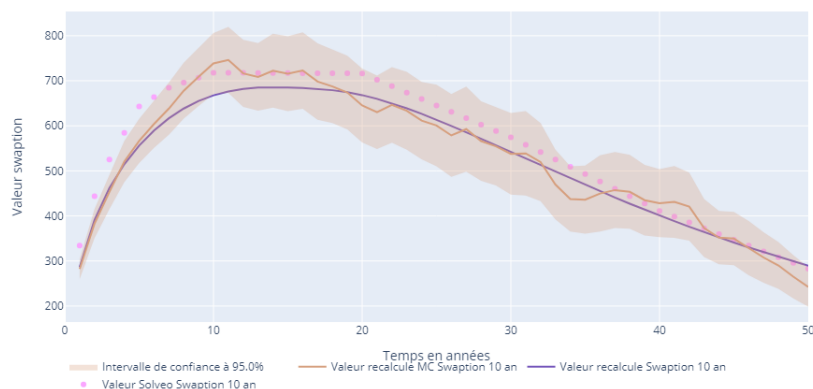


FIGURE 2.10 – Repricing swaption Tenor 10 an HW1F

Que ce soit sur la figure 2.9 ou la figure 2.10, on remarque que le *repricing* théorique ne reflète pas parfaitement les valeurs initiales. Cela va donc impacter le résultat du *repricing* avec Monte-Carlo. Néanmoins, les résultats restent acceptables avec une majorité des valeurs présentes dans l'intervalle de confiance $\alpha = 95\%$. De plus, la moyenne des erreurs globale est de 7,40% ce qui est convenable.

Cependant, l'utilisation du DDLMM permet de mieux reproduire le prix des swaptions. Comme nous l'avons vu dans la table 2.4, le calibrage a donné des écarts très légers, ce qui permet d'affirmer que le DDLMM reproduit parfaitement le prix des swaptions. Cela implique que les simulations de Monte Carlo vont aussi donner de bons résultats.

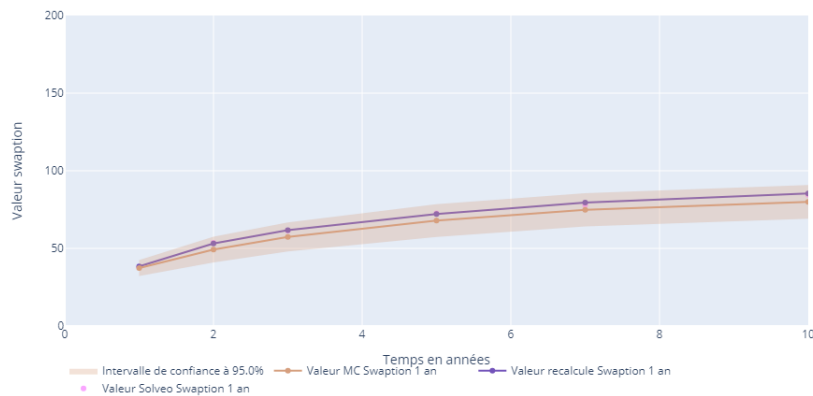


FIGURE 2.11 – Repricing swaption Tenor 1 an DDLMM

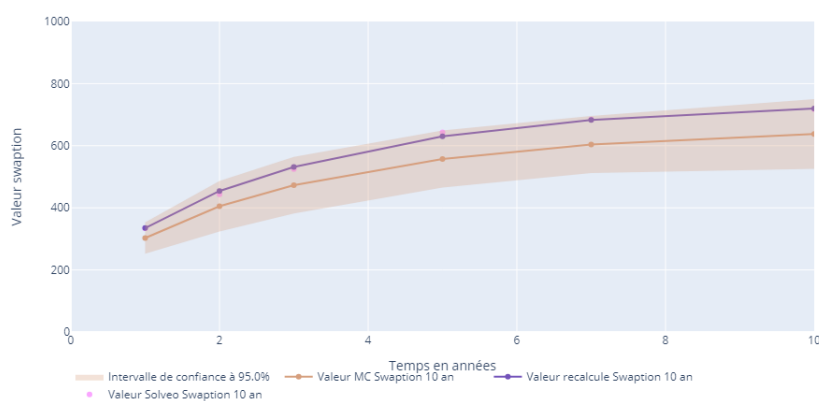


FIGURE 2.12 – Repricing swaption Tenor 10 an DDLMM

Le test de *market-consistency* est également concluant dans le cas du DDLMM avec toutes les valeurs comprises dans l'intervalle de confiance $\alpha = 95\%$ et une moyenne des erreurs de $5,1\%$.

Maintenant que nous avons montré que notre modélisation des taux est satisfaisante quelque soit le modèle utilisé, nous allons nous concentrer sur les limites théoriques de chaque modèle, et notamment sur le processus pouvant nous orienter sur le choix du modèle à sélectionner.

2.5 Comparaison des résultats inter-modèles & vision critique

Les résultats des projections sont satisfaisants, testés et validés pour les deux modèles mais des différences apparaissent tout de même. La calibration des deux modèles est un processus complexe qui peut être amélioré en considérant d'autres instruments financiers en plus de la matrice de swaptions.

On peut rajouter que les structures de corrélation et de volatilité choisies ici pour le DDLMM peuvent être améliorées et plus précises, pour prendre en compte des structures plus complexes qui permettraient de mieux reproduire la courbe de taux.

De plus, on peut remarquer que malgré le fait que le modèle HW1F reproduit moins bien le prix des swaptions, il est dans notre cas plus efficace pour reproduire parfaitement la courbe de taux initiale.

C'est un point intéressant qui peut apparaître sur nos GSE finaux car il serait pertinent d'avoir un modèle qui reproduit légèrement moins bien le prix des swaptions de marché mais qui permet d'avoir des meilleures projections de *Best Estimate* et des fuites de modèle plus basses.

Ayant déterminé nos structures de courbes de taux d'intérêt nominaux, nous allons présenter dans la section suivante comment déterminer une courbe de taux réels puis l'utiliser pour modéliser l'inflation.

Chapitre 3

Modélisation de l'inflation

3.1 Enjeux

L'inflation est une baisse du pouvoir d'achat d'une monnaie, qui se traduit par une augmentation de la quantité de cette monnaie à payer pour acquérir un bien ou un service. Ceci implique un risque auquel un assureur peut être exposé dans le cas de produits d'épargne ou de retraite car son capital peut être exposé à ces mouvements monétaires.

Le taux d'inflation est l'indicateur qui nous permet de savoir pour quel taux de rendement à la période t il aurait fallu investir pour garder en T la même capacité d'achat. Il est calculé à partir de l'indice des prix à la consommation (IPC) fourni par l'Institut national de la statistique et des études économiques (INSEE).

$$i(t, T) = \frac{I(T) - I(t)}{I(t)}$$

avec $I(\bullet)$ l'indice inflation en \bullet .

Nous verrons ainsi par la suite comment nous allons la modéliser par la relation de Fisher, qui permet de traduire un lien entre le taux d'intérêt nominal, réel et le taux d'inflation.

3.2 Relation de Fisher

Cette relation découverte par I. Fisher permet de déduire le taux réel en ajustant le taux nominal avec l'inflation. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$r_r(t, T) = r_n(t, T) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[i(t, T)] \quad (3.1)$$

Avec

- r_r le taux d'intérêt réel
- r_n le taux d'intérêt nominal
- i l'inflation

On peut l'approximer de la manière suivante :

$$r_r(t, T) \approx r_n(t, T) - i(t, T) \quad (3.2)$$

On doit alors diffuser le taux d'intérêt nominal et le taux d'intérêt réel. Le premier correspond au taux précédemment déterminé dans la partie 2 que nous ré-utiliserons donc ici.

Il nous reste alors à modéliser le taux réel pour pouvoir en déduire le taux d'inflation. Le choix du modèle s'est porté sur celui de Vašíček, en raison de sa simplicité et de sa capacité à produire des taux négatifs. De plus on ne cherche pas à reproduire une courbe de taux particulière ici, ce qui confirme notre choix d'utiliser cette diffusion.

3.2.1 Taux réels par Vašíček

3.2.1.1 Présentation du modèle

Ce modèle a été proposé par O.Vašíček dans *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure* [23]. Il fait partie de la classe des modèles d'équilibre, c'est à dire des modèles qui ont pour particularité d'intégrer un facteur de retour à la moyenne.

Sa dynamique s'exprime de la manière suivante :

$$dr_r(t) = a(b - r_r(t))dt + \sigma dW_t$$

avec :

- a la vitesse de retour à la moyenne
- b la moyenne à long terme du taux
- σ la volatilité du taux.

Comme expliqué dans la partie 2.2, le modèle HW1F est une généralisation, donc nous connaissons déjà la solution de l'équation différentielle du modèle et sa discrétisation exacte en prenant un pas h :

$$r_r(t+h) = r_r(t)e^{-ah} + b(1 - e^{-ah}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2ah}}{2a}} \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t)_{t \geq 1}$ i.i.d, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Toujours dans la même logique que ce que nous avons réalisé précédemment pour le modèle HW1F, nous avons aussi pour le modèle de Vašíček une formule pour le prix des obligations zéro coupon (présente dans le livre de Brigo & Mercurio [6]) :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

avec :

- $A(t, T) = e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)[B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2}$
- $B(t, T) = \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}]$

3.2.1.2 Calibration du modèle

Nous utiliserons ici, comme précédemment, la méthode des moindres carrés. Contrairement aux calibrations sur le DDLMM ou sur le modèle HW1F (calibration sur les prix de swaptions), nous allons réaliser le calibrage directement sur les taux réels extraits des OATi. C'est-à-dire en notant $\lambda = (a, b, \sigma)$, nous avons :

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^N (Taux^{OATi} - Taux^{Vasicek}(\hat{\lambda}))^2 \right) \quad (3.3)$$

Pour récupérer les taux sur les OATi, nous utilisons les données de 20 OATi avec maturités, valeurs de marché et coupons annuels différents.

En utilisant l'expression donnée pour la valeur de marché des OATi (cf 1.15) :

$$VM_{OATi} = \sum_{k=1}^T (c_k e^{(k-1+\alpha)i(0,k)} e^{-(k-1+\alpha)f_n(0,k)}) + F_T e^{(T-1+\alpha)i(0,T)} e^{-(T-1+\alpha)f_n(0,T)}$$

puis en appliquant l'approximation de relation de Fisher (cf 3.2) nous pouvons réécrire l'équation de la façon suivante :

$$VM_{OATi} = \sum_{k=1}^T (c_k e^{-(k-1+\alpha)f_r(0,k)}) + F_T e^{-(T-1+\alpha)f_r(0,T)} \quad (3.4)$$

Maintenant, la seule inconnue restante est le taux forward réel. Etant donnée la complexité d'obtenir une OATi pour chaque maturité, nous émettons l'hypothèse que le taux réel est constant entre deux dates consécutives T_i et T_j si nous n'avons pas la valeur pour l'OATi en T_j :

$$f_r(0, T_1) = f_{rT_1}$$

On peut déterminer la VM des OATi à chaque pas de temps et donc le taux forward réel en isolant f_{rx} dans l'équation suivante (qui vient directement de l'équation 3.4) :

$$VM_{OATi_x} = \sum_{k=1}^x \left(\sum_{j=T_{k-1}+1}^{T_k} (N_x c_x e^{-(j-1+\alpha_x)f_{rj}}) \right) + N_x e^{-(T_x-1+\alpha_x)f_{rx}}$$

Nous avons détaillé l'ensemble des outils nécessaires à la projection dans les parties précédentes. Nous verrons par la suite si la modélisation est valide, ainsi que les avantages et inconvénients de passer par cette approximation.

3.2.2 Validation du modèle, vision critique & ouverture

Tout d'abord, nous allons présenter les résultats de notre extraction des taux réels sur les OATi et le résultat de leur modélisation par Vašíček.

Pour éviter la courbe en escalier due à l'hypothèse des taux constants entre deux dates à cause du manque de données, nous avons pris la décision de réaliser une interpolation logarithmique d'ordre 2.

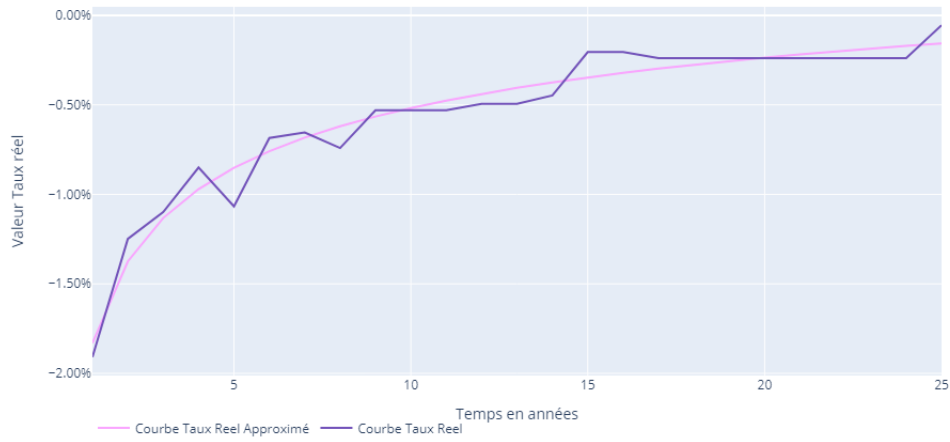


FIGURE 3.1 – Approximation des taux réels extraits des OATi

Une fois une courbe lissée obtenue, nous l'avons employée pour calibrer le modèle de Vašíček. Il en ressort les paramètres suivants :

Résultat	
b	0,017
a	0,174
σ	0,032
$r_r(0)$	-0,024

Graphiquement, on peut retracer la courbe de taux extraite et ainsi la comparer avec celle obtenue grâce au modèle de Vašíček.

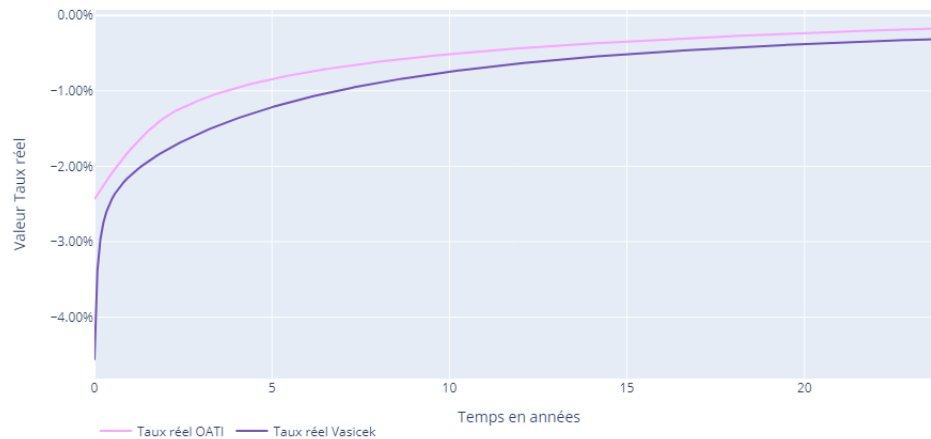


FIGURE 3.2 – Taux réel par Vasicek

En appliquant la relation de Fisher avec la courbe de taux nominal obtenue dans le chapitre précédent et la courbe de taux réel calculée, nous obtenons la courbe d'inflation suivante :

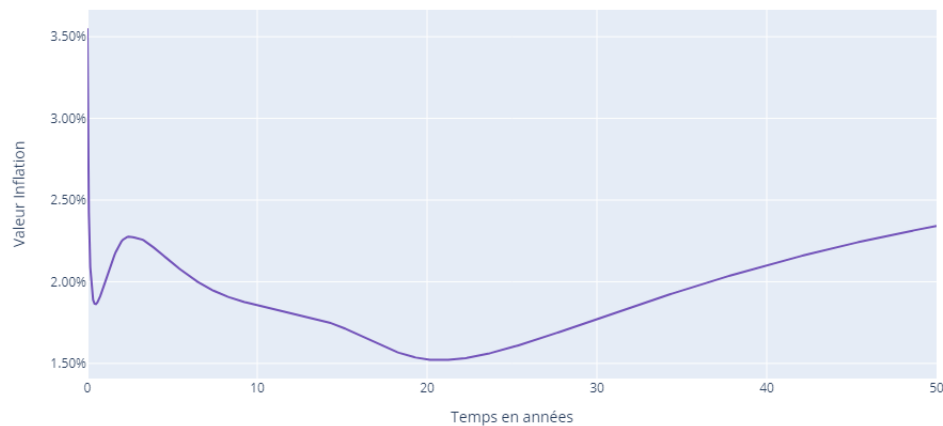


FIGURE 3.3 – Inflation avec taux nominal HW1F

Nous remarquons une convergence du taux d'inflation vers une valeur comprise entre

2% et 2,5% ce qui est en accord avec les attentes de la BCE. Le changement de modèle de taux nominal n'ayant qu'un très léger impact sur la valeur de l'inflation, on pourra trouver en annexe la modélisation de l'inflation avec le DDLMM (cf l'annexe F.1).

A priori, on pourrait dans un premier temps valider notre modèle mais quelques limites sont à noter. L'utilisation du modèle de Vašíček implique que nous ne validons pas le test de martingalité. En effet, ce modèle ne se base sur aucune courbe de taux pour sa diffusion mais uniquement sur une valeur initiale. De plus, on peut noter que la notion de *market-consistency* n'est pas validée dans le cas de l'inflation en raison du faible volume de données disponible concernant ce facteur financier. Enfin l'utilisation de l'approximation de la relation Fisher implique une baisse de la risque neutralité du modèle car cette dernière n'est pas uniquement validée en moyenne, mais également pour chacune des simulations.

Pour améliorer notre modélisation, nous aurions pu utiliser le modèle de Jarrow-Yildirim qui projette de manière liée les taux d'intérêts réels, nominaux et le taux d'inflation.

$$r_n(t) = r_n(s)e^{-a_n(t-s)} + \int_s^t e^{a_n(u-t)}\theta_n(u)du + \int_s^t e^{a_n(u-t)}\sigma_n dW_n(u)$$

$$r_r(t) = r_r(s)e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t e^{a_r(u-t)}(\theta_r(u) - \sigma_r\sigma_I\rho_{r,I})du + \int_s^t e^{a_r(u-t)}\sigma_r dW_r(u)$$

$$I(t, T) = I(t)e^{\int_t^T (r_n(s) - r_r(s))ds - \frac{1}{2}\sigma_i^2(T-t) + \sigma_i(W_I(T) - W_I(t))}$$

avec (W_I, W_r, W_n) mouvements browniens 3-dimensionnels avec les corrélations $\rho_{I,n}, \rho_{I,r}, \rho_{r,n}$.

Celui ci ne sera pas présenté ici car le choix s'est orienté sur une modélisation simple de l'inflation (car impactante uniquement sur les frais dans notre modélisation ALM). De plus, nous souhaitons nous concentrer davantage sur la projection des taux et des actions que nous verrons dans la section suivante.

Chapitre 4

Modélisation de l'indice action & immobilier

4.1 Enjeux

Les actions et l'immobilier étant une part significative de notre portefeuille, leur modélisation est importante, car l'assureur peut faire face à un risque de perte en capital lors de la cession d'actifs, d'une augmentation du coût de ces options et garanties en cas de hausse de la volatilité, ou encore d'une difficulté à honorer ses engagements vis-à-vis des assurés.

Par la suite, nous modéliserons l'indice des actions à l'aide de deux modèles différents, qui héritent tous deux du modèle de Black & Scholes. Le premier est le modèle lognormal à volatilité par terme déterministe, qui nous permet de conserver les avantages liés à la simplicité du modèle. Le deuxième est le modèle de Merton à sauts, qui constitue une adaptation du modèle précédent en y ajoutant un processus de Poisson pour tenir compte des effets de sauts.

En ce qui concerne la modélisation de l'indice immobilier, nous nous contenterons de le modéliser uniquement à l'aide du modèle lognormal à volatilité par terme déterministe.

4.2 Black & Scholes à volatilité déterministe

4.2.1 Présentation du modèle

Comme dit précédemment le modèle lognormal à volatilité par terme déterministe vient directement du modèle de Black & Scholes décrit en 1973 dans *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* [3], on a alors comme diffusion :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t \quad (4.1)$$

L'hypothèse sous-jacente est celle des rendements gaussiens, qui se révèle être fautive dans la réalité car les rendements peuvent avoir une distribution asymétrique ou leur

distribution peut présenter une queue épaisse. En appliquant le lemme d'Itô avec $X_t = \ln(S_t)$ on obtient alors :

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t r_s ds - \int_0^t \frac{\sigma_s^2}{2} ds + \int_0^t \sigma_s dW_s} \quad (4.2)$$

En notant h le pas de discrétisation, on obtient la discrétisation suivante :

$$S_{t+h} = S_t \frac{D(0, t)}{D(0, t+h)} e^{-\frac{\sigma_{t+h}^2}{2} + \sigma_t \sqrt{h} \varepsilon_t} \quad (4.3)$$

Avec :

- $(\varepsilon_t)_{t \geq 1}$ i.i.d, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $D(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$ le déflateur

Pour la calibration de ce modèle, on a généralement l'habitude de calibrer les volatilités locales σ_t que l'on peut récupérer directement sur des prix de Call observables sur le marché. Un autre avantage de Black & Scholes est qu'il possède une formule fermée permettant d'exprimer le prix d'un Call :

$$C_{BS}(S_0, K, r, T, \sigma) = \mathbb{E} \left[e^{-rT} (S_T - K) \mathbb{1}_{S_T > K} \right]$$

Connaissant la dynamique de S_t on a :

$$C_{BS}(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (4.4)$$

Avec :

- N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
- $d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left[\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$

Connaissant les limites de la modélisation par Black & Scholes, nous avons décidé d'utiliser un deuxième modèle pour projeter notre portefeuille, que nous présenterons maintenant.

4.3 Merton à sauts

4.3.1 Présentation du modèle

Le modèle de diffusion de Merton à sauts a pour objectif d'ajouter une dimension plus réaliste en intégrant la présence de sauts, ce qui permet de mieux représenter les marchés financiers qui ne suivent pas l'hypothèse des rendements gaussiens. Ce modèle a été présenté par Merton en 1975 dans son ouvrage intitulé *Option Pricing When Underlying*

Stock Returns Are Discountious [14], la diffusion est exprimée de la manière suivante :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + dJ_t \quad (4.5)$$

- μ_t le drift, un processus \mathcal{F}_t -adapté
- σ_t la volatilité, un processus \mathcal{F}_t -adapté
- $(W_t)_{t \geq 1}$ un mouvement brownien
- $J_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i$, J_i i.i.d et indépendants de W et N .

$N(t)$ suit un processus de Poisson tel que $\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ avec λ le nombre moyen de sauts par unité de temps. Nous savons aussi que la taille des sauts J suit une distribution log-normale $J \sim \text{Log-}\mathcal{N}(m, v^2)$, avec m la taille moyenne d'un saut et v la volatilité de la taille d'un saut.

La résolution de la SDE est similaire à celle du modèle de Black & Scholes à la différence de la présence du paramètre de saut. En utilisant la formule d'Itô pour une diffusion à sauts définie par Tankov & Cont [21] pour un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$:

$$\begin{aligned} df(X_t, t) = & \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) d\langle X, X \rangle_s \\ & + \sum_{s \leq t, \Delta X_s \neq 0} \left[f(X_s, s) - f(s, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \right] \end{aligned}$$

avec $X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s$.

En appliquant cette formule d'Itô à $X_t = \ln(S_t)$ on se retrouve avec :

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \prod_{i=1}^{N_t} J_i \\ \Leftrightarrow S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln(J_i)} \end{aligned}$$

Ceci reste une généralisation pour les modèles à sauts. En l'appliquant au modèle de Merton, on peut réaliser la discrétisation d'Euler avec un pas de discrétisation h :

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma \sqrt{h} \varepsilon_{t_1} + N_t \varepsilon_{t_2}$$

avec :

- $(\varepsilon_{t_1})_{t_1 \geq 1}$ i.i.d, $\varepsilon_{t_1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- $(\varepsilon_{t_2})_{t_2 \geq 1}$ i.i.d, $\varepsilon_{t_2} \sim \mathcal{N}(m, v^2)$
- $\mu = \mu - \lambda(e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} - 1)$

$$- N_t \sim \begin{cases} 0 & : p = e^{-\lambda \Delta t} \\ 1 & : 1 - p \end{cases}$$

Pour trouver la discrétisation de S_t , on effectue le changement de variable mentionné précédemment $S_t = e^{Y_t}$.

Ici, nous avons les trois paramètres liés aux sauts à calibrer, m , v et λ , pour réaliser cette calibration nous nous sommes basés sur un historique de données mensuelles sur dix années du CAC40 pour récupérer les 3 valeurs extraites du marché.

Résultat	
m	0,0998
v	0,2075
λ	0,993

Pour σ , comme pour le modèle de Black & Scholes, nous allons utiliser des prix de Call disponibles sur le marché pour calibrer cette valeur dans notre modèle.

En ce qui concerne les produits dérivés optionnels, il existe une formule semi-fermée pour les modèles à sauts en fonction des prix de Black & Scholes. Dans notre cas, nous avons la formule suivante pour le prix d'un Call selon la dynamique de Merton :

$$C_{Merton}(S, K, \sigma, r, T, \lambda, m, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-m\lambda T} (m\lambda T)^k}{k!} C_{BS}(S, K, r_k, T, \sigma_k)$$

avec :

- $r_k = r - \lambda(m - 1) + k \frac{\log(m)}{T}$
- $\sigma_k = \sqrt{\sigma^2 + \frac{kv^2}{T}}$
- Le k -ème terme de cette série représente le scénario où k sauts se produisent pendant la durée de vie de l'option.

Nous disposons de tous les outils nécessaires pour projeter nos modèles, les comparer et vérifier s'ils satisfont les tests de validation présentés dans la partie 1.6.

4.4 Validation des modèles

Afin de ne pas surcharger cette partie, les résultats sont validés quel que soit le modèle initial utilisé pour les taux. Nous présenterons uniquement ceux obtenus avec le modèle HW1F. Les graphiques pour la modélisation des taux DDLMM se trouvent en annexe (cf F.2). La modélisation de l'immobilier est strictement similaire à celle de l'indice action qui suit la dynamique de Black & Scholes à la différence que nous ne le calibrons pas sur des prix de Call, elle ne sera pas présentée ici.

4.4.1 Test de martingalité

Toujours en s'appuyant sur la partie 1.6.1, nous effectuerons la vérification du test de martingalité :

$$\mathbb{E}[D(0, t)S_t] = S_0$$

Dans le graphe ci-dessous qui représente la valeur $\frac{\mathbb{E}[D(0,t)S_t] - S_0}{S_0}$. Nous pouvons observer que sur notre horizon de projection pour le modèle de Black & Scholes, la droite $y = 0$ est toujours incluse dans l'intervalle de confiance $\alpha = 95\%$. De plus, nous avons une erreur maximale de 6,57% avec une moyenne des erreurs de 2,51%. Nous pouvons considérer que la modélisation de Black & Scholes valide le test de martingalité.

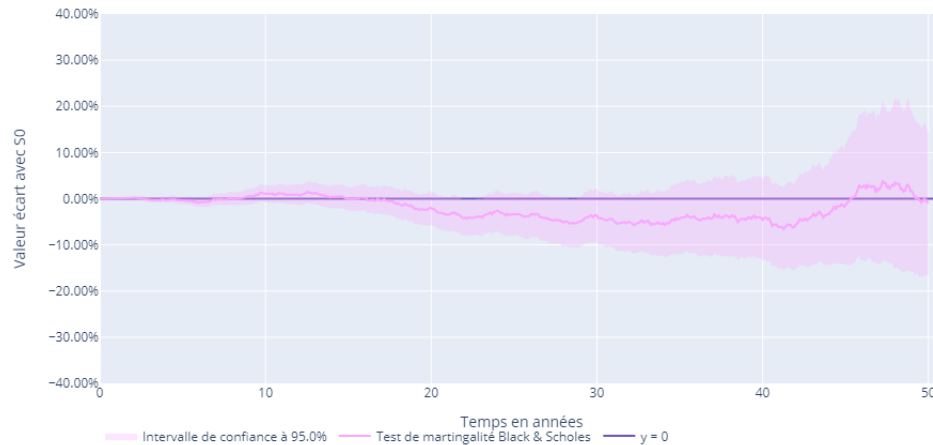


FIGURE 4.1 – Test de martingalité Black & Scholes

De la même manière que pour le modèle de Black & Scholes, dans le modèle de Merton à sauts, la droite $y = 0$ est comprise dans l'intervalle de confiance. Bien que l'erreur maximale de 18,11% et la moyenne des erreurs de 6,32% soient plus élevées, elles restent acceptables étant donné que la présence de sauts entraîne une volatilité plus élevée. Notre modélisation du modèle de Merton à sauts valide également le test de martingalité.

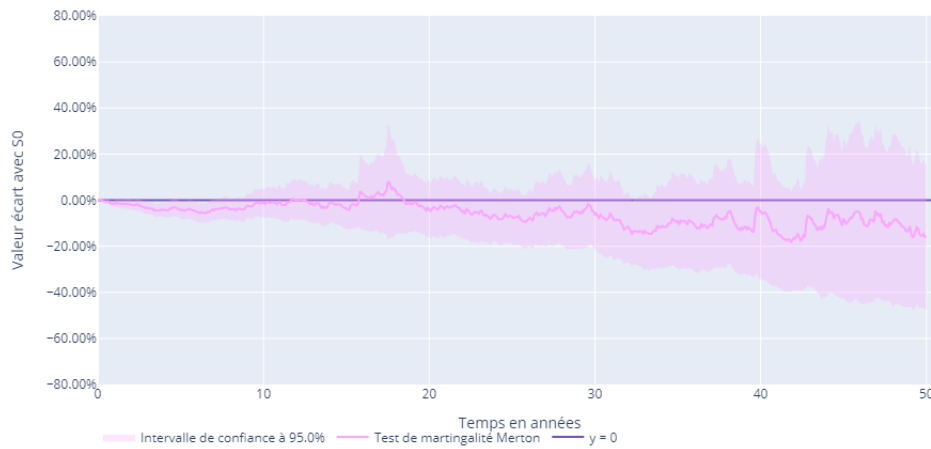


FIGURE 4.2 – Test de martingalité Merton

Maintenant que nos deux modèles ont validé le premier test, nous allons vérifier s'ils parviennent à reproduire correctement les prix de Call.

4.4.2 Test de *market-consistency*

En nous appuyant sur la partie 1.6.2, nous allons effectuer la vérification du test de *market-consistency*. Comme on peut le voir sur la figure 4.4, la totalité de la droite $y = 0$ est incluse dans l'intervalle de confiance sur l'horizon de projection pour le modèle de Black & Scholes. Nous pourrions noter que l'erreur maximale de 12,03% reste acceptable compte tenu d'une moyenne des erreurs de 5,69%.

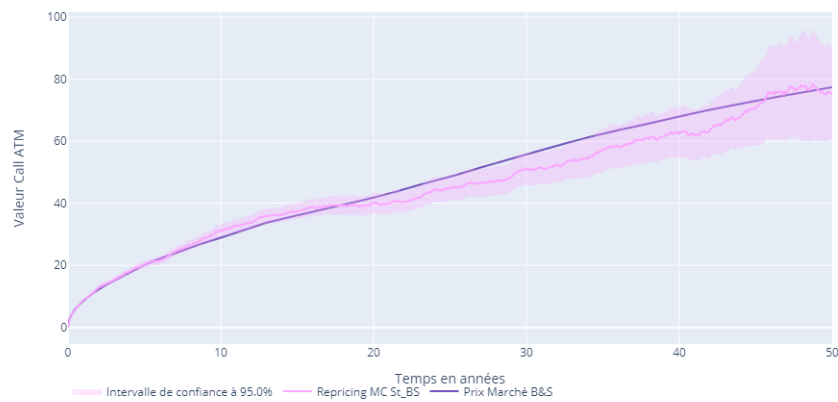
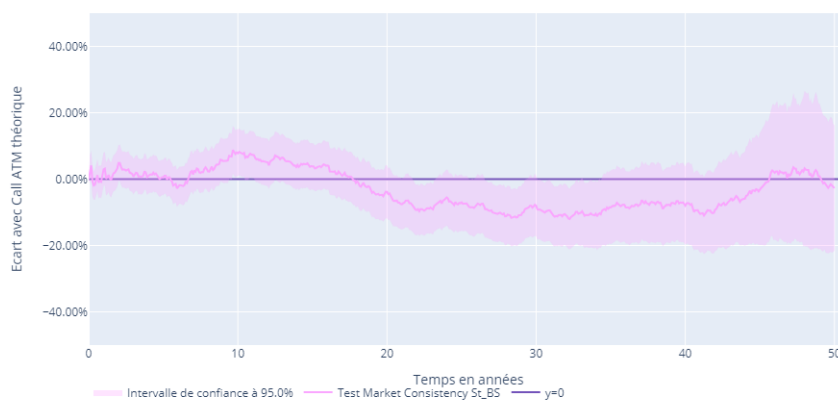


FIGURE 4.3 – Repricing Call Black & Scholes

FIGURE 4.4 – Test de *market-consistency* Black & Scholes

Dans le cas du modèle de Merton à sauts, en analysant le graphique 4.6, on constate que l'intégralité de la droite $y = 0$ se situe à l'intérieur des bornes de l'intervalle de confiance, bien que ces bornes soient plus larges en raison du processus de sauts. L'erreur maximale étant de 28,43% et la moyenne des erreurs de 7,95%, nous pouvons également valider le test de *market-consistency* car les valeurs excessives apparaissent après une projection de plus de 45 ans.

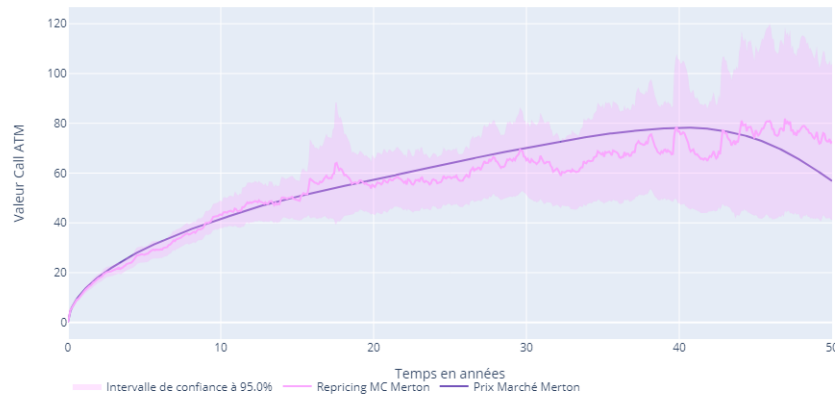
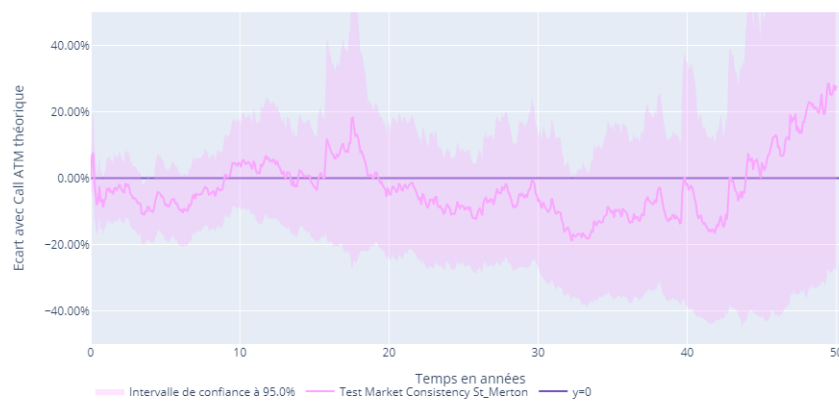


FIGURE 4.5 – Repricing Call Merton

FIGURE 4.6 – Test de *market-consistency* Merton

4.5 Comparaison des résultats inter-modèles & vision critique

Les valeurs des sous-jacents projetées avec les deux modèles sont très différentes, principalement en raison de la présence de sauts et de la façon dont ils ont été calibrés.

En utilisant des données provenant du CAC40, nous apportons une paramétrisation qui n'est pas présente dans le modèle de Black & Scholes. Les résultats peuvent également varier considérablement en fonction de la graine utilisée.

Pour optimiser ces résultats, nous avons développé un algorithme qui calcule l'erreur

quadratique afin de sélectionner les meilleures graines pour les deux modèles.

Enfin, lors de l'implémentation des GSE, le choix du modèle d'actions à privilégier devra être étroitement lié au portefeuille afin d'éviter des écarts trop importants dans les résultats.

Nous avons présenté et calibré un Displaced Diffusion LIBOR Market Model (DDLMM) et un modèle Hull & White à un facteur (HW1F) pour obtenir les courbes de taux nominaux. De plus, nous avons utilisé des OATi pour calibrer un modèle de Vašíček afin de modéliser une courbe de taux réels et en déduire l'inflation. Par la suite, nous avons modélisé les indices actions à l'aide du modèle de Black & Scholes avec une volatilité déterministe et le modèle de Merton avec sauts. Les tests de martingalité et de *market-consistency* ont été validés pour l'ensemble des modèles.

Ainsi, nous avons obtenu et validé les valeurs des différents facteurs financiers pour nos quatre GSE. Nous allons maintenant tester ces GSE dans un modèle ALM afin de mesurer leur impact sur des indicateurs clé pour leur analyse.

Chapitre 5

Comparaison & analyse des GSE réalisés

Comme indiqué dans la revue de l'ACPR "Générateur de Scénarios Économiques : points d'attentions et bonne pratiques" [1], il est important d'analyser la fuite de modèle, également appelée dérive, dans l'analyse des modèles ALM et son impact sur les résultats des grandeurs Solvabilité 2.

Pour cela, nous présenterons dans un premier temps les indicateurs utilisés afin de comparer nos GSE entre eux, puis le portefeuille utilisé et enfin, les résultats obtenus et les conclusions concernant les choix des modèles les plus appropriés.

5.1 Indicateurs étudiés

5.1.1 Fuite de modèle / Dérive

Nous savons qu'à partir du moment où le calcul stochastique est intégré il existera une erreur de convergence dans nos modèles.

Elle est définie dans la revue de l'ACPR [1] comme "*l'écart existant entre la valeur de marché (VM) de l'actif d'une part, et l'espérance des flux de trésorerie actualisés d'autre part. Ces flux se décomposent entre Best Estimate (BE) et marges futures (VIF)*"

$$\text{Fuite de modèle} = VM(\text{actif}) - BE - VIF$$

Malgré cette réalité, il faut veiller à ce que le modèle ne comporte pas d'erreurs pouvant augmenter cette dérive. C'est pourquoi des intervalles d'acceptation sont proposés dans cette même revue [1]. Si on note δ la dérive :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \leq 0,2\%VM & : \text{Calcul accepté} \\ 0,2\%VM < \delta \leq 0,5\%VM & : \text{Calcul accepté mais révision pour le prochain exercice} \\ 0,5\%VM < \delta & : \text{Correction} \end{array} \right.$$

De plus, d'après l'article L351-2 du Code des Assurances, cette fuite de modèle ne doit pas réduire le *Best Estimate* et elle doit être attribuée de façon à ce que le calcul des provisions techniques soit réalisé prudemment.

5.1.2 *Best Estimate*

D'après l'article R351-2 du Code des Assurances, le *Best Estimate* "correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs". En assurance vie, il est calculée via une modélisation stochastique des risques et une prise en compte des interactions entre l'actif et le passif.

Le *Best Estimate* des contrats en euro à un temps t est exprimé mathématiquement par :

$$BE(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=t}^{+\infty} \frac{F_i}{(1+r_i)} \right]$$

Avec :

- r_i le taux sans risque en i
- $F_i = \text{Prestations}_i - \text{Primes}_i + \text{Frais}_i - \text{Chargements}_i$, la somme des cash-flows futurs.

5.1.3 *Time Value of Financial Options and Guarantees*

La *Time Value of Financial Options and Guarantees* (TVFOG) représente la valeur temps des options financières et des garanties prises par un organisme d'assurance. En d'autres termes, l'inclusion des options dans un contrat d'assurance a un coût pour l'organisme et c'est ce coût que la TVFOG illustre.

Ces options peuvent être l'option de rachat¹ ou bien encore de taux minimum garanti² (TMG).

En effet, en cas de scénario économique favorable (où le taux de rendement de l'actif est supérieur au TMG), l'organisme est dans l'obligation de distribuer au minimum 85% des produit financiers et conserve donc au maximum 15% des bénéfices. À l'inverse, en cas de scénario économique défavorable (taux de rendement de l'actif inférieur au TMG), l'organisme supporte entièrement les pertes et doit indemniser l'assuré du différentiel de taux.

L'ajout d'options dans un contrat a un impact sur la valeur du *Best Estimate* et l'augmente en prévision de l'exercice de ces options. De ce fait, la TVFOG est l'impact

1. Droit pour un bénéficiaire de racheter son contrat quand il le souhaite
 2. Obligation pour l'organisme d'assurance de revaloriser le contrat à un taux minimum prédéterminé

des variations des actifs modélisés sur le *Best Estimate*. Elle se calcule en pratique de cette manière :

$$\text{TVFOG} = \text{BE}_{\text{Stochastique}} - \text{BE}_{\text{Equivalent-certain}}$$

Avec :

- $\text{BE}_{\text{Stochastique}}$ qui correspond au BE calculé pour chaque GSE.
- $\text{BE}_{\text{Equivalent-certain}}$ qui correspond au BE calculé avec la courbe de taux initiale.

Les indicateurs définis, nous allons présenter dans la section suivante le portefeuille utilisé pour cette étude.

5.2 Présentation du portefeuille étudié et du modèle utilisé

5.2.1 Présentation générale

Le portefeuille utilisé est celui d'une mutuelle qui propose des produits d'épargne et de retraite.

La répartition des valeurs de marchés entre les classes d'actifs est décomposée de la manière suivante :

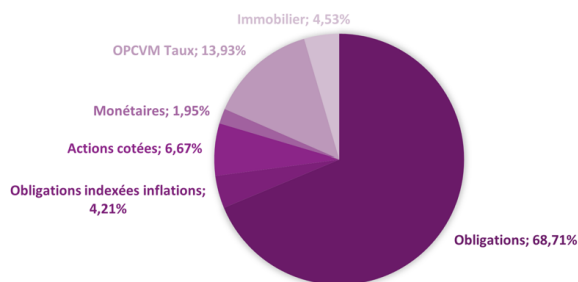


FIGURE 5.1 – Répartition des actifs en VM

Nous y retrouvons des actifs financiers qui seront impactés par les modélisations réalisées précédemment.

Dans le cadre de notre étude, nous nous concentrerons uniquement sur les résultats des contrats en euro.

En effet, les contrats en euro ont un capital et une revalorisation garanties par l'organisme d'assurance. L'organisme a l'obligation de servir un taux minimum (comprenant le taux technique) et de distribuer un minimum de ces revenus financiers comme techniques, c'est la participation minimum réglementaire aux bénéfices.

De plus, afin de lisser la rémunération sur les contrats en fonction des fluctuations de performances, l'organisme utilise également une provision pour la participation aux

bénéfices (PPB). Cette provision permet en cas de fort rendement de doter la PPB et en cas de crise de puiser dans la PPB. Une limite de 8 ans existe pour écouler le stock de PPB.

L'ensemble de ces éléments représente un risque réel pour l'organisme du fait de l'asymétrie de partage des richesses entre l'assuré et l'organisme. (par exemple avec le TMG)

Cette asymétrie n'est pas présente sur les contrats en unités de compte, étant donné que la perte en capital est supportée entièrement par l'assuré. L'utilisation de scénarios stochastiques et donc d'un GSE est primordiale pour les contrats en euro.

Il devient intéressant de voir les différences de nos modèles à travers ce prisme.

Enfin, le modèle ALM utilisé est Solveo développé par Fractales. Cette modélisation ALM tient compte d'un algorithme de participation aux bénéfices et d'une stratégie financière en valeur de marché. Nous avons repris le paramétrage de l'entité étudiée et une option permettant d'importer un GSE externe nous a permis de récupérer les résultats. Les résultats sont obtenus à partir de 1000 simulations stochastiques et d'un horizon de projection de 50 ans.

5.3 Résultats

Nous analyserons dans un premier temps la fuite de modèle engendrée par chaque GSE testé. Puis, nous mesurerons l'impact de cette dérive dans les indicateurs sélectionnés et le résultat de ces indicateurs par GSE étudié. Enfin, nous concluons quant au GSE optimal à utiliser dans le cadre de cette étude.

5.3.1 Fuite de modèle / Dérive

Sur l'horizon de projection et pour le nombre de simulations indiqué, nous obtenons les résultats suivants :

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
$\delta_{\text{moy}}/\text{an}$ (en %VM)	0,00529%	0,00982%	0,08488%	0,09075%
δ_{total} (en k€)	144 444	212 071	1 800 103	1 921 770

TABLE 5.1 – Fuite de modèle pour les quatre GSE réalisés

Les résultats de fuite de modèle pour nos quatre GSE se situent tous dans le critère $\delta \leq 0,2\%$. Cela implique que nos GSE ont été correctement réalisés sans erreur de choix mathématiques (par exemple : de discrétisation) ou de programmation (par exemple : lors du passage de la théorie au code Python ou lors du formatage des données).

Néanmoins, nous pouvons voir que les résultats de dérive avec le DDLMM sont plus importants que ceux réalisés avec le modèle HW1F. Cette augmentation de la fuite de modèle du DDLMM peut s'expliquer par le fait que nous avons utilisé des prix de marché

et une courbe de taux pouvant être négatifs. Cette prise en compte de taux négatifs est introduite par le facteur de décalage de la courbe de taux $h = 5\%$, qui n'est pas présent dans la modélisation HW1F. Selon l'article de F.Planchet & K.Armel [17], le modèle DDLMM diverge lors d'un calibrage sur les swaptions lorsqu'un facteur de décalage, aussi petit soit-il, est ajouté. Ils préfèrent considérer un paramétrage non *market-consistent* pour valoriser les contrats d'épargne en euro.

Ce résultat pouvait être anticipable dans la partie 2.4 sur la figure 2.8. En effet, la courbe de taux zéro coupon était moins bien reproduite avec le DDLMM qu'avec le modèle HW1F malgré une meilleure reproduction des prix des swaptions.

Cependant, il est à noter que l'obligation faite par Solvabilité 2 d'obtenir un modèle *market-consistent* n'est pas réalisable en pratique. En effet, il n'existe pas d'information observable sur un marché liquide et profond concernant les prix des options et garanties des polices d'assurance. C'est pourquoi les prix des produits financiers sont reproduits en pratique afin de valider le critère de *market-consistency*. En revanche, cette hypothèse ne permet pas de nous assurer une reproduction correcte du passif d'un contrat d'épargne en euro.

Ceci peut confirmer l'écart des dérivés entre ceux réalisés avec le modèle HW1F et DDLMM. A ce stade, nous pouvons supposer que le modèle adéquate est le modèle HW1F

5.3.2 *Best Estimate*

Il est à noter que dans la suite de cette analyse, nous ne discuterons pas du modèle inflation. En effet, son impact sur le portefeuille est minime et ne concerne que les frais généraux de l'assureur. Cependant, nous avons quand même vérifié les valeurs des *Best Estimate* de frais, et la différence entre la modélisation HW1F et le DDLMM est de 3000k€, ce qui est négligeable pour notre étude.

Les valeurs de nos dérivés étant toutes positives, elles sont intégrées au *Best Estimate*. Les *Best Estimate* évalués pour chaque GSE, avant et après affectation de la dérive, sont les suivants :

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
BE avant dérive (en k€)	41 800 291	41 928 834	40 215 738	40 452 214
BE après dérive (en k€)	41 914 735	42 140 905	42 015 841	42 373 984

TABLE 5.2 – *Best Estimate* avant et après intégration de la dérive

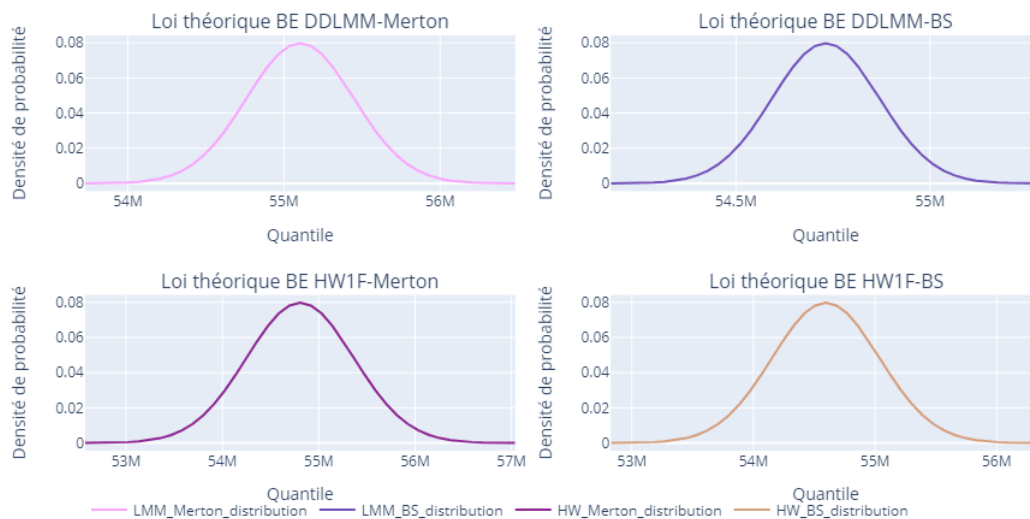
Avec ces résultats, nous constatons que quel que soit le modèle utilisé, l'utilisation du modèle de Merton à sauts implique un *Best Estimate* plus élevé, ce qui s'explique par le fait que ce modèle a une volatilité plus forte.

À partir de maintenant, les valeurs de *Best Estimate* concernent les portefeuilles totaux et non seulement les contrats en euros. Néanmoins, cela reflète la même vision que si nous regardions uniquement les valeurs des produits en euros, car les *Best Estimate* des produits en unités de compte sont similaires pour tous les GSE (cf 5.3).

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
BE UC (en k€)	12 680 341	12 666 377	12 715 762	12 729 993

TABLE 5.3 – *Best Estimate* des produits en unités de compte

Lorsque nous examinons la distribution des *Best Estimate* pour chacun des modèles, nous observons une forme de cloche décalée vers la droite, avec des queues plus ou moins longues en fonction du modèle utilisé, que ce soit le modèle de Merton à sauts ou celui de Black & Scholes (cf figure 5.2). Nous pouvons constater qu’une fois de plus, la projection avec le modèle de Merton donne une dispersion de valeurs beaucoup plus importante par rapport à celle du modèle de Black & Scholes, quelle que soit la modélisation des taux.

FIGURE 5.2 – Loi théorique des *Best Estimate* totaux (prise en compte des produits UC) pour chaque GSE

GSE	HW1F BS	HW1F Merton	DDLMM BS	DDLMM Merton
Maximum (en k€)	150 627 739	175 667 384	70 539 788	142 612 026
Minimum (en k€)	31 652 144	30 327 391	44 617 403	40 171 869
Moyenne (en k€)	54 595 049	54 807 282	54 731 603	55 103 977
Ecart-Type (en k€)	13 980 809	17 644 493	4 384 378	10 890 029

TABLE 5.4 – Statistiques sur la distribution du *Best Estimate* total de chaque portefeuille (prise en compte des produits UC)

En examinant les statistiques descriptives des 4 modèles, on remarque que les écarts-

types entre les modélisations HW1F et DDLMM sont assez importants. Ce phénomène est intrinsèque aux modèles utilisés. Dans le cas du DDLMM, nous capturons une structure de volatilité qui permet d'être plus flexible et de fournir des simulations plus précises, tandis que le modèle HW1F a un paramètre de volatilité constant.

De même, le DDLMM utilise une structure de corrélation $\rho_{ij}(t) = e^{-\beta|T_i - T_j|}$, ce qui implique une diminution de la corrélation entre deux dates éloignées, tandis que le modèle HW1F a une corrélation implicitement constante.

Enfin le modèle HW1F possède le paramètre κ de retour à la moyenne, ce qui signifie que si les taux s'écartent de la moyenne à long terme, ils auront tendance à y revenir avec le temps. Cette tendance peut entraîner une variation plus importante de l'écart type.

Le modèle HW1F ayant un écart-type de scénarios plus élevé, il peut capturer des scénarios extrêmes qui ne seront pas présents dans le cadre du DDLMM. Or, il peut être intéressant de se prémunir contre des situations économiques moins concentrées autour de la moyenne. Par conséquent, notre choix se porterait sur un GSE utilisant le modèle HW1F. En suivant cette logique dans le cas du modèle d'actions, nous utiliserons le modèle HW1F combiné à celui de Merton, ce qui nous permettra d'obtenir des scénarios plus extrêmes.

Nous verrons dans la partie suivante si l'analyse de la TVFOG nous permet de valider ce choix préliminaire.

5.3.3 *Time Value of Financial Options and Guarantees*

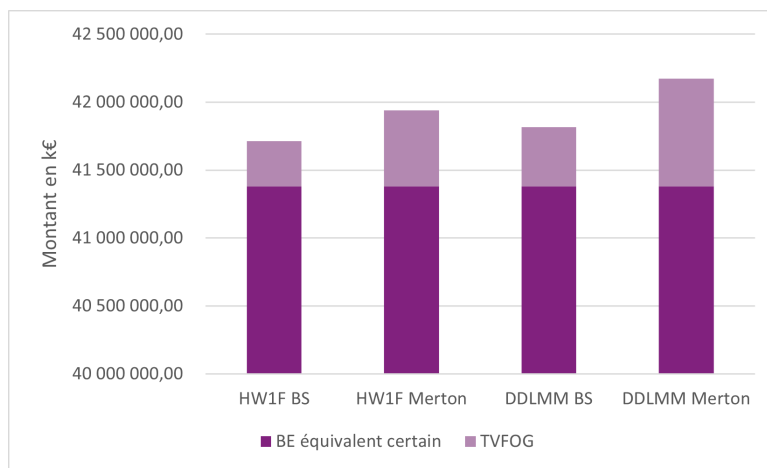


FIGURE 5.3 – *Best Estimate & TVFOG* pour les quatre GSE

Nous constatons des écarts assez importants de TVFOG entre chacun des modèles. En fonction du modèle retenu, l'organisme d'assurance augmentera le *Best Estimate* jusqu'à 792M€ de plus dans le cas du GSE DDLMM-Merton. Nous remarquons également que les TVFOG sont supérieurs avec le DDLMM, quel que soit le modèle d'actions choisi.

Ce phénomène est lié à la structure de volatilité capturée par le DDLMM, qui permet de mieux reproduire le marché que celle du modèle HW1F. Le DDLMM a des extrémums moins importants que le modèle HW1F, mais il présente moins d'asymétrie d'informations grâce à cette structure de volatilité. Par conséquent, le DDLMM a plus de valeurs supérieures au *Best Estimate équivalent certain*, ce qui se traduit par des *Best Estimate* et une TVFOG plus élevés. Le DDLMM nous permet donc de capturer des scénarios extrêmes en plus grand nombre, tandis que le modèle HW1F nous permet de capturer des scénarios plus extrêmes mais moins nombreux.

L'impact du modèle de Merton à sauts se reflète également ici, car il implique des scénarios plus extrêmes en plus grand nombre, ce qui augmente le coût des garanties et options financières pour le client.

Nous avons constaté que la fuite de modèle était impactée par chacune des composantes de nos modèles. La meilleure reproduction de la courbe des taux est obtenue avec le modèle HW1F, ce qui permet de minimiser la fuite de modèle. En revanche, l'impact d'un modèle spécifique d'action reste minime.

Ensuite, nous avons étudié les valeurs de *Best Estimate*. Le modèle de Merton présente des valeurs plus dispersées en raison de sa volatilité plus élevée par rapport au modèle de Black & Scholes. Nous avons également constaté que l'analyse des écarts-types et de la TVFOG a révélé un phénomène intéressant. Le modèle DDLMM, en reproduisant la structure de volatilité du marché, offre une flexibilité qui permet d'obtenir des simulations plus précises (avec moins d'extrémums) et moins d'asymétrie. Par conséquent, le DDLMM est capable de capturer un plus grand nombre de scénarios extrêmes, tandis que le modèle HW1F est plus apte à capturer des scénarios plus extrêmes, mais avec une fréquence moindre.

En combinant ces résultats, il en ressort que, compte tenu des limites des modèles, notre hypothèse d'utiliser le GSE HW1F-Merton se confirme. Ce GSE nous permet in fine de trouver le meilleur compromis entre prudence face aux scénarios extrêmes et minimisation de la fuite de modèle.

Chapitre 6

Conclusion, limites & ouverture

L'étude réalisée dans ce mémoire avait pour objectif de construire quatre Générateurs de Scénarios Économiques risque neutre et de déterminer l'optimal pour le portefeuille d'assurance vie étudié.

Dans un premier temps, nous avons présenté les bases théoriques des modèles de taux, d'inflation, d'actions et d'immobilier, en s'intéressant particulièrement à la calibration des différentes composantes de ces modèles.

Ensuite, à l'aide des tests de martingalité et de *market-consistency*, nous avons vérifié la validité des diffusions et confirmé qu'elles pouvaient être implémentées dans un modèle ALM actif-passif.

Enfin, après l'implémentation dans le modèle ALM, nous avons pu confirmer la bonne implémentation des modèles grâce au calcul des dérivées et comprendre l'impact de chaque type de modèles sur les valeurs du *Best Estimate* et de la TVFOG.

Cela nous a permis de conclure sur le choix du Générateur de Scénarios Économiques le plus adapté, à savoir le GSE HW1F-Merton. Ce choix représente le meilleur compromis entre la prudence face aux scénarios extrêmes et la limitation de la fuite de modèle.

Il est important de noter que notre étude s'est concentrée sur un portefeuille d'assurance vie spécifique, mais que ce travail est adaptable et applicable à n'importe quel autre portefeuille.

Nous reconnaissons certaines limites dans notre étude. Premièrement, le calibrage du modèle DDLMM s'est avéré complexe en raison des minimums locaux, ce qui aurait pu affecter les résultats finaux. Une calibration plus approfondie du modèle de volatilité et de corrélation du DDLMM pourrait améliorer ses performances. De plus, l'utilisation de swaptions dans un environnement de taux négatifs a introduit certains biais qui ne seraient pas produits dans un contexte de taux positifs.

La deuxième limite concerne le modèle inflation. L'intégration du modèle de Jarrow-Yildirim aurait pu corriger les problèmes de neutralité au risque de la relation de Fisher. Il aurait également été intéressant d'utiliser d'autres produits, tels que les *Zero Coupon*

Inflation Indexed Swap, pour extraire la courbe des taux réels, car ils sont plus abondants que les OATi et avec la possibilité de déduire le prix zéro coupon réel en fonction du prix zéro coupon nominal.

De plus, nous avons constaté des problèmes liés à la sélection des graines optimales pour le modèle de Merton avec sauts, remettant en question le caractère pseudo-aléatoire requis pour tout Générateur de Scénarios Économiques. Bien que nous ayons utilisé un ensemble de graines optimales, il serait préférable de générer un ensemble plus large pour garantir la propriété de pseudo-aléatoire.

Il convient également de souligner que les paramètres du modèle de Merton avec sauts ont été calibrés sur les données du CAC40, ce qui peut introduire des variations dans les résultats en fonction des actions présentes dans les portefeuilles. L'utilisation d'un autre indice pour la calibration des paramètres de sauts pourrait rendre les résultats plus robustes.

Malgré ces limites, nous avons étudié plusieurs combinaisons de différents modèles de facteurs financiers et vérifié leur implémentation. Nous avons pu observer l'impact des modèles de taux et d'actions sur les résultats du modèle ALM. Nous avons également souligné l'importance du choix du Générateur de Scénarios Économiques pour les assureurs, car il permet de capturer des phénomènes tels que les scénarios extrêmes et la fuite de modèle. Il est crucial de comprendre le choix des paramètres, des hypothèses et des calibrations pour se conformer aux exigences réglementaires, car un mauvais choix peut avoir des conséquences sur l'évaluation des agrégats de Solvabilité 2.

Pour aller plus loin, nous envisageons de développer un outil sous forme d'interface graphique permettant de visualiser les calibrations et les contrôles de chaque modèle de manière plus accessible.

Table des figures

1	Courbe de taux reproduite par HW1F vs courbe de taux initiale	viii
2	Repricing swaption Tenor 1 an DDLMM	ix
3	Loi théorique des <i>Best Estimate</i> totaux (prise en compte des produits UC) pour chaque GSE	xii
4	<i>Best Estimate</i> & TVFOG pour les quatre GSE	xiii
5	Rate curve reproduced by HW1F vs initial rate curve	xvi
6	Repricing swaption Tenor 1 an DDLMM	xvii
7	Theoretical law of total <i>Best Estimate</i> (taking into account UC products) for each GSE	xx
8	<i>Best Estimate</i> & TVFOG for the four GSEs	xxi
2.1	Nappe de volatilité normale théorique vs calibrée	19
2.2	Différence des valeurs de volatilité normale sur tenor 1 an et 10 an	20
2.3	Courbe de volatilité avec les paramètres a, b, c et d calibrés	25
2.4	Nappe de volatilité décalée théorique vs calibrée	25
2.5	Test de martingalité sur le déflateur avec la méthode HW1F	27
2.6	Courbe de taux reproduite par HW1F vs courbe de taux initiale	28
2.7	Test de martingalité sur le déflateur avec la méthode DDLMM	28
2.8	Courbe de taux reproduite par DDLMM vs courbe de taux initiale	29
2.9	Repricing swaption Tenor 1 an HW1F	30
2.10	Repricing swaption Tenor 10 an HW1F	30
2.11	Repricing swaption Tenor 1 an DDLMM	31
2.12	Repricing swaption Tenor 10 an DDLMM	31
3.1	Approximation des taux réels extraits des OAT $_i$	36
3.2	Taux réel par Vasicek	37
3.3	Inflation avec taux nominal HW1F	37
4.1	Test de martingalité Black & Scholes	43
4.2	Test de martingalité Merton	44
4.3	Repricing Call Black & Scholes	45
4.4	Test de <i>market-consistency</i> Black & Scholes	45
4.5	Repricing Call Merton	46
4.6	Test de <i>market-consistency</i> Merton	46

5.1	Répartition des actifs en VM	51
5.2	Loi théorique des <i>Best Estimate</i> totaux (prise en compte des produits UC) pour chaque GSE	54
5.3	<i>Best Estimate</i> & TVFOG pour les quatre GSE	55
A.1	Comparaison convergence de la valeur d'un Call par Monte Carlo avec/sans variables antithétiques	65
F.1	Inflation avec taux nominal DDLMM	77
F.2	Test de martingalité Black & Scholes	78
F.3	Test de martingalité Merton	78
F.4	Repricing Call Black & Scholes	79
F.5	Test de <i>market-consistency</i> Black & Scholes	79
F.6	Repricing Call Merton	80
F.7	Test de <i>market-consistency</i> Merton	80
G.1	Courbe de taux reproduite par HW1F	81
G.2	Test de martingalité sur le déflateur HW1F	82
G.3	Déflateur reproduit par DDLMM	82
G.4	Test de martingalité sur le déflateur DDLMM	83
G.5	Test de martingalité Black & Scholes	83
G.6	Test de <i>market-consistency</i> Black & Scholes	84
G.7	Test de martingalité Merton	84
G.8	Test de <i>market-consistency</i> Merton	85

Liste des tableaux

1	Fuite de modèle pour les 4 GSE réalisés	xi
2	Ecart-Type sur la distribution du <i>Best Estimate</i> total de chaque portefeuille (prise en compte des produits UC)	xii
3	Model leakage for the 4 GSEs carried out	xix
4	Statistics on the distribution of the total <i>Best Estimate</i> of each portfolio (including unit-linked products)	xx
2.1	ATM Swaptions extraites de Bloomberg	18
2.2	Volatilités normales des swaptions extraites	18
2.3	Volatilités décalées des swaptions extraites	24
2.4	Ecart entre volatilités décalées théoriques & calibrées	26
5.1	Fuite de modèle pour les quatre GSE réalisés	52
5.2	<i>Best Estimate</i> avant et après intégration de la dérive	53
5.3	<i>Best Estimate</i> des produits en unités de compte	54
5.4	Statistiques sur la distribution du <i>Best Estimate</i> total de chaque portefeuille (prise en compte des produits UC)	54

Bibliographie

- [1] ACPR. *Générateur de scénarios économiques : points d'attentions et bonne pratiques*. https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20201204_article_gse_revue.pdf. Déc. 2020 (cf. p. 7, 49).
- [2] Institut des ACTUAIRES. *Document d'Orientation : Les Générateur de scénarios économiques*. https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=15033&fg=1. Sept. 2018 (cf. p. 7, 8).
- [3] F. BLACK et M. SHOLES. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, 1973 (cf. p. 39).
- [4] Renaud BOURLES. *Mouvement Browniens*. Centrale Marseille, 2015 (cf. p. 6).
- [5] M. BRACE A. Gatarek D. et Musiela. *The Market Model of Interest Rate Dynamics*. Mathematical Finance, 1997 (cf. p. 21).
- [6] F. BRIGO D. Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance, 2006 (cf. p. 9, 16, 18, 21, 23, 34, 74).
- [7] University of BRITISH COLUMBIA. *The Newton-Raphson Method*. <https://personal.math.ubc.ca/~ansteemath104/104newtonmethod.pdf> (cf. p. 73).
- [8] John C.HULL. *OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVES*. Pearson, 2014 (cf. p. 7).
- [9] Thibault MARCHAL & Tan N'GUYEN CHRISTOPHE DUTANG. *Mersenne Twister et Translation irrationnelle du tore : comparaison et mise en oeuvre pratique*. Avril 2008 (cf. p. 5).
- [10] M. DANA R-A. Jeanblanc. *Financial Markets in Continuous Time*. Springer Finance, 2007 (cf. p. 9).
- [11] Jarrow & Morton HEATH. *Bond pricing and the term structure of interest rate : a discret time approximation*. 1990 (cf. p. 16).
- [12] Université de Rennes 1 JEAN-CHRISTOPHE BRETON. *Processus stochastiques*. https://perso.univ-rennes1.fr/jean-christophe.breton/Fichiers/processus_M2.pdf. Sept. 2022 (cf. p. 69).
- [13] Thibaud LOPEZ. *Modélisation risque neutre de l'inflation, appliquée aux régimes de retraite*. Sept. 2017 (cf. p. 12).

-
- [14] Robert C. MERTON. *Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discounted*. Massachusetts Institute of Technology, 1975 (cf. p. 41).
- [15] Vincent NOZICK. *Nombres aléatoires*. UPEM, 2022 (cf. p. 5).
- [16] Françoise PÈNE. *Simulation de processus stochastiques*. EURIA, 2022 (cf. p. 6, 71).
- [17] Kamal ARMEL & Frédéric PLANCHET. *Comment définir la qualité d'un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le best-estimate épargne en €*. Avril 2018 (cf. p. xi, xix, 53).
- [18] Kamal ARMEL & Frédéric PLANCHET. *CONSTRUIRE UN GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES RISQUE NEUTRE*. https://www.researchgate.net/publication/328058661_Construire_un_generateur_de_scenarios_economiques_risque_neutre. Mai 2018 (cf. p. 16).
- [19] William H. PRESS. *Numerical recipes 3rd edition : The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007 (cf. p. 75).
- [20] Riccardo REBONATO. *Volatility and Correlation 2nd Edition The Perfect Hedger and the Fox*. John Wiley & Sons, 2004 (cf. p. 22).
- [21] P. TANKOV et R. CONT. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman Hall, 2004 (cf. p. 41).
- [22] Pierre-E. THEROND. *Techniques de simulation : discrétisation d'équations différentielles stochastiques*. ISFA, 2005 (cf. p. 71).
- [23] Oldrich VAŠÍČEK. *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*. Journal of Financial Economics 5, 1977 (cf. p. 34).

Annexe A

Aléas et dépendance

A.1 Variables antithétiques

Lemme 1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles et ψ une fonction décroissante telle que $\psi(Y)$ qui a même loi que Y . Si g est monotone et telle que $g(Y)$ soit de carré intégrable alors $Cov(g(Y), g(\psi(Y))) \leq 0$.

Exemple de la convergence sur un Call :

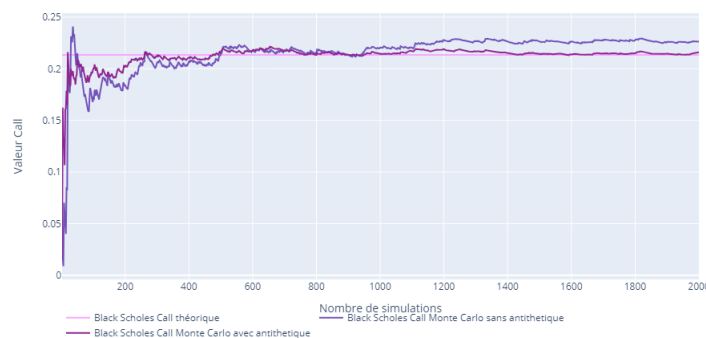


FIGURE A.1 – Comparaison convergence de la valeur d'un Call par Monte Carlo avec/sans variables antithétiques

A.2 Aléas corrélés

Theoreme de Cholesky : 1. Soit A une matrice symétrique définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire L à diagonale positive telle que $A = L^t L$. On appelle L la "décomposée de Cholesky de A ".

Pour construire L de manière explicite :

1. Construction de la première colonne, on pose :

$$\Sigma_{1,1} = \sqrt{A_{1,1}}$$

puis $\forall i=2,\dots,d$

$$\Sigma_{i,1} = A_{i,1}/\Sigma_{1,1}$$

2. Construction par récurrence des colonnes $j \in 2, \dots, d$, on pose :

$$\Sigma_{j,j} = (A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \Sigma_{j,k}^2)^{1/2}$$

$\forall i = j+1,\dots,d$

$$\Sigma_{i,j} = \frac{A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \Sigma_{j,k} \Sigma_{i,k}}{\Sigma_{j,j}}$$

Dans le cas particulier où A est définie comme précédemment et si $Y \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ suit une loi gaussienne centrée d-dimensionnel, on a une construction explicite d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, A)$. Effectivement, il existe une unique matrice L triangulaire inférieure à diagonale positive telle que $A = L^t L$, si on pose $C = m + LY$ alors il en découle $C \sim \mathcal{N}(m, A)$.

Donc dans notre cas C est bien gaussien et si A est notre matrice de corrélation car elle vérifie les hypothèses du théorème, on a bien C qui est corrélée suivant la matrice A .

Application :

Valeur initiale :

	Inflation	Taux court	Taux long	Action	Immobilier
Inflation	1	-0,2	-0,2	0	0
Taux court	-0,2	1	0,7	-0,1	-0,05
Taux long	-0,2	0,7	1	-0,2	-0,05
Action	0	-0,1	-0,2	1	0,2
Immobilier	0	-0,05	-0,05	0,2	1

Après corrélation des browniens :

	Inflation	Taux court	Taux long	Action	Immobilier
Inflation	1	-0,2003	-0,1998	0,0009	-0,0005
Taux court	-0,2003	1	0,6993	-0,0988	-0,0483
Taux long	-0,1998	0,6993	1	-0,1992	-0,0495
Action	0,0009	-0,0988	-0,1992	1	0,1984
Immobilier	-0,0005	-0,0483	-0,0495	0,1984	1

Annexe B

Validation et acceptation d'un GSE

B.1 Test de Kolmogorov

Test de Kolmogorov : 1. *Ce test permet de déterminer si un échantillon suit une loi donnée connue par sa fonction de répartition. Il repose sur les propriétés des fonctions de répartition empiriques.*

Soit X_1, \dots, X_n , n variables i.i.d définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R} , avec pour fonction de répartition F . La fonction de répartition empirique F_n de l'échantillon X_1, \dots, X_n est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i(\omega) \leq x}$$

On teste l'hypothèse que la fonction de répartition F est égale à F_0 avec un risque d'erreur α . Déroulement du test :

- 1. On ordonne les valeurs observées $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$*
- 2. On pose $F(x_1) = \frac{1}{n}, \dots, F(x_n) = 1$ ce qui définit la fonction de répartition de F en escalier*
- 3. On calcule $K = \sup |F(x) - F_0(x)|$ par la formule $K = \max_{1 \leq j \leq n} (\frac{j}{n} - F_0(x_j), F_0(x_j) - \frac{j-1}{n})$*
- 4. On lit la valeur critique D_n dans la table de la loi du Δ de Kolmogorov-Smirnov. Si $K < D_n$, on accepte l'hypothèse, sinon, on la rejette.*

B.2 Seuil d'erreur

Pour chaque instrument de marché $t \in [1, T]$, $P_{0,t}^M$ son prix de marché à t et $P_{0,t}$ son prix calculé à partir des trajectoires. On définit l'erreur relative d'estimation pour chaque instrument t :

$$\forall t \in [1, T], \varepsilon_t = \frac{|P_t - P_t^M|}{P_t^M}$$

Avec la distribution de ces erreurs, on peut construire des critères de validation, comme la moyenne des erreurs qui doit être inférieure à un certain seuil ou bien comme l'erreur maximale qui doit être inférieure à une valeur donnée.

Annexe C

Produits financiers

C.1 Formule d'Itô

Nous reprenons la formulation du théorème écrite dans [12].

Théorème 1 (Formule d'Itô). *Soit X une semimartingale continue et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , alors*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Si on considère p semimartingales $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ et $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , alors

$$F(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(p)}) = F(X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(p)}) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)}) dX_s^{(i)} \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)}) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s$$

Annexe D

Discrétisation

Une discrétisation permet de passer d'un état continu à un temps discret. Les énonciations qui suivent proviennent des cours sur la simulation de processus stochastiques délivrés à EUro Institut d'Actuariat [16] et à l'Institut de Science Financière et d'Assurances [22]. Ce procédé requiert *la détermination de la loi du processus aux instants de discrétisation*. On peut l'obtenir à tout moment dans certains cas précis, on réalise alors une discrétisation exacte sinon on utilisera *des processus discrets qui convergent vers les processus que l'on souhaite simuler*.

D.1 Discrétisation exacte

Définition 15. *Un processus $(\tilde{X}_{k\delta})_{k \in [1; T/\delta]}$ est une discrétisation exacte de X si $\forall \delta > 0, \forall k \in [1; T/\delta]$,*

$$\tilde{X}_{k\delta} \stackrel{L}{\sim} X_{k\delta}.$$

Propriété 1. *Un processus X admet une discrétisation exacte si on peut résoudre explicitement l'équation différentielle stochastique qui lui est associée.*

Ceci est le cas du modèle de Black & Scholes (4.2) et d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck présent dans le modèle de Vašíček (3.2.1) et donc aussi dans le modèle HW1F (2.2).

D.2 Schéma d'Euler

Soit $N \geq 1$ et $h = T/N$. On souhaite approcher la solution de

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = Y$$

par discrétisation en considérant les instants kh ($k = 0, \dots, N$) à l'aide de $(W_{kh})_{k=0, \dots, N}$. On définit, $\forall k = 0, \dots, N - 1$,

$$\bar{X}_0^{(N)} := Y, \quad \bar{X}_{(k+1)h}^{(N)} := \bar{X}_{kh}^{(N)} + \sigma(kh, \bar{X}_{kh}^{(N)})(W_{(k+1)h} - W_{kh}) + b(kh, \bar{X}_{kh}^{(N)})h$$

On considère aussi, $\forall k = 0, \dots, N - 1$ et tout $t \in]kh; (k + 1)h]$,

$$\bar{X}_t^{(N)} := \bar{X}_{kh}^{(N)} + \sigma(kh, \bar{X}_{kh}^{(N)})(W_t - W_{kh}) + b(kh, \bar{X}_{kh}^{(N)})(t - kh)$$

Théorème 1. *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème d'Itô (auto-lipschitzienne) et supposons de plus qu'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait :*

$$|\sigma(t, x) - \sigma(s, x)| + |b(t, x) - b(s, x)| \leq c(1 + |x|)(t - s)^\alpha.$$

Soit $\delta := \min(\alpha, \frac{1}{2})$. Alors, pour tout entier $p \geq 1$, il existe $C_p > 0$ tel qu'on a

$$\forall N \geq 1, \quad \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0; T]} \left| \bar{X}_t^{(N)} - X_t \right|^{2p} \right] \leq C_p \frac{1 + \mathbb{E}[|Y|^{2p}]}{N^{2p\delta}}$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| \sup_{t \in [0; T]} \left| \bar{X}_t^{(N)} - X_t \right| \right\|_{2p} = O(N^{-\delta}) \text{ si } Y \in \mathbb{L}^{2p}.$$

De plus pour tout $\gamma < \delta$, $\left(N^\gamma \sup_{t \in [0; T]} \left| \bar{X}_t^{(N)} - X_t \right| \right)_{N \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si $Y \in \mathbb{L}^2$: - si $f(X) = g(X_T)$ où g est une fonction lipschitzienne¹, alors on a*

$$\left| \mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}\left[g\left(\bar{X}_T^{(N)}\right)\right] \right| = O(N^{-\delta}).$$

- Si $f(X) = g(X_T)$ où g est une fonction α -höldérienne (avec $\alpha \in (0, 1]$), alors on a

$$\left| \mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}\left[g\left(\bar{X}_T^{(N)}\right)\right] \right| = O(N^{-\alpha\delta}).$$

- Si $f : (C([0, T]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est α -höldérienne (avec $\alpha \in (0, 1]$), alors on a

$$\left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}\left[f\left(\bar{X}^{(N)}\right)\right] \right| = O(N^{-\alpha\delta}).$$

Annexe E

Calibration

E.1 Méthode de Newton-Raphson

C'est un algorithme qui permet de trouver numériquement une approximation d'une racine d'une fonction réelle d'une variable réelle. Il peut être illustrer de la manière suivante [7] :

On admet que x_0 est une bonne estimation de r tel que $r = x_0 + h$. Alors h mesure à quelle distance l'estimation x_0 est loin de r . Alors si h est "petit", on peut utiliser l'approximation linéaire tel que

$$0 = f(r) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ et donc

$$r = x_0 + h \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On a alors une estimation améliorée x_1 de r tel que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On peut avoir une nouvelle estimation x_2 de x_1 comme réalisée précédemment. En continuant le procédé de cette manière si x_n est l'estimation actuelle alors la prochaine estimation x_{n+1} sera donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

E.2 Arbres trinomial HW1F

Définition 16. *L'arbre trinomial est une extension d'un arbre binomial (qui a pour caractéristiques que le prix de l'actif observé a une probabilité noté π_u de monter et $1 - \pi_u$ de baisser). Dans le cas de l'arbre trinomial, on apporte un état de transition supplémentaire dans lequel le prix peut rester stable entre deux périodes de temps.*

On reprendra ici que les grandes lignes présentés par Brigo & Mercurio [6]. Le lecteur peut se référer à l'Annexe F du livre pour plus de précisions sur cette thématique.

La procédure se décompose en deux parties :

La première consiste à la construction de l'arbre trinomial pour un processus x de la forme $dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t$. On cherche à discrétiser cette dynamique dans le temps et l'espace.

En notant les nœuds de l'arbre par (i, j) où l'index du temps $i \in [0, N]$ et l'index de l'espace $j \in [\underline{j}_i, \bar{j}_i]$ avec $\underline{j}_i < 0$ et $\bar{j}_i > 0$.

On note $x_{i,j}$ la valeur du processus au nœud (i, j) . En rappelant que $r(t)|\mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}\left(r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-\kappa(t-s)}; \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)})\right)$ et en notant $\forall t, x(t) = r(t) - \alpha(t)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x(t_{i+1})|x(t_i) = x_{i,j}] &= x_{i,j}e^{-\kappa\Delta t_i} =: M_{i,j} \\ \text{Var}[x(t_{i+1})|x(t_i) = x_{i,j}] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t_i}) =: V_i^2\end{aligned}$$

On pose aussi $x_{i,j} = j\Delta x_i$ où $\Delta x_i = V_{i-1}\sqrt{3}$. Sous certaines conditions sur le k -ième nœud, on obtient les probabilités des 3 transitions possibles :

$$\begin{cases} \pi_u &= \frac{1}{6} + \frac{\eta_{j,k}^2}{6V_i^2} + \frac{\eta_{j,k}}{2\sqrt{3}V_i}, \text{ le taux monte} \\ \pi_m &= \frac{2}{3} - \frac{\eta_{j,k}^2}{3V_i^2}, \text{ le taux est identique} \\ \pi_d &= \frac{1}{6} + \frac{\eta_{j,k}^2}{6V_i^2} - \frac{\eta_{j,k}}{2\sqrt{3}V_i}, \text{ le taux baisse} \end{cases}$$

où $\eta_{j,k} = M_{i,j} - x_{i+1,k}$.

La deuxième constitue à déplacer les nœuds de l'arbre pour obtenir l'arbre correspondant à r .

On note α_i , le déplacement au temps t_i . La quantité α_i est calculé numériquement de cette manière :

- On note $Q_{i,j}$ la valeur d'un instrument qui paye 1 si le nœud (i, j) est atteint et 0 sinon.
- Les valeurs de α_i et $Q_{i,j}$ sont calculés récursivement à partir de α_0 qui est fixé de manière à retrouver le déflateur de maturité t_1 c'est à dire $\alpha_0 = \frac{-\ln(P^M(0, t_1))}{t_1}$.
- Dès que les valeurs des α_i sont connus, les valeurs des $Q_{i+1,j}, j = \underline{j}_{i+1}, \dots, \bar{j}_{i+1}$ sont calculés tel que

$$Q_{i+1,j} = \sum_h Q_{i,h} q(h, j) e^{-(\alpha_i + h\Delta x_i)\Delta t_i}$$

où $q(h, j)$ est la probabilité de passé du nœud (i, h) au nœud $(i+1, j)$.

- Après avoir dérivé la valeur de $Q_{i,j}$ pour chaque j , la valeur de α_i est calculé en résolvant :

$$P(0, t_{i+1}) = \sum_{j=\underline{j}_i}^{\bar{j}_i} Q_{i,j} e^{-(\alpha_i + j\Delta x_i)\Delta t_i}$$

ce qui nous amène à :

$$\alpha_i = \frac{1}{\Delta t_i} \ln\left(\frac{\sum_{j=\underline{j}_i}^{\bar{j}_i} Q_{i,j} e^{-j\Delta x_i\Delta t_i}}{P(0, t_{i+1})}\right)$$

Nous avons comme résultat maintenant un arbre où chaque nœud (i, j) est associé à une valeur $r_{i,j} = x_{i,j} + \alpha_i$.

E.3 Algorithme de Nelder-Mead

On s'appuiera ici sur le livre de W.H.Press [19]. L'algorithme de Nelder-Mead est un algorithme de recherche direct qui permet de trouver le minimum ou le maximum d'une fonction objectif dans un espace à plusieurs dimensions.

Il est le plus souvent utilisé sur les problèmes d'optimisation non linéaires pour lesquels les dérivées sont inconnues. Il s'appuie sur l'utilisation des simplexes.

Définition 17 (Simplexe). *Un simplexe est la généralisation du triangle dans un espace à n -dimensions. C'est l'objet géométrique fermé le plus simple dans un espace à n -dimensions. De manière plus formelle, c'est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $n + 1$ points utilisé pour former un repère affine dans un espace affine de dimension n . On peut prendre en exemple les triangles qui sont des 2-simplexes.*

Pour présenter simplement la façon dont fonctionne l'algorithme à chaque étapes :

- Initiale : Calcul de la fonction objectif à chaque point et classement de ces points
- On effectue des transformations géométriques pour obtenir des points plus optimisés (basé sur le centre de gravité du simplexe en supprimant le sommet le moins efficace).
- Arrêt : Lorsque le critère d'arrêt est atteint (ici on s'en tiendra à 1000 itérations maximales).

Annexe F

Résultats DDLMM

F.1 Inflation

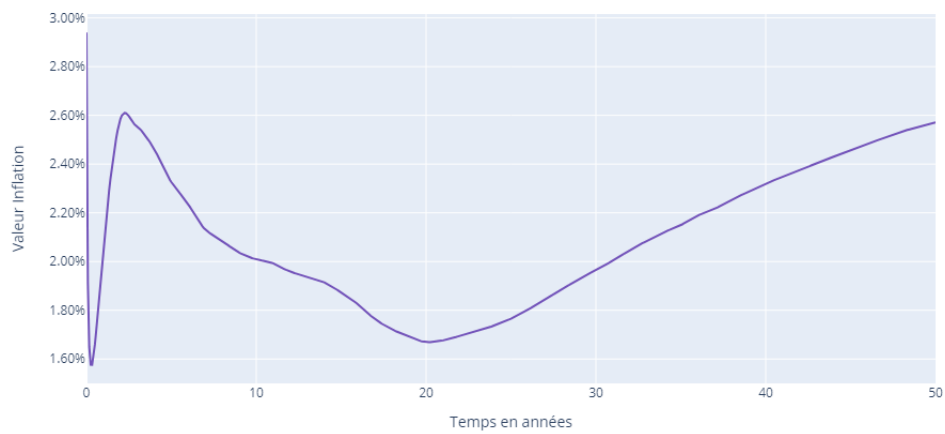


FIGURE F.1 – Inflation avec taux nominal DDLMM

F.2 Actions

F.2.1 Test de martingalité

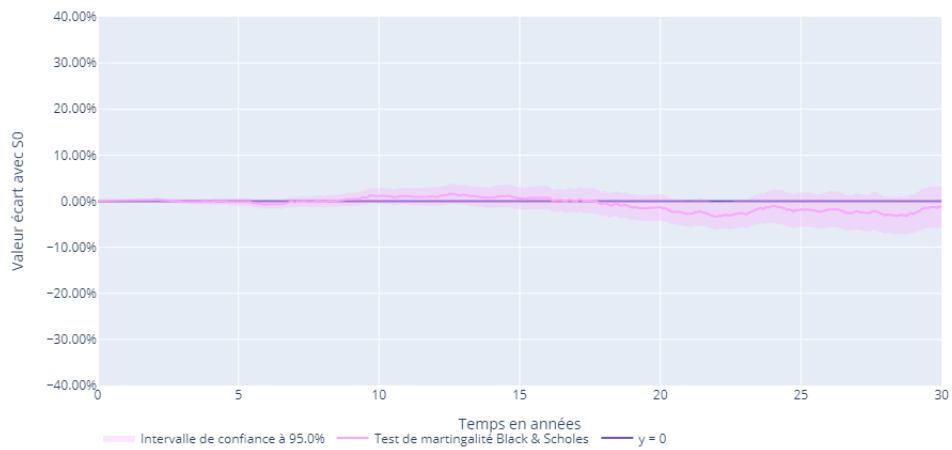


FIGURE F.2 – Test de martingalité Black & Scholes

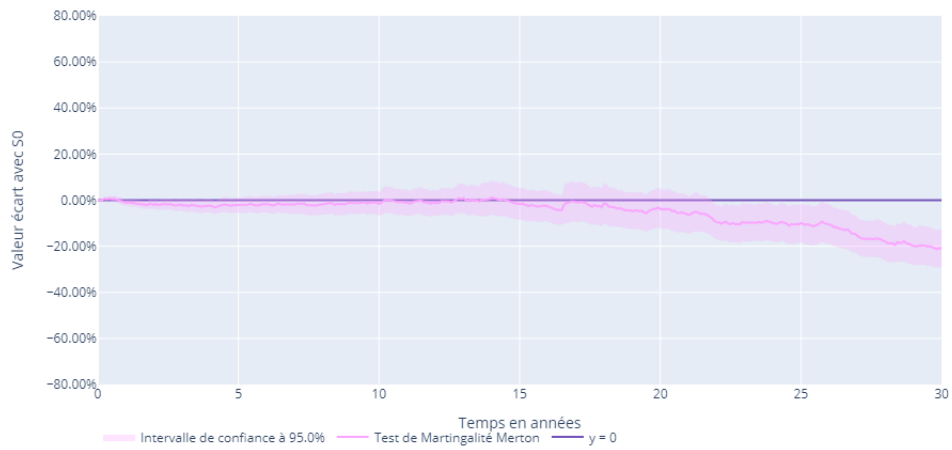


FIGURE F.3 – Test de martingalité Merton

F.2.2 Test de *market-consistency*

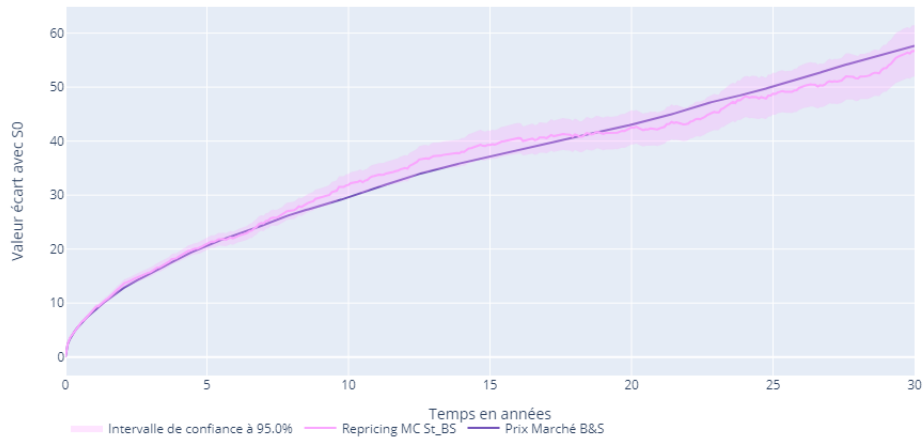


FIGURE F.4 – Repricing Call Black & Scholes

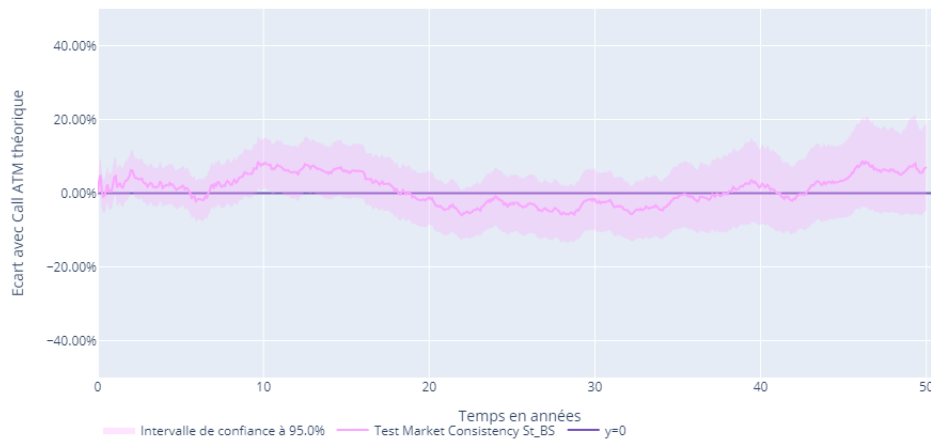


FIGURE F.5 – Test de *market-consistency* Black & Scholes

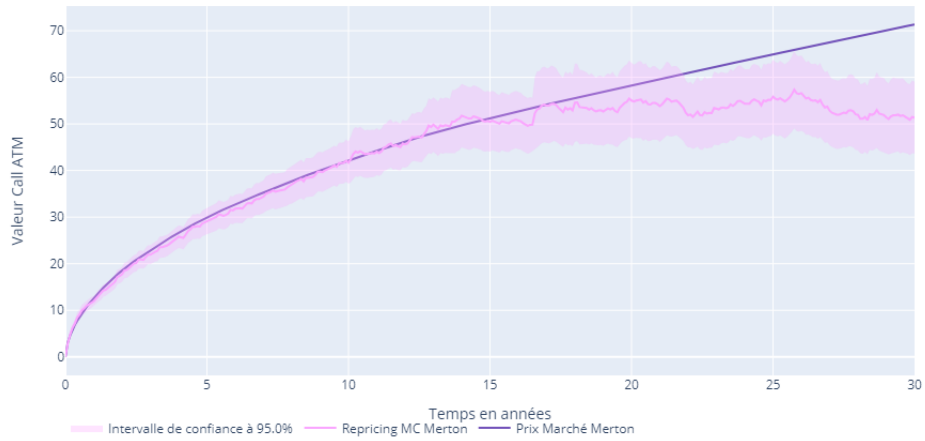
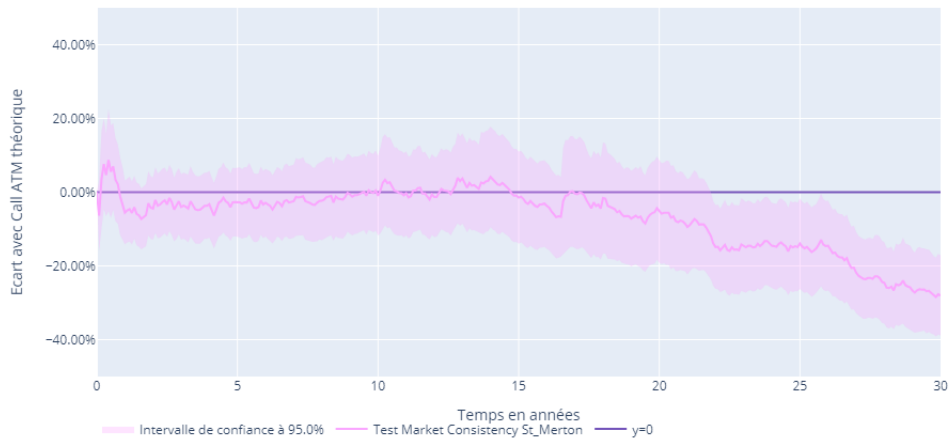


FIGURE F.6 – Repricing Call Merton

FIGURE F.7 – Test de *market-consistency* Merton

Annexe G

Exemples de résultats avec la courbe de taux de décembre 2022

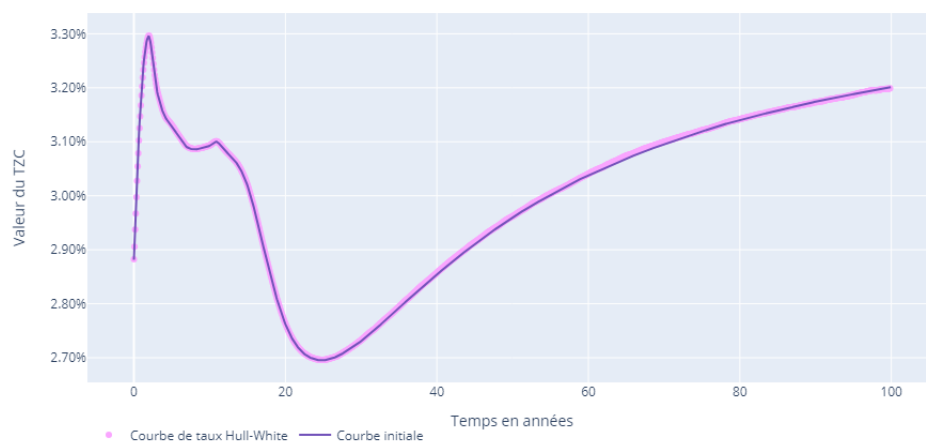


FIGURE G.1 – Courbe de taux reproduite par HW1F

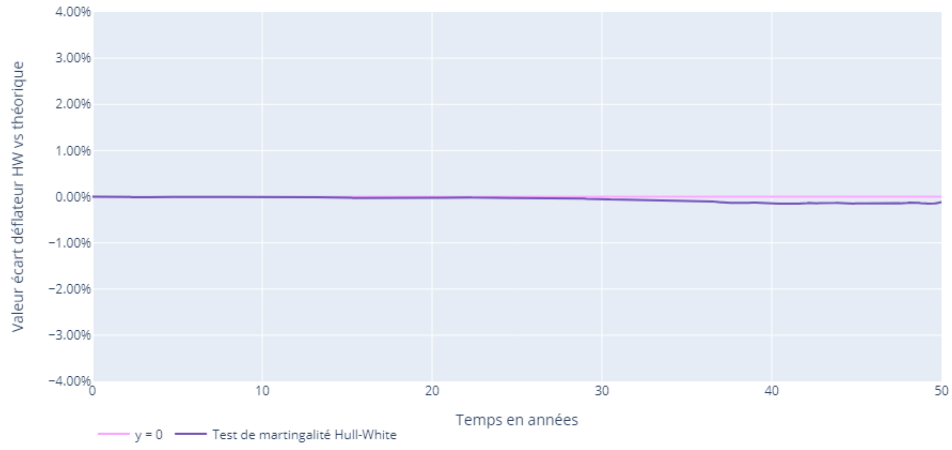


FIGURE G.2 – Test de martingalité sur le déflateur HW1F

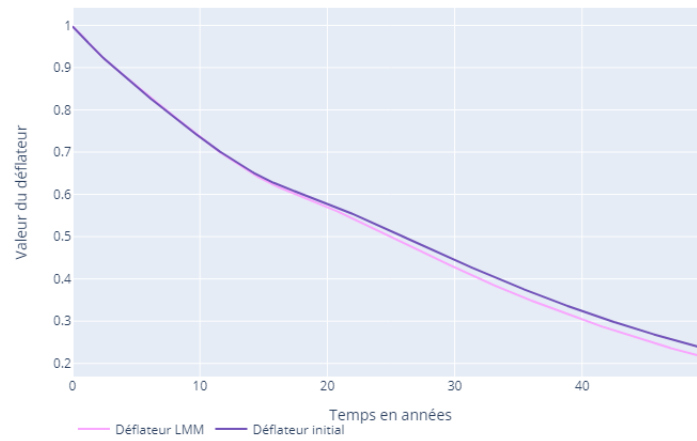


FIGURE G.3 – Déflateur reproduit par DDLMM

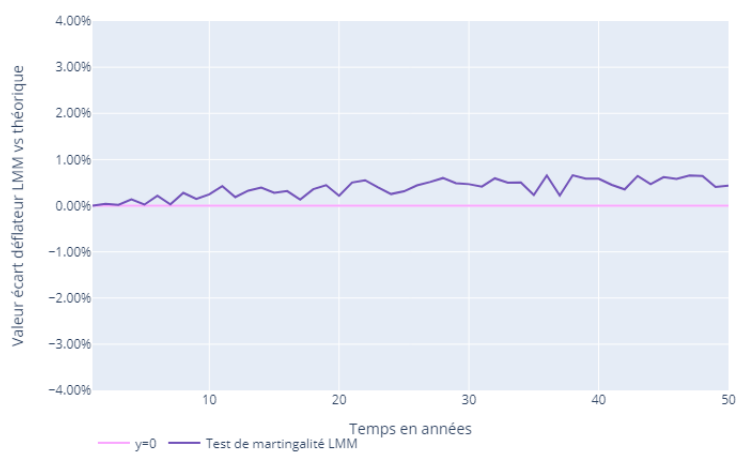


FIGURE G.4 – Test de martingalité sur le déflateur DDLMM

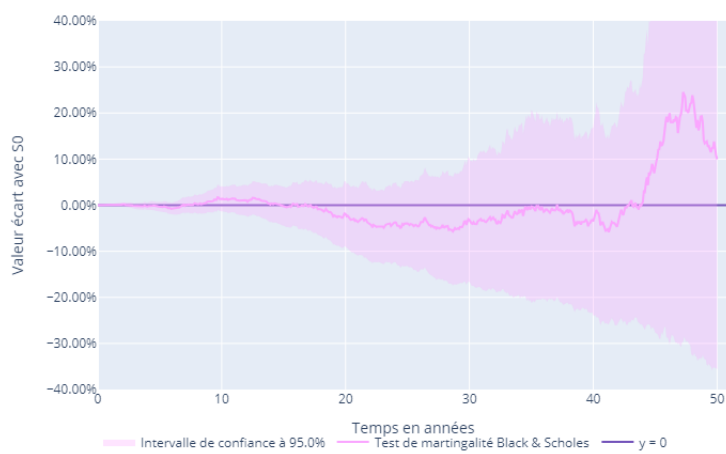


FIGURE G.5 – Test de martingalité Black & Scholes

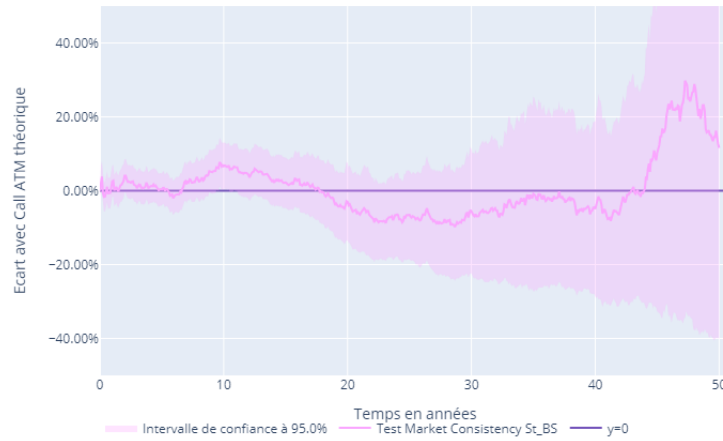


FIGURE G.6 – Test de *market-consistency* Black & Scholes

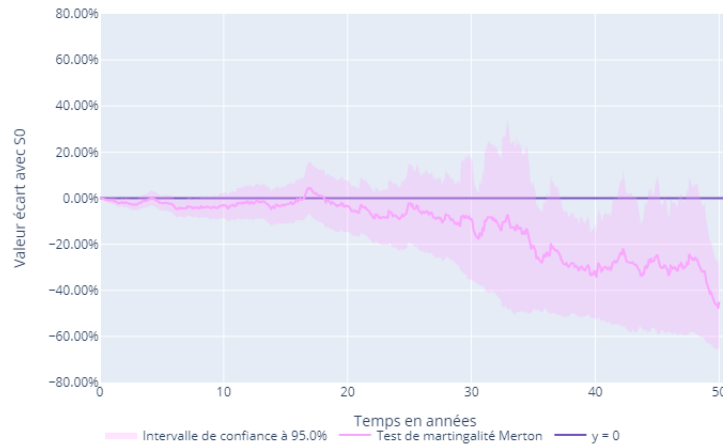


FIGURE G.7 – Test de martingalité Merton

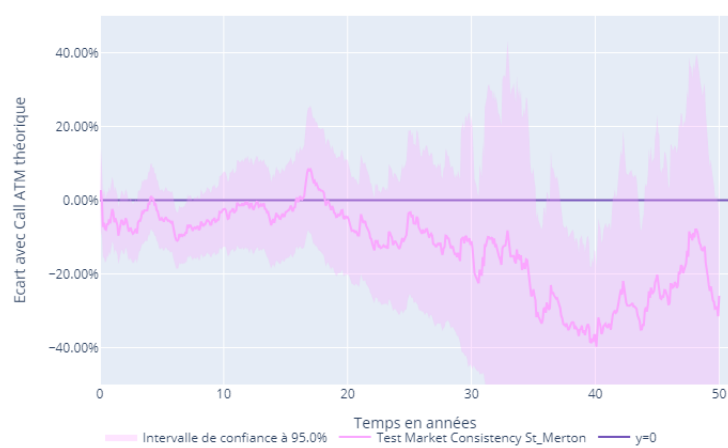


FIGURE G.8 – Test de *market-consistency* Merton