

Mémoire présenté le : 23/05/2023

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Niclas CATALANO

Titre : Allocation d'actifs et applications dans un modèle ALM

Confidentialité :  NON  (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de Signature  
l'Institut des Actuaires*

Frédéric Planchet  
.....  
.....

*Membres présents du jury de  
l'ISFA*

Diana Dorobantu  
.....  
.....

*Entreprise*

*Nom : MALAKOFF HUMANIS*

*Signature :*

*Directeur de mémoire en entreprise*

*Nom : Naoufal EL-BEKRI*

*Signature :*




*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

*Autorisation de publication et  
de mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actua-  
riels (après expiration de l'éventuel  
délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat





## Résumé

---

Mots clés : Allocation d'actifs, ALM, Markowitz, Théorie moderne du portefeuille, Approximation de Cornish-Fisher, Méthode de réarrangement

L'allocation d'actifs est au coeur de la gestion de la solvabilité et la rentabilité de l'assurance. Elle permet de s'assurer de la croissance des fonds confiés à l'assureur tout en permettant à celui-ci de faire face à ses obligations envers les assurés.

Afin de s'assurer de la bonne gestion des fonds confiés, les assureurs ont développé des modèles ALM (*Asset and Liabilities Management*) permettant d'avoir un aperçu de la situation comptable et financière future de l'assurance.

Certains modèles ont vocation à tester un nombre important d'allocations pour choisir celle qui prévoit la meilleure situation financière de l'assurance. D'autres demandent plus de temps de calcul et nécessitent donc de choisir un nombre faible d'allocations à partir d'autres méthodes. C'est dans ce cadre que l'étude a été menée.

L'enjeu de ce mémoire sera de trouver une méthode pertinente permettant de définir une allocation d'actifs performante et prudente. Il faudra ensuite s'assurer de la qualité de l'allocation au regard du passif et des indicateurs comptables en utilisant le modèle ALM.

Ce mémoire sera divisé en cinq parties. Une première partie introduira le sujet et le contexte. On explicitera ensuite le cadre classique rendement-volatilité défini par Markowitz (MARKOWITZ, 1952). Il sera montré que celui-ci possède des limites importantes dans la mesure où la volatilité n'est pas une mesure suffisante pour la gestion du risque en assurance. La troisième partie détaillera ensuite une méthode d'allocation d'actifs basée sur l'approximation de Cornish-Fisher (CORNISH et FISHER, 1938, FISHER et CORNISH, 1960) combinée à une méthode de réarrangement (CHERNOZHUKOV et al., 2010). Cette méthode permet d'obtenir une estimation des queues de distribution des pertes d'un portefeuille sans faire l'hypothèse de normalité des actifs.

La quatrième partie présentera le fonctionnement du modèle ALM de Malakoff Humanis. Enfin, la dernière partie portera sur l'utilisation du modèle pour s'assurer de l'adéquation des allocations trouvées avec le profil du passif et la projection de l'actif.

## Abstract

---

Keywords: Asset allocation, ALM, Markowitz, Modern Portfolio Theory, Cornish-Fisher Extension, Rearrangement Method

Asset allocation is at the core of insurance companies' solvency and profitability management. It ensures the stable growth of the delegated funds from the insured while allowing the insurer to cope with its liabilities. In order to provide a good management of these delegated funds, insurers developed ALM (Asset and Liabilities Management) models that allow them to have a trustworthy picture of the future financial situation of the company.

Some models are meant to test an important number of allocations and thereby choosing the one that forecast the best financial situation for the company. In contrast, some other models necessitate more calculation time and therefore are only able to test a few allocations, thus requiring to choose the allocation with other tools. This dissertation has been conducted within this latter framework.

This dissertation aims to find a pertinent method allowing us to define a performant and secure asset allocation. It will then verify the quality of the chosen asset allocation by using the ALM model from Malakoff Humanis, especially regarding the liabilities.

This dissertation will be divided in five parts. The first part will explain the context and the aim of the study. The second part will detail Markowitz's (Markowitz, 1952) mean-variance framework. It will be shown that this framework possesses some weaknesses in the context of insurance risk-management.

The third part will then present an asset allocation method based on Cornish-Fisher's extension (Cornish and Fisher, 1938, Fisher and Cornish, 1960) combined with a rearrangement method (Chernozhukov et al., 2010). This combination allows for an estimation of distribution tails from an allocation without needing the hypothesis of normality of asset classes.

The fourth part will present the functioning of Malakoff Humanis' ALM model. The last part will be about using the model in order to check the adequation of the chosen allocations with the liabilities and the asset projection.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>Note de Synthèse</b>	<b>7</b>
<b>Executive summary</b>	<b>15</b>
<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>1 Objectifs et contexte de l'étude</b>	<b>25</b>
1.1 Le portefeuille étudié . . . . .	25
1.2 L'allocation d'actifs en assurance vie . . . . .	25
1.3 Les données . . . . .	28
<b>2 Théorie de Markowitz en modèle Rendement-Volatilité</b>	<b>31</b>
2.1 Modélisation d'un marché à $n$ actifs risqués . . . . .	31
2.2 Application dans le cadre de l'allocation d'actifs en assurance . . . . .	33
<b>3 Approximation de Cornish-Fisher</b>	<b>46</b>
3.1 Outils théoriques sur les valeurs extrêmes . . . . .	46
3.2 Présentation de l'approximation de Cornish-Fisher . . . . .	47
3.3 Utilisation de l'approximation réarrangée . . . . .	56
<b>4 Présentation du modèle ALM</b>	<b>66</b>
4.1 Le vieillissement . . . . .	67

4.2	Catégories de l'univers de modélisation . . . . .	68
4.3	La politique financière . . . . .	73
4.4	Le rebalancement . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Application des allocations trouvées au modèle ALM</b>	<b>77</b>
5.1	Rappel des allocations testées . . . . .	77
5.2	Présentation des résultats . . . . .	77
	<b>Conclusion</b>	<b>82</b>
	<b>Remerciements</b>	<b>83</b>

# Note de Synthèse

## Problématique et contexte

Selon la Banque de France, au troisième trimestre de l'année 2021, l'assurance-vie en fonds euros représente 28% du total des placements des ménages (pour un montant de 1 684 milliards d'euros). Dans le cadre de la gestion de ces fonds, l'assureur doit faire face à de multiples contraintes. Celui-ci doit s'assurer de pouvoir payer les prestations aux assurés et rendre leur épargne lorsque ceux-ci en font la demande. De plus, ils sont confrontés à une concurrence importante les obligeant à produire et à redistribuer des rendements conséquents, et ce, dans un contexte où les taux d'intérêt ont été très bas pendant une décennie. Enfin, les crises financières de ces dernières années ont montré que l'assureur doit faire face à des variations importantes du point de vue de l'actif qu'il possède. Pour cela, l'assureur doit allouer les fonds qui lui sont confiés de sorte à obtenir un rendement espéré important et stable. Il faut donc trouver un moyen d'obtenir le meilleur rendement espéré possible tout en limitant le risque du portefeuille. Ce mémoire a pour but de proposer un outil pour répondre à cette problématique.

## La théorie moderne du portefeuille

Le cadre fondateur de la gestion de portefeuille moderne trouve ses bases dans les travaux de Markowitz (MARKOWITZ, 1952). Il expose un modèle d'optimisation permettant à un investisseur rationnel de maximiser le rendement espéré et minimiser la volatilité de son portefeuille.

Il se base sur la notion **d'efficience du portefeuille**. Les portefeuilles efficients s'obtiennent en minimisant la volatilité d'un portefeuille donné sous contrainte de rendement. Cela nous permet d'obtenir une frontière efficiente de Markowitz de la forme d'une hyperbole. Afin d'appliquer ce modèle, un ensemble de données représentatives de notre portefeuille d'actifs a été calibré. Celui-ci se compose de différentes classes et une table de rendement-volatilité ainsi qu'une matrice de corrélation a été calibrée pour cette étude. Ces données s'appliquent à une période étudiée égale à six mois. Cette étude va avoir pour base de départ le portefeuille initial de l'entité 'MHP Actif Général' appartenant au groupe 'Malakoff Humanis'.

A partir de l'utilisation de ces données, l'obtention d'une frontière efficiente est directe, mais les résultats de l'allocation ne sont pas pertinents par rapport aux contraintes de l'assureur. En effet, nous ne souhaitons pas avoir recours à la vente à découvert, ni modifier une partie trop importante du portefeuille sur la période. Des contraintes ont alors été appliquées sur la réallocation.

On note  $w_{init}$  le vecteur tel que  $w_{init} = (w_1, w_2, \dots, w_7)$ , représentant la part de chaque classe d'actifs dans l'allocation initiale de l'entité *MHP Actif Général*. On cherchera à modifier  $w_{init}$  pour la rapprocher le plus possible de  $w_{cible}$ .  $w_{cible}$  étant un portefeuille efficient. Cependant, notre étude a mis en évidence de nombreuses limites dans le choix de  $w_{cible}$ , notamment dans les montants de réinvestissements. Le

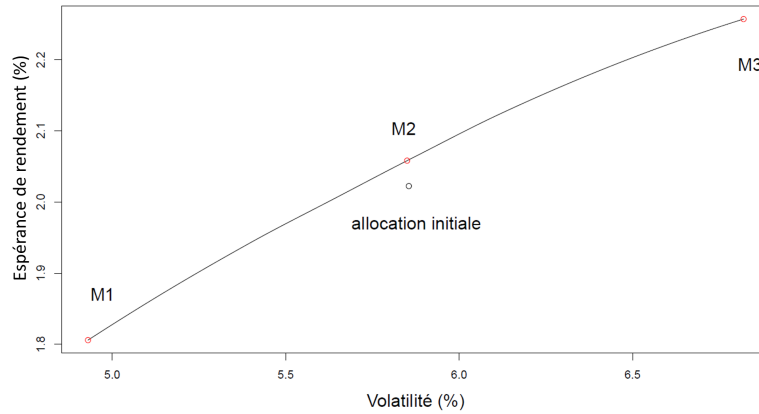


FIGURE 1 : Frontière efficiente sous contraintes obtenues dans le cadre de l'optimisation rendement-volatilité

problème a été traduit par une recherche du point le plus proche de la frontière efficiente ( $FE$ ) par rapport à une limite  $L$  de distance entre les allocations  $w_{init}$  et  $w_{cible}$ . Cela s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{w_{cible}} & (dist_2(w_{cible}, FE)) \\ \text{s.c.} & dist_1(w_{init}, w_{cible}) < L \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $dist_2(w_{cible}, FE)$  étant le minimum de distance entre le point  $w_{cible}$  et l'ensemble des points de la frontière efficiente  $FE$ .

Une frontière efficiente alternative respectant ces conditions a été présentée. (figure 1).

Cette frontière efficiente affiche les premiers résultats réellement applicables par notre entité, compte tenu des contraintes fixées.

Elle n'est cependant pas aussi large que la première car les contraintes de poids obligent l'intervalle possible pour le rendement espéré et la volatilité du portefeuille à être non seulement borné, mais très réduit.

Un ensemble de trois allocations représentatives d'une appétence au risque a été choisi et affiché sur la figure 1.

1. Une allocation prudente choisie avec une volatilité minimale à 4.9% (point  $M_1$ ).
2. Une allocation intermédiaire choisie avec une volatilité à 5.85% (point  $M_2$ ). Cette allocation aura pour objectif de conserver la volatilité de l'allocation initiale tout en augmentant son rendement espéré.
3. Une allocation offensive possédant le rendement espéré maximal possible à 6.8% de volatilité (point  $M_3$ ).



## Limites de la méthode

L'optimisation du couple rendement-volatilité de Markowitz propose un modèle pertinent par rapport aux enjeux des acteurs de l'assurance, mais ce modèle ne semble pas assez détaillé pour éviter certains écueils de taille :

1. Le problème des queues de distribution lourdes
2. Le problème des distributions asymétriques.

## Approximation de Cornish-Fisher

L'axe d'étude choisi a alors été d'utiliser l'approximation de Cornish-Fisher. L'approximation de Cornish-Fisher permet de transformer une variable aléatoire gaussienne  $z$  centrée réduite en une variable non gaussienne  $Z$  centrée réduite. On note  $S$  le coefficient d'asymétrie et  $K$  le coefficient de *kurtosis* (en excès). La transformation de Cornish-Fisher à l'ordre 4 est décrite par l'équation suivante :

$$Z = z + (z^2 - 1) \frac{S}{6} + (z^3 - 3z) \frac{K}{24} - (2z^3 - 5z) \frac{S^2}{36} \quad (2)$$

Une caractéristique parfois négligée est que cette transformation n'est pas valide pour toutes les valeurs de  $K$  et de  $S$ . Lorsque l'approximation est utilisée avec des paramètres invalides, une fonction quantile en forme de 'U' apparaît. Ces valeurs sont mathématiquement aberrantes et cela vient fausser les résultats de l'approximation.

Pour que l'approximation soit valide, il est nécessaire et suffisant que la transformation soit bijective. On pose

$$k = \frac{K}{24} \quad s = \frac{S}{6}$$

L'approximation est valide si et seulement si

$$9k^2 - (3 + 33s^2)k + 30s^4 + 7s^2 \leq 0 \quad (3)$$

La qualité d'approximation de Cornish-Fisher a pu être illustrée dans la figure de l'article de AMÉDÉE-MANESME et al., 2015 (2).

Pour vérifier la validité de l'approximation sur des rendements d'actifs, les données de rendement net de l'*EURO STOXX 50* ont été extraites afin de pouvoir apprécier la pertinence de l'approximation sur un indice de référence.

Les rendements journaliers de l'indice sur dix ans ont été récupérés. Ces données nous donnent accès aux rendements jour par jour (ouvrable), mais permettent aussi d'induire les rendements mois par mois, et année par année si l'on tronque la donnée pour s'intéresser à une échelle plus grande. Ces rendements nous donnent accès à un *kurtosis* et un coefficient d'asymétrie propre à la période donnée. C'est précisément cette idée qui a été reprise dans l'étude pour tracer les fonctions de *kurtosis* et *skewness* en fonction de la période de référence (tables 3a et 3b).

Ces données ont pu montrer que sur un indice commun, la validité de l'approximation peut clairement être remise en question sur des périodes telles que six mois ou un an.

Il y a donc un réel problème de validité de l'approximation de Cornish Fisher sur des données financières.

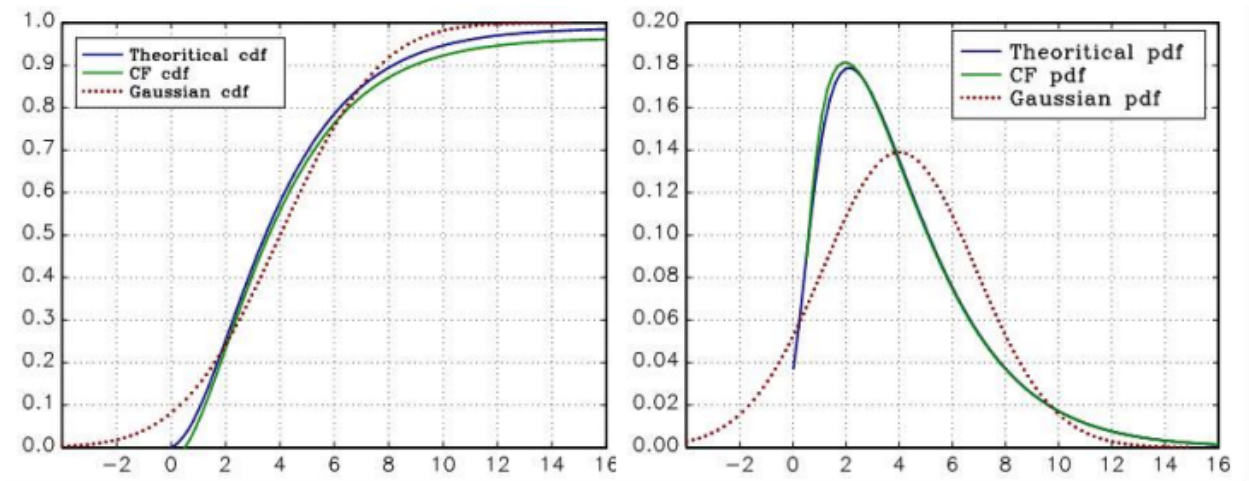


FIGURE 2 : Fonction de répartition et de densité obtenues avec l'approximation de Cornish-Fisher avec une distribution du Khi-deux à 4 degrés de liberté,  $\mu = 4$   $\sigma^2 = 8$   $S = 1.41$   $K = 6$  (AMÉDÉE-MANESME et al. (2015))

$n$	RMSE CF sans réarrangement	RMSE CF avec réarrangement	Diminution du RMSE
32	0,019	0,017	11%
16	0,060	0,035	42%
8	0,17	0,049	71%
4	0,4	0,19	53%

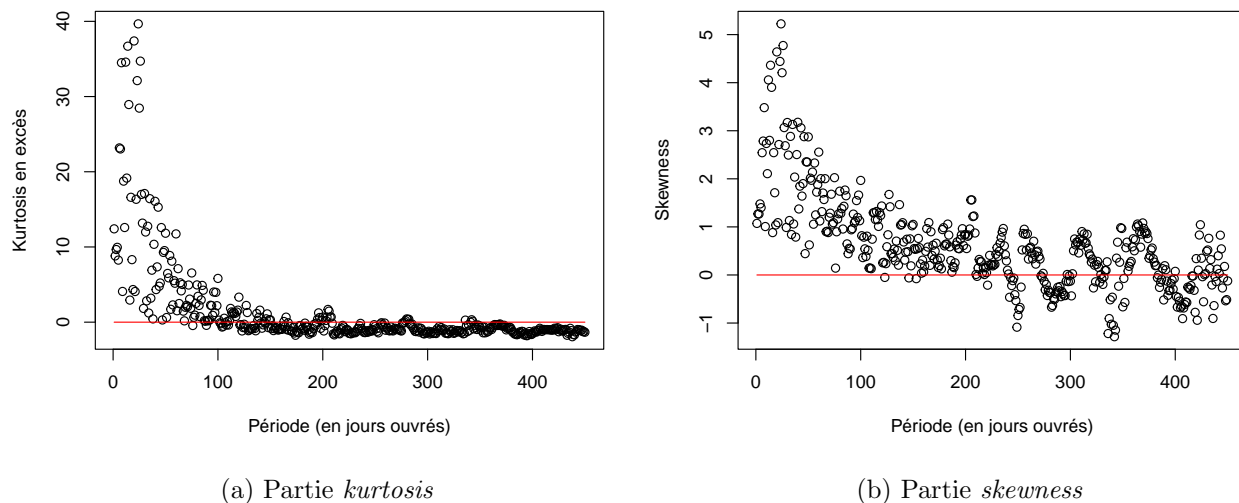
TABLE 1 : Comparaison des RMSE avec et sans réarrangement

La solution choisie pour répondre à cette problématique est d'utiliser une méthode de réarrangement des valeurs obtenues par l'approximation de Cornish-Fisher.

Sa pertinence dans le cadre de l'approximation de Cornish-Fisher est explicitée dans l'article de CHERNOZHUKOV et al., 2010. Une analyse de la qualité d'estimation de l'approximation avec réarrangement a également été appliquée de la même manière que dans l'étude de CHERNOZHUKOV et al., 2010. Celle-ci vient appuyer la qualité d'ajustement de la méthode avec réarrangement. La synthèse des résultats est présentée dans la table 1.

L'étude a également fait l'objet d'une application des estimations de Cornish Fisher par classe d'actifs afin de s'assurer de la cohérence des résultats estimés par la méthode. Enfin, trois profils d'allocations représentatifs d'une appétence au risque prédéfinie ont été générés. L'amélioration de l'allocation du groupe s'est basée sur deux critères principaux :

1. L'espérance de rendement
2. La  $\text{VaR}_{99,5\%}$  du rendement

FIGURE 3 : Coefficients de *kurtosis* et de *skewness* obtenus en fonction de la période considérée

De la même manière que dans la première partie, les contraintes suivantes ont été utilisées :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k &= 1 \\ \forall k, w_k &\geq 0 \\ \forall k, w_k &\leq 1 \\ dist_1(w, w_{cible}) &< 15\% \end{aligned}$$

Les allocations obtenues sont les suivantes :

1. Une allocation prudente choisie avec une  $VaR_{99,5\%}$  minimisée à 13% (point 'CF 1').
2. Une allocation intermédiaire choisie avec une  $VaR_{99,5\%}$  à 15.6% (point 'CF 2'). Cette allocation aura pour objectif de conserver la  $VaR_{99,5\%}$  de l'allocation initiale tout en augmentant son rendement espéré.
3. Un allocation offensive possédant une  $VaR_{99,5\%}$  à 19% (point 'CF 3').

Ce mémoire a également fait l'objet d'une partie présentant les spécificités du modèle ALM du groupe.

Enfin, les 3 allocations déterminées par le modèle de Markowitz et les 3 allocations utilisées avec l'approximation de Cornish-Fisher réarrangée ont été appliquées au modèle ALM.

## Utilisation du modèle ALM

Nous avons appliqué le modèle ALM et observé l'évolution de différents indicateurs selon l'allocation. Nous avons choisi de restreindre les résultats présentés par le modèle à quelques indicateurs principaux. Ces indicateurs sont listés ci-dessous :

Nom des allocations	CF 1	CF 2	CF 3	M 1	M 2	M 3
ACTION	16%	22%	17%	13%	16%	18%
IMMO	7%	8%	11%	10%	7%	11%
DIVERSIFIE	12%	12%	12%	12%	15%	12%
PRIVATE EQUITY	2%	3%	11%	2%	6%	8%
DETTE	3%	2%	3%	4%	4%	4%
CORP	24%	22%	20%	24%	22%	24%
GOV	36%	31%	26%	35%	30%	23%

TABLE 2 : Récapitulatif des allocations retenues

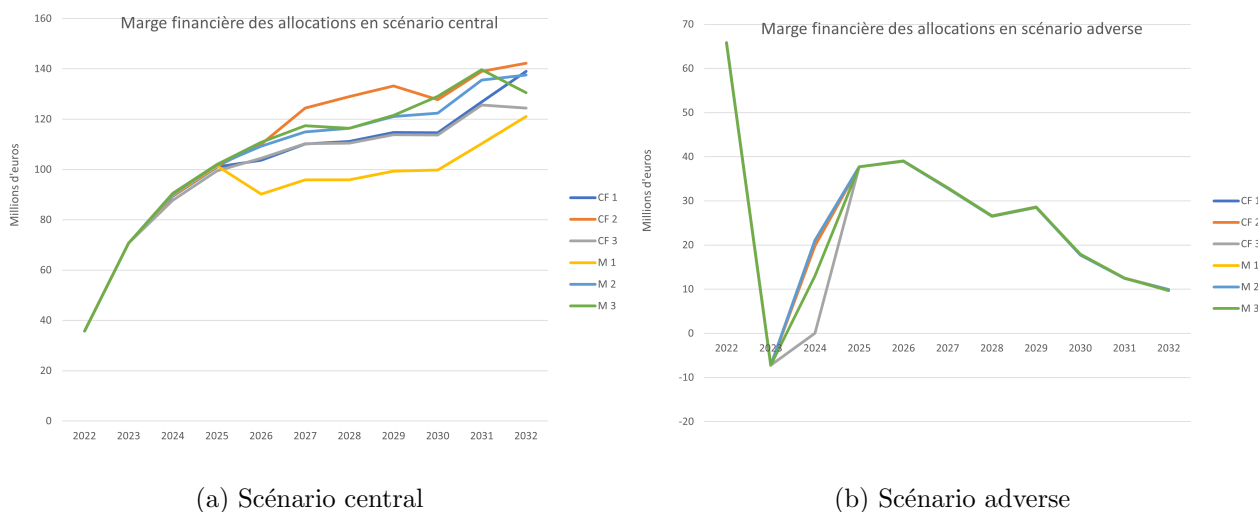


FIGURE 4 : Évolution de la marge financière en fonction de l'horizon de projection et du scénario

- La marge financière.
- Le taux de rendement comptable (TRC).
- La valeur de marché totale de l'allocation à l'année  $n$  (VM).
- La participation aux bénéfices (PB).

Chacun de ces indicateurs ont été représentés dans un scénario central et un scénario adverse, afin de pouvoir apprécier la robustesse des allocations. Ces allocations sont résumées dans la table 2.

Les figures 4a et 4b illustrent les comparaisons faites avec les indicateurs extraits du modèle sur la marge financière. Les figures 5a et 5b portent sur la VM.

De par les résultats obtenus, les conclusions sont les suivantes :

- Les allocations 'M 3' et 'CF 2' permettent d'obtenir de meilleurs résultats financiers.
- L'allocation 'M 1' est la moins performante vis-à-vis du modèle.
- Dans l'ensemble, les allocations trouvées permettent de résister au choc du scénario adverse de manière convenable (PB en hausse, TRC positif).

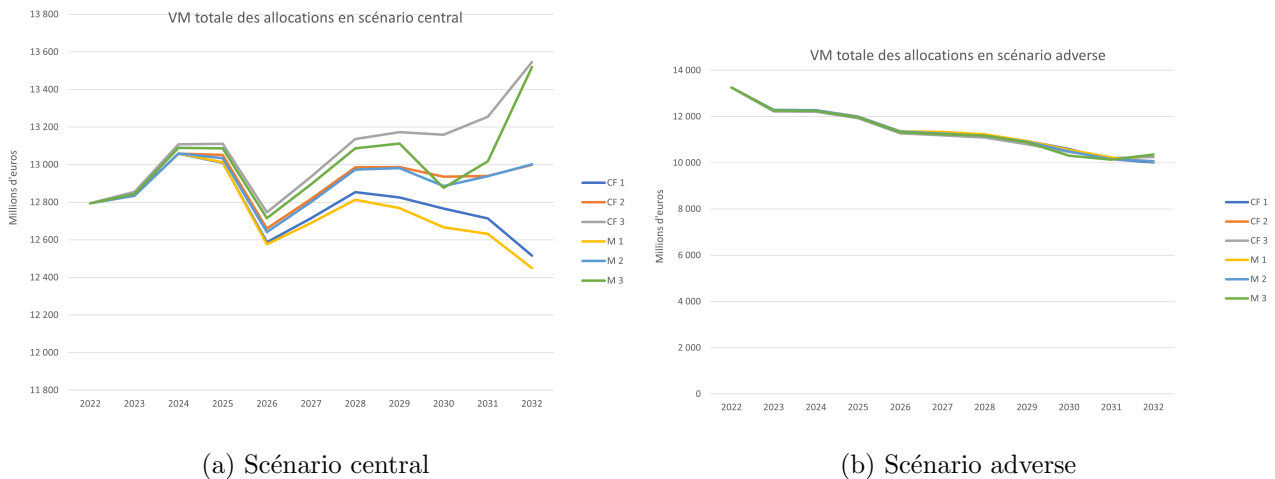


FIGURE 5 : Évolution de la VM en fonction de l'horizon de projection et du scénario

Une faiblesse de ces résultats viendrait du nombre d'allocations testées qui est relativement restreint. Ce défaut vient de l'importance du temps de calcul du modèle, empêchant d'essayer un grand nombre de scénarios.

## Conclusion

Cette étude a tout d'abord permis de présenter la théorie moderne du portefeuille et son application sur un modèle ALM. Il a été vu que, bien que cette méthode propose un cadre intéressant en allocation d'actifs, elle n'en demeure pas moins limitée sur certains points. Le problème central sur lequel notre étude s'est focalisée est le manque de prise en compte des queues de distribution dans l'optimisation rendement-volatilité découlant de la théorie moderne du portefeuille. Afin de pouvoir prendre en compte les queues de distribution des actifs étudiés, l'approximation de Cornish-Fisher a été présentée. Notre étude a montré que cette approximation pouvait s'avérer plus pertinente dans l'approximation des queues de distribution d'une loi plutôt qu'en utilisant l'approximation gaussienne. Cependant, celle-ci fait face à un écueil de taille : les restrictions du domaine d'application de l'approximation n'assurent pas la validité de l'approximation en toutes circonstances.

Une méthode de réarrangement a été présentée et calibrée afin de dépasser cette restriction. Il a été observé que cette méthode permettait d'outrepasser le domaine de l'approximation tout en gagnant en précision par rapport à certaines méthodes actuelles. Enfin, nous avons montré comment, en utilisant des contraintes simples, cette méthode est utilisable sur un modèle ALM et permet d'obtenir des allocations pertinentes. La méthode présentée a toutefois montré certaines limites lorsque la donnée n'était pas disponible en qualité suffisante.



# Executive summary

According to the *Banque de France*, in the third quarter of the year 2021, life insurance in euro funds represents 28% of household's total investments (amounting to 1,684 billion euros). While managing these funds, the insurer must face multiple constraints. It must ensure that they can pay benefits to policyholders and return their savings when requested. Additionally, they face significant competition, forcing them to produce and redistribute substantial returns, in a context where interest rates have been very low for a decade. Finally, the financial crises of recent years have shown that insurers must face significant fluctuations in the value of the assets they hold. To do so, the insurer must allocate entrusted funds to obtain significant and stable returns. Therefore, it is necessary to find a way to obtain the best possible average return while limiting the portfolio risk. The purpose of this dissertation is to propose a tool to address this issue.

## Modern Portfolio Theory

The founding framework of modern portfolio management is based on the work of Markowitz (Markowitz, 1952). He presents an optimization model that allows a rational investor to maximize the average return and minimize the volatility of their portfolio. He defines the concept of **portfolio efficiency**. Efficient portfolios are obtained by minimizing the volatility of a given portfolio under a constraint of average return. This allows us to obtain an efficient frontier in the shape of a hyperbola.

In order to apply this model, a dataset representative of our asset portfolio has been calibrated. It consists of different asset classes, and a return-volatility table as well as a correlation matrix that has been calibrated for this study. These data are calibrated to a period of 6 months.

This study will be based on the initial portfolio of the entity 'MHP Actif Général' belonging to the group 'Malakoff Humanis'.

With this data, obtaining an efficient frontier is straightforward, but the allocation results are not applicable given the insurer's constraints. Indeed, it is not suitable for us to use short selling or modify too much of the portfolio over the period. Constraints have thus been applied to the reallocation.

Let  $w_{init}$  denote the vector such that  $w_{init} = (w_1, w_2, \dots, w_7)$ , representing the proportion of each asset class in the initial allocation of the entity *MHP Actif Général*.  $w_{init}$  will be modified in order to bring it as close as possible to  $w_{cible}$ .  $w_{cible}$  being an efficient portfolio. However, our study has highlighted numerous limitations in the choice of  $w_{cible}$ , particularly in terms of reinvestment amounts.

The problem has been translated into finding the point on the efficient frontier that is closest to  $w_{init}$ , subject to a limit  $L$  on the distance between the allocations  $w_{init}$  and  $w_{cible}$ . This can be written as:

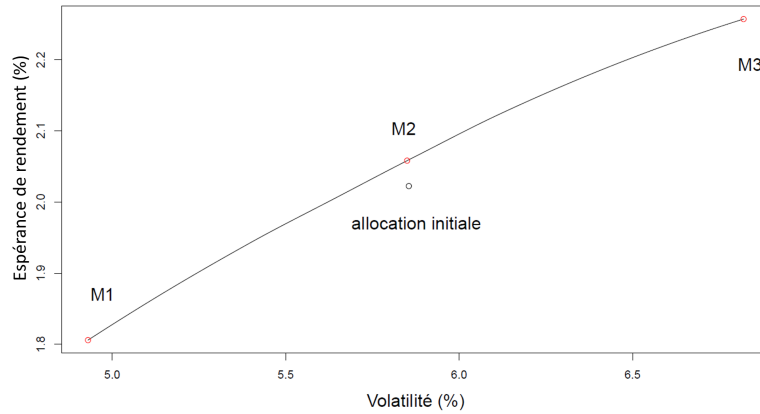


Figure 6: Efficient frontier under constraints obtained in the context of the return-volatility optimization

$$\begin{aligned} \min_{w_{cible}} \quad & (dist_2(w_{cible}, FE)) \\ \text{u.c.} \quad & dist_1(w_{init}, w_{cible}) < L \end{aligned} \quad (4)$$

Here,  $dist_2(w_{cible}, FE)$  is the minimum distance between the point  $w_{cible}$  and the set of points on the efficient frontier  $FE$ . An alternative efficient frontier respecting these conditions has been presented (see Figure 6).

This efficient frontier displays the first results that are actually applicable to our entity, given the fixed constraints. However, it is not as wide as the first one because the weight constraints force the possible interval for the average return and the volatility to be bounded and greatly reduced.

A set of three allocations representing a given risk appetite have been chosen and displayed on figure 6.

1. A cautious allocation chosen with a minimum volatility of 4.9% (point  $M_1$ ).
2. An intermediate allocation chosen with a volatility of 5.85% (point  $M_2$ ). The goal of this allocation is to maintain the initial allocation's volatility while increasing its average return.
3. An aggressive allocation with the maximum possible average return at a volatility of 6.8% (point  $M_3$ ).

## Limitations of the method

The Markowitz optimization of the return-volatility couple proposes a relevant model in relation to the challenges faced by insurance players, but this model does not seem detailed enough to avoid some major pitfalls:

1. The problem of heavy-tailed distributions
2. The problem of asymmetric distributions.



## Cornish-Fisher extension

The chosen approach was to use the Cornish-Fisher extension.

The Cornish-Fisher extension transforms a centered reduced Gaussian random variable  $z$  into a non-Gaussian centered reduced variable  $Z$ . Let  $S$  be the skewness coefficient and  $K$  be the excess kurtosis coefficient. The fourth-order Cornish-Fisher transformation is described by the following equation:

$$Z = z + (z^2 - 1) \frac{S}{6} + (z^3 - 3z) \frac{K}{24} - (2z^3 - 5z) \frac{S^2}{36} \quad (5)$$

A sometimes overlooked characteristic is that this transformation is not valid for all values of  $K$  and  $S$ . When the extension is used with invalid parameters, a U-shaped quantile function appears. These values are mathematically aberrant and can distort the results of the extension.

For the extension to be valid, it is necessary and sufficient for the transformation to be bijective. We set

$$k = \frac{K}{24} \quad s = \frac{S}{6}$$

The extension is valid if and only if:

$$9k^2 - (3 + 33s^2)k + 30s^4 + 7s^2 \leq 0 \quad (6)$$

The quality of the Cornish-Fisher extension was illustrated in the figure from the paper by Amédée-Manesme et al., 2015 (7).

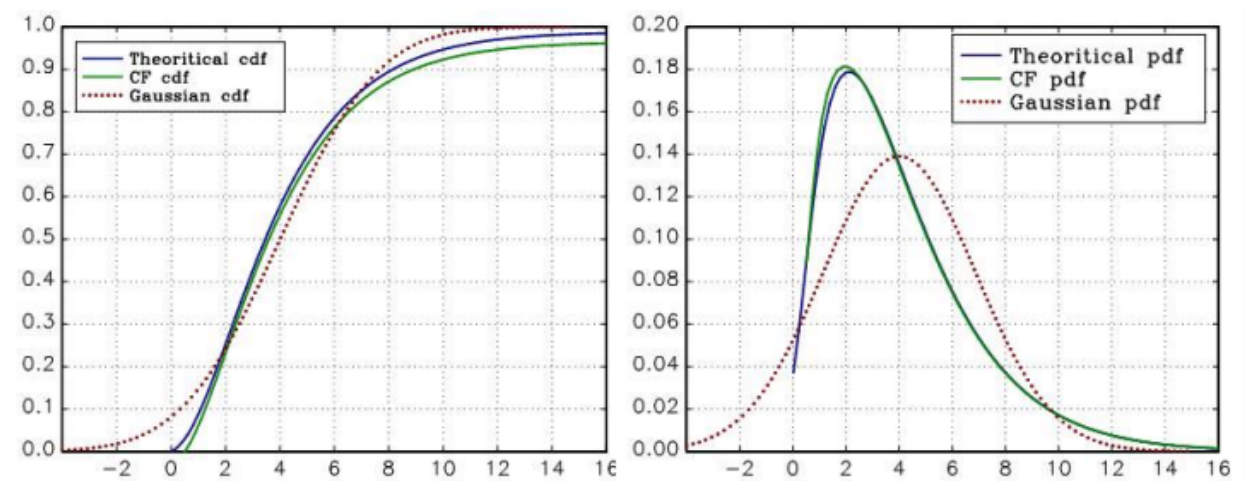


Figure 7: Cumulative distribution function and density function obtained with the Cornish-Fisher extension using a Chi-squared distribution with 4 degrees of freedom,  $\mu = 4$   $\sigma^2 = 8$   $S = 1.41$   $K = 6$  (AMÉDÉE-MANESME et al. (2015))

As we have seen, it is necessary to verify the validity of the *skewness* and *kurtosis* pair to use the extension.

To check the validity of the extension on asset returns, net return data of the *EURO STOXX 50* were extracted to assess the relevance of the extension on a benchmark index.

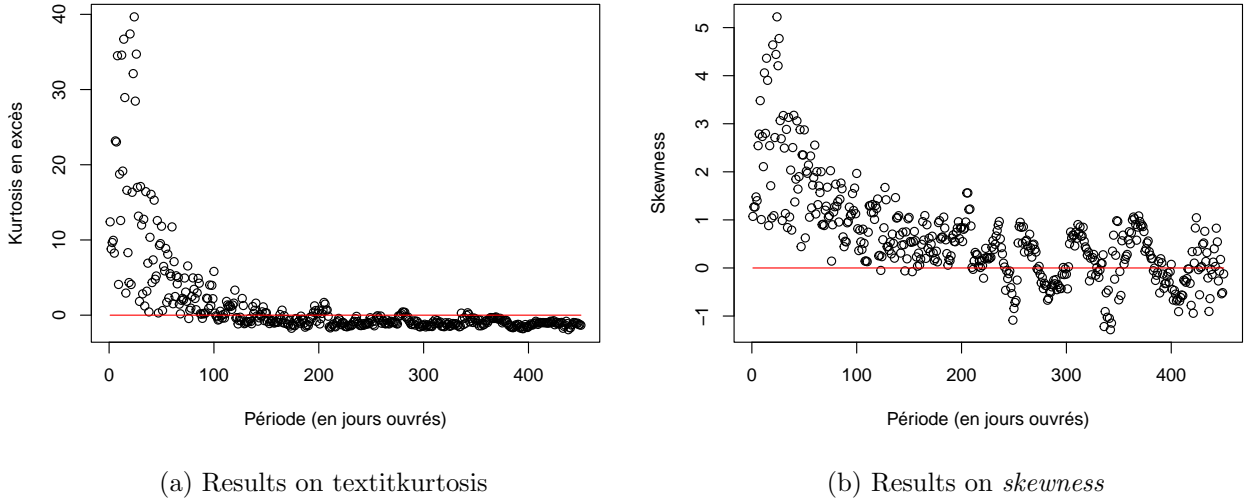


Figure 8: Kurtosis and Skewness coefficient of the *EURO STOXX 50* index depending on the considered period.

$n$	RMSE CF without rearrangement	RMSE CF with rearrangement	Diminution of the RMSE
32	0,019	0,017	11%
16	0,060	0,035	42%
8	0,17	0,049	71%
4	0,4	0,19	53%

Table 3: Comparison of RMSE with and without réarrangement

The daily returns of the index over ten years were collected. This data gives us access to the returns day by day (working day), but also allows us to induce the returns month by month, and year by year if we truncate the data to focus on a larger scale. These returns give us access to a kurtosis and a skewness coefficient specific to the given period. This is precisely the idea that was taken up in the study to plot the *kurtosis* and *skewness* functions as a function of the reference period (tables 8a and 8b).

This data showed that, on a common index, the validity of the extension can clearly be questioned over periods such as six months or one year. There is therefore a real problem in applying the Cornish-Fisher extension to financial data. The solution chosen to address this issue is to use a method of rearranging the values obtained by the Cornish-Fisher extension. The method in question solves the transformation problem using an idea that resembles sorting.

Its relevance in the context of the Cornish-Fisher extension is explained in Chernozhukov et al., 2010. It is also used in other fields such as optimal transport (see Villani, 2003). An analysis of the estimation quality of the extension with rearrangement was also applied in the same way as in the paper by Chernozhukov et al., 2010. This supports the fitting quality of the method with rearrangement. The summary of the results is presented in Table 3.

The study also involved the application of Cornish-Fisher estimations by asset class to ensure the consistency of the results estimated by the method. Finally, three representative allocation profiles of

a given risk appetite were generated. The improvement in the group's allocation was based on two main criteria:

1. The average return
2. The  $\text{VaR}_{99.5\%}$  of the return

In the same way as in the first part, the following constraints were used:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k &= 1 \\ \forall k, w_k &\geq 0 \\ \forall k, w_k &\leq 1 \\ \text{dist}_1(w, w_{cible}) &< 15\% \end{aligned}$$

The allocations obtained as a result are the following:

1. A conservative allocation chosen with a minimized  $\text{VaR}_{99.5\%}$  at 13% ('CF 1').
2. An intermediate allocation chosen with a  $\text{VaR}_{99.5\%}$  of 15.6% ('CF 2'). The objective of this allocation is to maintain the initial allocation's  $\text{VaR}_{99.5\%}$  while increasing its average return.
3. An aggressive allocation with a  $\text{VaR}_{99.5\%}$  of 19% ('CF 3').

This report also included a section presenting the specificities of the group's ALM model. Finally, the three allocations determined by the Markowitz' model and the three allocations used with the rearranged Cornish-Fisher extension were applied to the ALM model.

## Use of the ALM model

We applied the ALM model and observed the evolution of different indicators based on the allocation. We chose to restrict the model's results presented to a few main indicators. These indicators are listed below:

- The financial margin.
- The accounting rate of return.
- The total market value of the allocation at year  $n$ .
- The participation in profits.

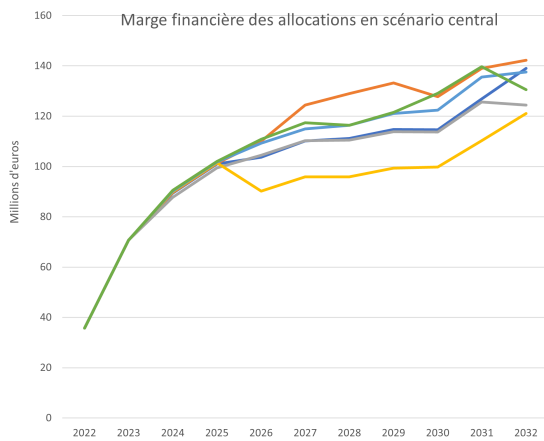
Each of these indicators was represented in a central scenario and an adverse scenario, to appreciate the allocations' robustness. The chosen allocations are summarized in table 4.

The figures 9a and 9b illustrate the comparisons made with the indicators extracted from the model on the financial margin. The figures 10a and 10b are presenting the market value.

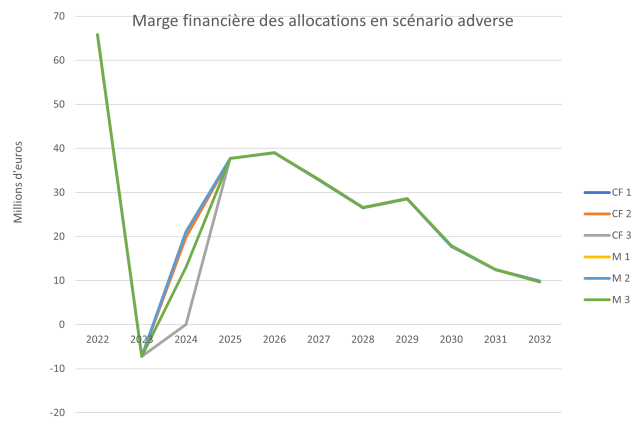
Based on the results obtained, the following conclusions were drawn:

Nom des allocations	CF 1	CF 2	CF 3	M 1	M 2	M 3
ACTION	16%	22%	17%	13%	16%	18%
IMMO	7%	8%	11%	10%	7%	11%
DIVERSIFIE	12%	12%	12%	12%	15%	12%
PRIVATE EQUITY	2%	3%	11%	2%	6%	8%
DETTE	3%	2%	3%	4%	4%	4%
CORP	24%	22%	20%	24%	22%	24%
GOV	36%	31%	26%	35%	30%	23%

Table 4: Summary of the chosen allocations

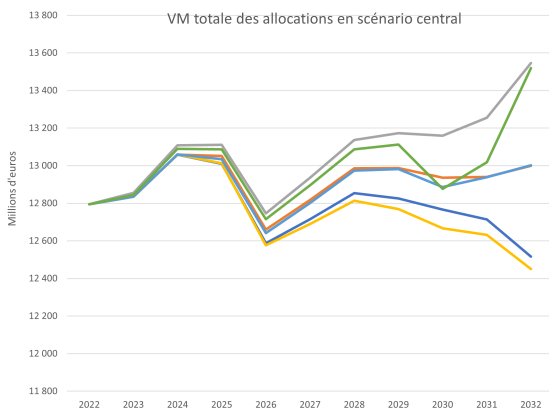


(a) Central scenario

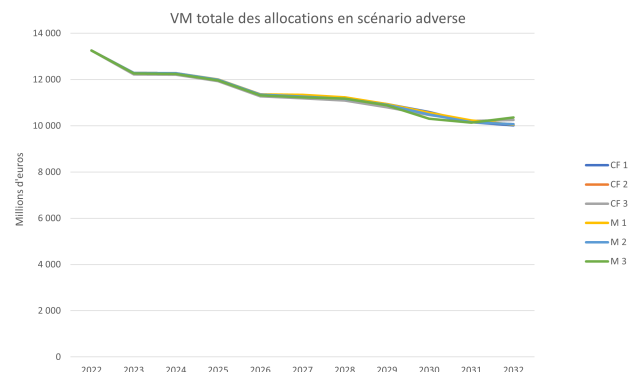


(b) Adverse scenario

Figure 9: Evolution of the financial margin depending on the projection horizon and the scenario



(a) Central scenario



(b) Adverse scenario

Figure 10: Evolution of the market value depending on the projection horizon and the scenario

- Allocations 'M 3' and 'CF 2' yield better financial results.
- Allocation 'M 1' offers the least interesting properties given its average returns and robustness.
- Overall, the allocations found allow to withstand the shock of the adverse scenario in a satisfactory manner (participation in profits up, accounting rate of return positive).

One weakness of these results would be the relatively limited number of allocations tested. This is due to the significant computational time required by the model, preventing a large number of scenarios from being tried.

## Conclusion

This study first allowed to present modern portfolio theory and its application to an ALM model. We have seen that, although this method is fundamental in asset allocation, it remains limited in some aspects. The central problem on which our study focused is the lack of consideration of distribution tails in the return-volatility optimization resulting from modern portfolio theory.

In order to take into account the distribution tail of the assets studied, the Cornish-Fisher extension was presented. Our study has shown that this extension can be more relevant in approximating the tails of a distribution than the Gaussian extension. However, it faces a major pitfall: the restrictions of the extension's domain of application do not ensure the validity of the extension in all circumstances.

A rearrangement method was presented and calibrated to overcome this restriction. It has been observed that this method allows to go beyond the domain of the extension while gaining precision compared to some current methods. Finally, we have shown how, using simple constraints, this method can be used on an ALM model and yields relevant allocations. However, the method presented has shown some limitations when data was not available in sufficient quality.



# Introduction

L'allocation d'actifs est au cœur de la gestion de la solvabilité et la rentabilité de l'assurance. L'implémentation de la norme Solvabilité II est venue influencer ce secteur en établissant des bases communes sur le capital à mobiliser en fonction du choix des actifs que l'entreprise possède. Cela a eu pour effet de prendre en compte la  $VaR_{99,5}$  % dans l'allocation d'actifs. De nombreux travaux liés à l'allocation d'actifs sous contrainte de capital de solvabilité requis par cette norme (*Solvency Capital Requirement*) sont apparus (voir PLANCHET et THÉRON, 2010 et BRACH, 2016). Solvabilité II est toutefois critiquée par rapport à la qualité des mesures de risque qu'elle impose. L'EIOPA elle-même (EIOPA, 2010) porte un regard critique sur la calibration des chocs donnés. Elle relève dans un article que l'hypothèse de normalité des rendements de marché sur la classe *equity* aura pour conséquence la sous-estimation du choc *equity*. L'écart au niveau des queues de distribution est clairement visible dans le graphique 11.

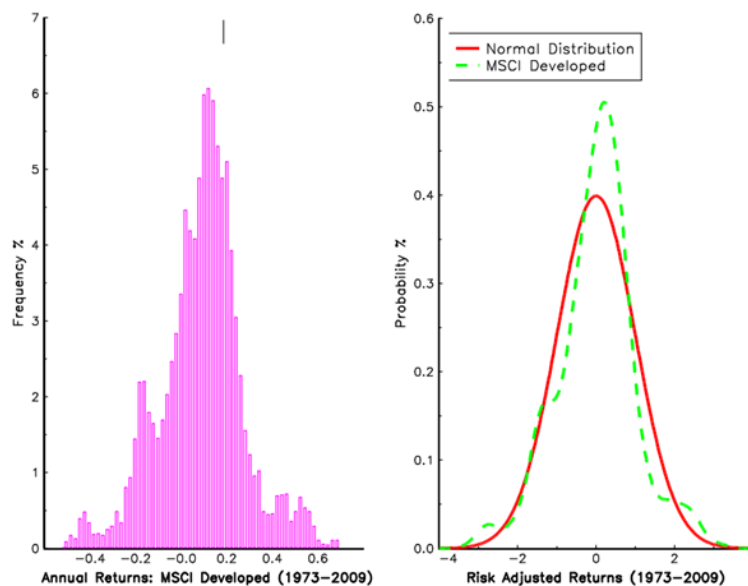


FIGURE 11 : Comparaison de la fonction de densité des rendements *MSCI World Developed* selon le choix de la modélisation (empirique ou hypothèse de normalité). Source : *Solvency II Calibration Paper* (CEIOPS-SEC-40-10) (2010)

De plus, les éléments demandés par la norme Solvabilité II ne semblent pas avoir vocation à servir d'indicateur unique au pilotage d'un portefeuille. En effet, la standardisation des chocs empêche de

prendre en compte les spécificités propres à chaque acteur.

Il semble alors important de ne pas limiter l'allocation d'actifs à une optimisation sous contrainte de SCR.

L'objectif de cette étude sera tout d'abord de détailler une méthode classique d'allocation d'actifs en expliquant ses avantages et ses limitations. Une méthode plus innovante basée sur l'approximation des queues de distribution des rendements des actifs va alors être explorée. L'objectif de ce mémoire sera de détailler l'utilisation d'une méthode innovante, adaptable et pertinente dans l'allocation d'actifs.

Cette étude permettra alors d'apporter une documentation compréhensive et détaillée sur la mise en place de l'approximation de Cornish-Fisher, ses limites, et la méthode de réarrangement rendant son application possible en actuariat.

Enfin, nous utiliserons cette approximation pour trouver une allocation et l'appliquer dans le cadre du modèle utilisé par l'équipe ALM de Malakoff Humanis.



# Chapitre 1

## Objectifs et contexte de l'étude

### 1.1 Le portefeuille étudié

### 1.2 L'allocation d'actifs en assurance vie

Selon la Banque de France, au troisième trimestre de l'année 2021, l'assurance-vie en fonds euros représente 28% du total des placements des ménages (pour un montant de 1 684 milliards d'euros <sup>†</sup>). C'est un chiffre qui a tendance à augmenter ces dernières années.

Le principe de fonctionnement des contrats en assurance vie est une délégation sur le long terme de l'épargne d'un assuré. En contrepartie, les assureurs s'engagent à revaloriser les montants épargnés à travers différents investissements. Ces investissements atteignent différents secteurs économiques tels que l'immobilier, les entreprises publiques et privées, la dette publique, etc.

Un grand point de distinction entre l'assurance vie et l'assurance non-vie est la durée des passifs. Cette notion est développée dans la présentation des indicateurs ALM (chapitre 4). Il est commun de trouver des durées de l'ordre de dix ans en assurance-vie. Cela implique une nécessité de gestion de long terme du capital. L'assuré s'attend alors à une espérance de rendement importante pour l'argent qu'il a confié. De son côté, l'assureur doit faire attention à avoir toujours assez de liquidités pour pouvoir rendre le capital qui lui est confié en conformité avec ses engagements.

Les principales contraintes des contrats des acteurs de l'assurance-vie sont les suivantes :

1. **La garantie du capital des assurés** : elle n'est pas présente dans tous les contrats, mais elle existe notamment dans les contrats placés à la demande de l'assuré sur les fonds en euros. L'assurance garantit qu'aucune perte en capital ne peut avoir lieu pour l'assuré dans ce type de contrat. L'assureur est donc dit porteur de risque. Celui-ci doit alors choisir de placer l'argent en provenance de ces contrats dans des investissements à risque extrêmement faible. C'est une contrainte qui a été particulièrement problématique pendant les dix dernières années puisque la Banque centrale européenne n'a cessé de diminuer son taux directeur, pour atteindre 0% en 2019. Cela s'est répercuté avec des taux négatifs sur les emprunts d'État. Les assurances ont pu résister grâce aux rendements d'obligations achetées avant cette période. Ces stocks d'obligations sûres et à rendement relativement élevé sont aujourd'hui de plus en plus rares, et les assureurs doivent se fournir sur un marché toujours peu rémunérateur pour les remplacer.

---

<sup>†</sup><https://acpr.banque-france.fr/le-marche-de-lassurance-vie-en-2021>

2. **La revalorisation minimale du capital** : un taux minimal garanti de revalorisation existe pour les contrats d'épargne. De plus, le taux technique sur lequel les rentes sont distribuées exigent d'avoir un rendement supérieur à ce taux pour ne pas perdre de l'argent. Il faut toutefois nuancer par le fait que pour beaucoup de contrats créés pendant la période de taux bas, un TMG à 0% a été instauré, limitant ainsi les contraintes pour l'assureur.

3. **La liquidité des actifs** : les assurés doivent pouvoir retirer leur capital lorsque leur contrat le permet. De ce fait, l'assureur doit pouvoir réagir en cas de demande soudaine et importante de liquidités. Par exemple, un assureur qui investit le capital de ses assurés à 100% dans de l'immobilier aura des difficultés à adapter sa trésorerie aux besoins des assurés.
4. **Les participations aux bénéfices** : Elles correspondent à une redistribution obligatoire des profits de l'assureur aux assurés. C'est un argument à la souscription et cette participation doit être suffisamment importantes pour que l'assuré ne choisisse pas de retirer son capital pour le placer chez la concurrence.

Si l'on observe l'allocation d'actifs de l'ensemble des assureurs, on obtient la répartition suivante :

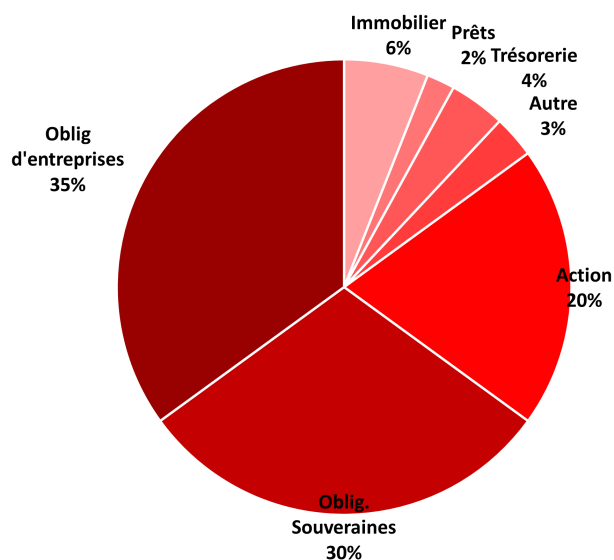


FIGURE 1.1 : Représentation de l'allocation d'actifs de l'ensemble des assureurs français en 2020 (Source : France Assureurs, LES PLACEMENTS DE L'ASSURANCE EN 2020 )

On peut noter que la majorité des actifs sont investis en obligation (65%), dont 30% en obligations d'état, signe de la préférence pour la stabilité des rendements sur la performance dans les actifs des assureurs.

### 1.3 Les données

La qualité des données financières sur lesquelles le modèle est basé est un point crucial. Lors de cette étude, nous n'avons pas pu avoir accès à une quantité de données financières importante en termes d'historique. Nous avons accumulé les valeurs d'indices en tentant d'obtenir des données permettant un bon compromis entre fidélité de la donnée par rapport au marché ainsi qu'au comportement des actifs effectivement présents pour notre entité. On peut citer en guise d'exemple le cas d'un indice représentant les prix de l'immobilier sur la ville de Paris. Celui-ci serait trop restrictif pour être représentatif du secteur sur l'ensemble du territoire français. Cependant, c'est un choix pertinent si l'immobilier de l'entité était 100% parisien. C'est dans cette optique que nous avons construit notre base de données.

Une autre grande contrainte lors de la construction de nos données est le choix des classes d'actifs. Nous avons des dizaines de milliers d'actifs différents. Chacun de ces actifs sera plus ou moins subtilement sensible à un certain domaine de l'économie. Dans l'idéal, nous aurions autant de classes d'actifs que d'actifs. Cependant, nous allons limiter le nombre de classes d'actifs à sept (détaillées par la suite) pour deux raisons :

- La demande en quantité et en précision de la donnée augmente avec le nombre de classes d'actifs
- Le temps de traitement, l'analyse et le calcul (direct et optimisation) ont tendance à augmenter de manière importante avec l'augmentation du nombre de classes d'actifs. Le gain d'information marginal devient, lui, de moins en moins intéressant.

Une autre contrainte pour le choix de nos données est celle du nombre d'années prises en compte dans le calcul du rendement. Nous pourrions prendre un temps très long tel que 40 ans afin d'avoir une grande quantité de données, mais cette façon de procéder doit être soumise à deux conditions :

- La certitude que les données anciennes sont toujours pertinentes aujourd'hui, et ce, malgré un contexte économique volatile.
- La capacité de trouver les données sur la même période pour chaque classe d'actifs (notamment pour les matrices de corrélation).

Comme nous ne pouvons garantir ces conditions pour chaque classe d'actifs pour un temps très long, la période d'historique a été fixée à dix ans. Pour augmenter le nombre de points, nous utiliserons des données de rendement sur six mois. Enfin, l'horizon de projection sera de dix ans.

La classe d'actifs représentant la trésorerie n'a pas été représentée dans un souci de simplification.

#### 1.3.1 Classe d'actifs 'ACTION'

Cette classe correspond aux divers investissements en actions dans des entreprises cotées. Ici, nous utiliserons les rendements nets de l'*Eurostoxx 50* comme indicateur. Cet indicateur correspond aux 50 plus importantes capitalisations européennes. Il a donc tendance à représenter les performances des grandes entreprises européennes et françaises dans lequel le groupe est fortement investi. C'est donc une donnée appropriée par rapport au portefeuille modélisé.

### 1.3.2 Classe d'actifs 'DIVERSIFIE'

Nous avons utilisé pour cette classe l'indice 'Allocation EUR prudente' donné par le fonds Sicav *Online* (courtier spécialiste des OPCVM). Celui-ci est adapté, car le principal investissement dans la classe d'actifs 'Diversifié' est le fonds 'Médéric Modéré'. Ce fonds est un OPCVM créé pour le groupe Malakoff Médéric qui est ensuite devenu Malakoff Humanis. L'idée de cet investissement est d'obtenir une allocation qui suit le marché actions sans pour autant être aussi risquée que celui-ci. Il est listé en tant que fond de type 'Allocation Prudente' sur les bases de données de Sicav *Online*, et ses performances sont très corrélées avec celui-ci. Cependant, le groupe possède également des allocations plus risquées dans cette classe, nous avons donc choisi de mélanger cet indice avec les rendements 'actions' dans un rapport 50%-50%.

C'est ce qui explique l'importante corrélation entre la classe 'ACTION' et la classe 'DIVERSIFIE'.

### 1.3.3 Classe d'actifs 'PRIVATE EQUITY'

La classe d'actifs *PRIVATE EQUITY* dans laquelle le groupe investit correspond à des entreprises françaises et européennes de petite taille, pouvant être non cotées, dont le potentiel de croissance est important. En contrepartie, le risque sur ces investissements est élevé. Nous utiliserons la classe d'actifs 'Europe Petites Capitalisations' fournie par Sicav *Online* pour la représenter. Cela permet de suivre la même logique que pour la classe 'ACTION' en ayant un panel représentatif d'entreprises européennes et françaises. Ce choix n'est pas totalement satisfaisant, car nous aurions pu utiliser directement les entreprises sur lesquelles nous sommes investis, mais la donnée n'était pas disponible en quantité suffisante. Les participations stratégiques du groupe seront également incluses dans cette classe d'actifs. Elles correspondent à des entreprises sur lesquelles le groupe va choisir de s'investir sur le long terme et de manière importante (généralement plus de 5% de la capitalisation de l'entreprise). C'est un type d'actifs qui mériterait sa propre classe, mais dans un souci de simplification de l'étude, nous avons choisi de ne pas la représenter.

### 1.3.4 Classe d'actifs 'IMMO'

L'immobilier dans lequel le groupe investit est situé dans sa grande majorité en France et particulièrement en Île-de-France. Les rendements nets donnés par l'indice de l'IEIF ont été choisis pour les représenter. On peut dire que la qualité de la donnée est ici plutôt bonne. Elle est en phase avec nos investissements.

### 1.3.5 Classe d'actifs 'DETTE'

Cette classe d'actifs correspond à de la dette privée sur laquelle le groupe investit. Une difficulté était que donnée sur la dette privée était relativement rare avec les outils dont nous disposons pour cette étude. Nous avons choisi d'utiliser un indice de rendement net sur la dette privée d'un fonds géré par Edmond De Rothschild *Asset Management*. C'est un choix imparfait, mais nous n'avions pas de meilleure alternative qui représentait aussi bien les fonds sur lesquels l'entité était investie. Nous gardons tout de même une bonne représentativité des valeurs de cet indice par rapport aux rendements moyens que peuvent apporter les investissements dans la dette privée.

### 1.3.6 Classe d'actifs 'Obligations gouvernementales' (GOV)

L'entité étant quasi exclusivement investie sur des acteurs européens peu risqués, nous avons retenu les rendements de l'obligation souveraine allemande, française et italienne. Un point d'attention sur lequel nous avons dû nous focaliser est le choix de la durée d'expiration de l'obligation. En effet, nous n'afficherions pas le même rendement si nous indexions nos rendements sur les obligations sur dix ans que pour les obligations à 1 an. Compte tenu de la durée de nos obligations, nous avons choisi d'utiliser le taux à dix ans.

### 1.3.7 Classe d'actifs 'Obligations d'entreprise' (CORP)

Les obligations d'entreprise sont des obligations répliquant le principe des obligations d'état, mais au rendement et au risque plus élevé. Nous avons choisi le fonds 'Amundi Euro Corporate Bonds : A' pour représenter cette classe d'actifs. Ici, la donnée est plutôt satisfaisante dans sa qualité et sa représentativité. En effet, le groupe investit pour ses obligations d'entreprises dans des entreprises européennes au rating moyen A.

### Les courbes de taux utilisées

Les courbes de taux sont adaptées en fonction du type d'obligations. Celles-ci sont fournies par d'autres équipes en tant que scénario. Elles s'alignent sur les courbes fournies par l'EIOPA pour la courbe initiale (vue à l'année initiale). Il est important de les utiliser dans cette étude afin d'harmoniser les hypothèses avec ceux de l'équipe ALM.

Nous avons donc une courbe de taux pour les actifs assimilables à :

1. Une obligation gouvernementale française
2. Un actif de crédit de type 'investissement' (note moyenne A/BBB)
3. Des actifs gouvernementaux à haut rendement.
4. Des actifs d'entreprise à haut rendement (High Yield).

## Chapitre 2

# Théorie de Markowitz en modèle Rendement-Volatilité

Les travaux de Markowitz (MARKOWITZ, 1952) sont à l'origine des techniques modernes d'allocation d'actifs. Ils ont pour but de résoudre le problème suivant : Existe-t-il une allocation d'actifs optimale, et si oui, laquelle ?

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons le cadre rendement-volatilité. Ce cadre repose sur le fait qu'un investisseur rationnel souhaite diminuer la volatilité de ses investissements tout en maximisant son espérance de rendement. Cette approche est particulièrement pertinente pour un assureur : une volatilité importante des actifs de l'assureur diminuerait sa capacité à payer les prestations dans une période peu favorable. Nous allons commencer par examiner l'adéquation de l'allocation d'actifs sous cette approche.

### 2.1 Modélisation d'un marché à $n$ actifs risqués

Nous considérerons que le marché est à  $n = 7$  classes d'actifs risqués. Nous travaillerons dans un modèle discret avec une période fixée à 6 mois.

#### Définitions de base

Soit  $\tilde{R}_j$  le rendement aléatoire du titre  $j$  ( $j \in [1, n]$ ) sur la période donnée. On a  $\tilde{R}_{PF}$  le rendement aléatoire du portefeuille.

On définit également  $\tilde{R} = (\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \dots, \tilde{R}_n)'$

Soit  $\mu_j$  le rendement espéré de l'actif  $j$  sur la période. On a :

$$\mu_j = \mathbb{E}(\tilde{R}_j)$$

$$\text{De même } \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n)'$$

On introduit la matrice de Variance-Covariance des  $n$  actifs :  $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j} = (\text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j))_{i,j}$

On remarque que  $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2 = \text{Var}(\tilde{R}_i)$

On suppose que  $\Sigma$  existe et est inversible.

On note  $w$  le vecteur de poids d'une allocation et  $w_j$  le pourcentage du portefeuille alloué à la tranche  $j$  tel que  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$ .

On a de ce fait  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ .

Le rendement espéré du portefeuille s'écrit :

$$\mu_{PF} = \mathbb{E}(\tilde{R}_{PF}) = \sum_{k=1}^n w_k \mathbb{E}(\tilde{R}_k) = w' \mu$$

La variance du portefeuille  $\sigma_{PF}^2$  :

$$\sigma_{PF}^2 = \text{Var}(\tilde{R}_{PF}) = \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n w_k \tilde{R}_k\right) = w' \Sigma w$$

### Notion d'efficience d'un portefeuille

Un portefeuille  $P$  est dit efficient si pour tout portefeuille  $V$ ,

$$\sigma_V < \sigma_P \Rightarrow \mu_V < \mu_P, \quad \sigma_V = \sigma_P \Rightarrow \mu_V \leq \mu_P \quad (2.1)$$

### Portefeuille optimal de Markowitz

Sur un portefeuille donné, on constate qu'avec des combinaisons linéaires d'actifs on peut obtenir une infinité de rendements espérés possibles. Il est donc pertinent de chercher le portefeuille ayant la volatilité minimale pour un rendement espéré donné. Ce portefeuille sera, par définition, efficient.

Le problème de minimisation de la variance sous contrainte de rendement s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{w \in \mathbb{R}^n} & w' \Sigma w \\ \text{s.c.} & w' \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} = 1 \\ & w' \mu = \mu_{obj} \end{cases} \quad (2.2)$$

On introduit les variables suivantes :

$$A = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n} \Sigma^{-1} \mu \quad B = \mu' \Sigma^{-1} \mu \quad C = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n} \Sigma^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$$

On obtient alors le portefeuille optimal  $w^*$  en fonction du rendement objectif souhaité  $\mu_{obj}$  avec l'équation suivante :

$$w^* = \frac{B - \mu_{obj} A}{BC - A^2} \Sigma^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} + \frac{\mu_{obj} C - A}{BC - A^2} \Sigma^{-1} \mu \quad (2.3)$$

### Frontière efficiente de Markowitz

Pour chaque rendement objectif fixé, on peut trouver une allocation efficiente qui aura ce rendement espéré, avec une volatilité minimisée. On peut alors représenter l'ensemble des points du couple volatilité-rendement dans le plan  $(\sigma_{PF}, \mu_{PF})$  : c'est ainsi qu'est définie la frontière efficiente.

L'équation de la frontière efficiente s'écrit alors :

$$\frac{\sigma_{PF}^2}{1/C} - \frac{(\mu_{obj} - \frac{A}{C})^2}{(BC - A^2)/C^2} = 1$$



On reconnaît l'équation d'une hyperbole de la forme :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

La frontière efficiente peut donc se représenter par une hyperbole. Nous représenterons un exemple de frontière efficiente dans la figure 2.2 de la section suivante.

## 2.2 Application dans le cadre de l'allocation d'actifs en assurance

En pratique, de par la nature de ses engagements, l'assureur garde la plupart de ses actifs pendant un temps long et n'a pas une flexibilité importante dans la répartition de ses actifs. Cela s'explique par des problèmes de liquidité des actifs en question et à des contraintes réglementaires multiples qui vont favoriser une allocation stable et prudente. De plus, nous n'utiliserons pas de position '*short*' pour notre répartition finale, ce qui est contraire aux hypothèses de base de Markowitz. En effet, il n'est pas vraisemblable de considérer pouvoir être en position de vente à découvert sur toute une classe d'actifs. Enfin, nous ne considérerons pas la possibilité d'investir dans des actifs non risqués.

**L'enjeu de la répartition d'actifs dans le modèle de Markowitz sera alors de réussir à intégrer des résultats fondamentalement théoriques et inapplicables pour guider une allocation dans le monde réel.**

Nous représenterons le vecteur de poids initial de notre allocation  $w$  de la manière suivante :  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ . Il représentera la répartition initiale réelle dans les classes d'actifs définies ci-dessous :

Index	Classe d'actifs
1	ACTION
2	IMMO
3	DIVERSIFIE
4	PRIVATE EQUITY
5	DETTE
6	CORP
7	GOV

TABLE 2.1 : Correspondance entre les classes d'actifs et leur index dans la modélisation

On a donc  $w_1$  représentant la part d'actions dans le modèle,  $w_2$  la part d'immobilier, etc.

En catégorisant de cette manière les actifs du groupe, on peut obtenir le vecteur de poids  $w$  représentant l'allocation choisie par l'entité Malakoff Humanis Prévoyance (MHP) à l'instant initial.

Nous utiliserons également des hypothèses de rendement et de volatilité pour chacune de ces poches pour obtenir la matrice représentée dans la table 2.2 :

Index	Classe d'actifs	Rendement	Volatilité
1	ACTION	4,2%	14,7%
2	IMMO	2,9%	13,2%
3	DIVERSIFIE	2,7%	8,3%
4	PRIVATE EQUITY	5,1%	21,0%
5	DETTE	1,0%	4,8%
6	CORP	0,8%	2,8%
7	GOV	0,9%	0,8%

TABLE 2.2 : Présentation des données utilisées pour l'optimisation dans le cadre rendement-volatilité

Ces valeurs sont le fruit du recueil de données détaillé dans le chapitre 1.

On a également l'allocation d'actifs initiale de l'entité MHP représentée dans la figure 2.1

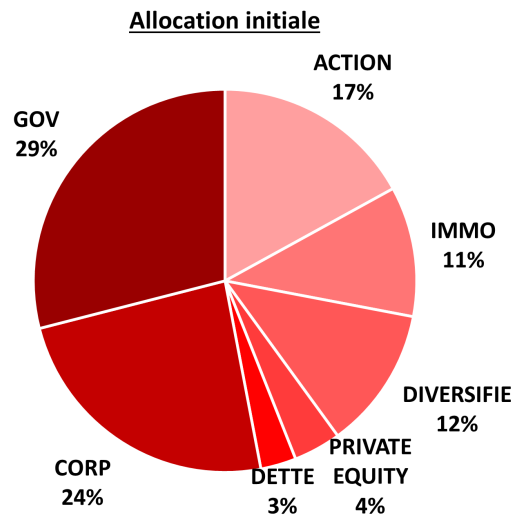


FIGURE 2.1 : Représentation de l'allocation d'actifs de l'entité MPH

Enfin, on présente la matrice de variance-covariance utilisée dans la table 2.3.

Avec ces données, on peut représenter la frontière efficiente obtenue par la méthode de Markowitz dans l'axe volatilité-rendement. On ajoute également le point rouge représentant l'allocation actuelle de l'entité (figure 2.2).

La frontière efficiente obtenue est cohérente, elle révèle bien une hyperbole avec une relation croissante entre rendement et volatilité.

On remarque qu'au niveau de la courbure de l'hyperbole, il y a deux volatilités pour un même rendement possible. La partie qualifiée d'efficiente est dans ce cas celle qui est la plus haute (au rendement

	ACTION	IMMO	DIVERSIFIE	PE	DETTE	CORP	GOV
ACTION	1	0,72	0,99	0,94	0,83	0,54	-0,03
IMMO	0,72	1	0,75	0,64	0,75	0,50	0,08
DIVERSIFIE	0,99	0,75	1	0,93	0,87	0,61	-0,04
PE	0,94	0,64	0,93	1	0,75	0,52	-0,14
DETTE	0,83	0,75	0,87	0,75	1	0,68	-0,25
CORP	0,54	0,50	0,61	0,52	0,68	1	-0,22
GOV	-0,03	0,08	-0,04	-0,14	-0,25	-0,22	1

TABLE 2.3 : Matrice de corrélation utilisée pour l'optimisation

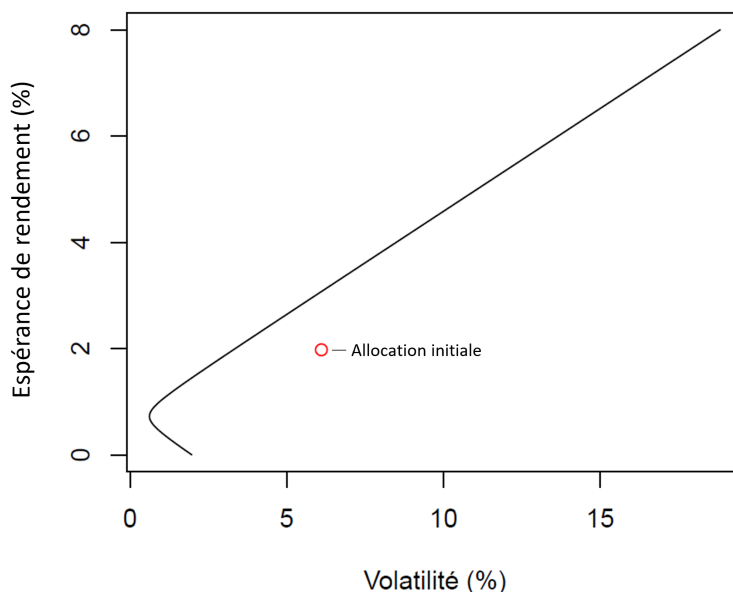


FIGURE 2.2 : Représentation de l'hyperbole générant la frontière efficiente de marché

plus élevé). De plus, on peut noter que même dans un cadre optimal, il y a une infinité de choix d'allocations disponibles. Nous allons détailler deux allocations sur la frontière efficiente qui pourraient orienter le choix de l'allocation future.

Enfin, on observe que l'allocation actuelle de l'entité est loin d'être optimale. En effet, elle se situe en dessous de la frontière efficiente.

### Maximisation du ratio rendement - volatilité

Nous avons vu que nous devons maximiser le rendement espéré et minimiser la volatilité. Pour déterminer la bonne allocation dans ce cadre, il nous faut un indicateur qui intègre ces deux éléments. C'est ici qu'intervient le ratio rendement sur volatilité

$$RV_{PF} = \frac{\mu_{PF}}{\sigma_{PF}}$$

Ce ratio fait écho au ratio de Sharpe (qui prend pour sa part l'espérance du surplus de rendement par rapport à l'actif sans risque au numérateur).

Notre ratio rendement-volatilité optimal sera déterminé de manière empirique : il s'agit de parcourir la frontière efficiente et de garder le point générant le meilleur ratio sur cette frontière. Nous avons représenté sa localisation dans la figure 2.3.

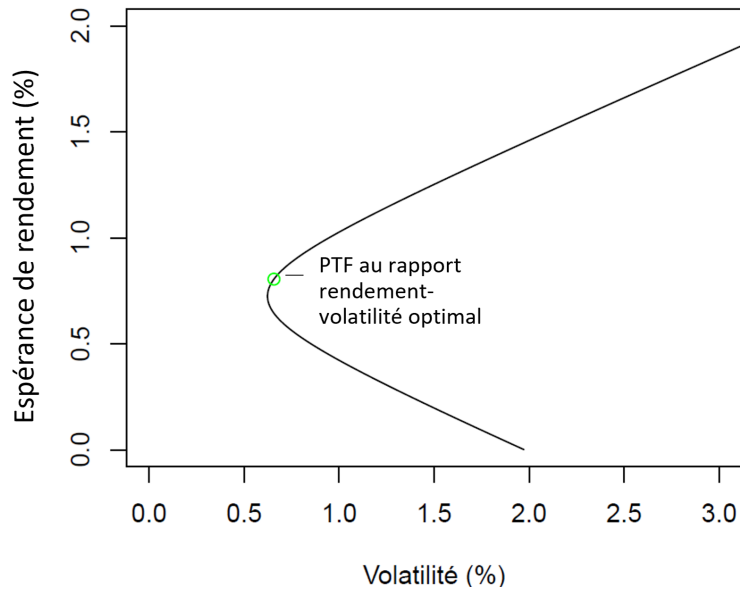


FIGURE 2.3 : Représentation du ratio rendement-volatilité optimal sur la frontière efficiente

On peut constater que ce ratio se situe dans la courbure, avec une volatilité faible.

Si cette méthode est satisfaisante dans la mesure où elle permet de faire un choix objectif sur une allocation finale, elle trouve tout de même des limites dans sa définition. On peut se demander pourquoi on ne prendrait pas la volatilité au carré, le rendement au cube, ou même un polynôme dépendant du rendement et de la variance du portefeuille.

Il y a un côté arbitraire dans ce choix qui empêche d'utiliser ce ratio comme une solution systématique. De plus, pour une société d'assurance, utiliser ce ratio pourrait induire une volatilité trop élevée par rapport aux risques qu'elle est capable de prendre. Celle-ci n'a pas forcément d'appétence au risque alignée sur ce point.

### Portefeuille de Variance minimale

On peut définir le portefeuille de variance minimale tel qu'il n'existe pas de portefeuille efficient ayant une variance plus faible.

Ce portefeuille se trouve donc au milieu de la courbure de l'hyperbole, tel que représenté en bleu dans la figure 2.4.

On voit qu'il est possible de trouver une allocation avec une volatilité faible à 0,6%. Le rendement associé à cette volatilité pourrait être acceptable dans un contexte de rendements obligataires faibles.

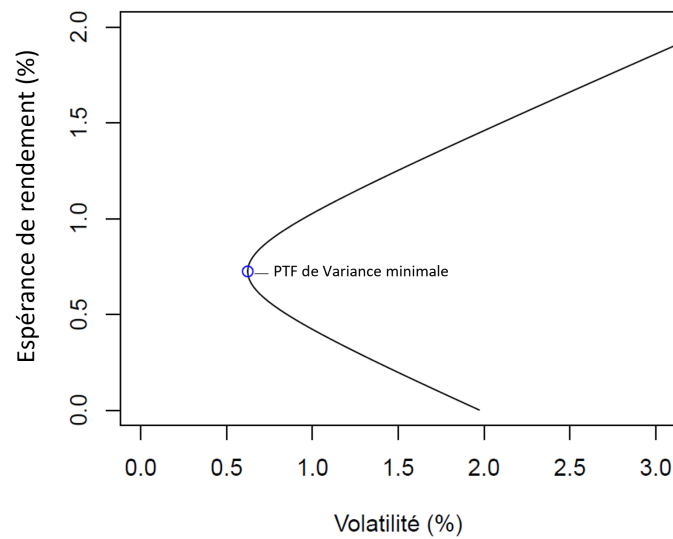


FIGURE 2.4 : Représentation du portefeuille de variance minimale sur la frontière efficiente

Il reste à vérifier si l'allocation est réaliste. Pour obtenir un tel rendement, on trouve que les poids de l'allocation sont les suivants :

Classe d'actifs	Part dans l'allocation
ACTION	-18%
IMMO	-2%
DIVERSIFIE	21%
PRIVATE EQUITY	1%
DETTE	21%
CORP	-6%
GOV	83%

C'est une allocation qui demande de vendre à découvert sur des sommes importantes. De plus, cela réorganise complètement les poids du portefeuille actuel. On a par exemple la part d'obligations gouvernementales qui va plus que doubler. Les autres classes d'actifs seront également impactées de façon importante. Tenter de suivre cette allocation en tant qu'assureur serait irréalisable dans notre contexte.

Trois raisons expliquent l'inadéquation de cette allocation dans notre contexte :

1. L'existence de frais de transactions : ceux-ci sont ignorés dans cette partie, mais nous tenterons de les prendre en compte dans les modèles que nous développerons.
2. Le manque de liquidité de certains actifs.
3. Les problématiques ALM liées au lissage des plus-values réalisées (PVR). Ces problématiques liées à la réserve de capitalisation seront détaillées lors de la présentation du modèle (chapitre 4).

La vente d'actifs immobiliers est une bonne illustration des deux premiers points évoqués ci-dessus. En effet, il est difficile de vendre un bien immobilier sur une période plus courte que le mois. De plus,

la transaction est généralement sous-traitée, ce qui rajoute des frais.

Concernant les plus-values, il faut comprendre qu'une stratégie assez commune d'un groupe de prévoyance est de garder un stock de plus-values non réalisée afin de pouvoir faire face à des périodes à faible rendement. On rappelle que la plus-value est simplement la différence entre la valeur nette comptable d'un actif et son prix de vente. On peut grossièrement la 'stocker' lorsque la valeur de marché de l'actif est plus grande que la valeur nette comptable (VNC) de l'actif. Lorsque l'allocation se modifie, ce stock va nécessairement se réduire par l'effet de la vente d'actifs et donc de la réalisation des plus-values. Cela mènera à un taux de rendement comptable élevé pour l'année de réallocation. Cela va alors faire ressortir un résultat comptable particulièrement élevé pour la même année. Ce résultat sera ensuite redistribué par le biais d'une généreuse participation aux bénéfices.

Cette situation ne paraît pas problématique au premier abord. Toutefois, dans les années qui suivront, ce stock de plus-value aura déjà été consommé, et la participation aux bénéfices sera entièrement soumise aux aléas du marché. Il n'y aura ainsi plus de réserve pour compenser une année à faible rendements financiers. Cela risque alors de réduire la part de marché de l'assurance : les assurés auront tendance à racheter leurs contrats d'assurance vie puisque l'assureur ne sera plus en mesure de donner un rendement au taux de marché avant une phase de reconstitution de la plus-value latente (PVL), puisque celle-ci a été épuisée. Les concurrents ayant gardé un stock de plus-value important pourront alors attirer plus d'affaires nouvelles en présentant des taux de redistribution plus importants.

Dans la pratique, la capacité de l'entité à déformer son bilan d'actifs est limitée par la trésorerie. Le groupe se sert d'une projection du *runoff* (projection sur trois ans où tout ce qui arrive à maturité est considéré comme de l'actif monétaire). La part d'augmentation du monétaire avec le temps (arrivée à maturité d'obligations, coupons, etc.) représente la capacité de l'assureur à réinvestir dans d'autres classes d'actifs et donc déformer son bilan. Une illustration de cet effet est apportée dans la figure 2.5. Pour des raisons de confidentialité, les chiffres ont été modifiés par rapport à la réalité mais les ordres de grandeur sont les mêmes. On peut voir que sur cet exemple, la part de monétaire passerait de 4% à 14%, ce qui implique une capacité de déformation de 14%. De plus, on fixe également un minimum de capacité de déformation correspondant à une quantité d'action vendable afin de déformer le bilan.

	Arrêté des comptes		Run Off	
	31/12/2022	31/12/2023	31/12/2024	31/12/2025
GOV	31%	31%	30%	30%
IMMO	13%	13%	12%	12%
DIVERSIFIE	14%	13%	12%	12%
PRIVATE EQUITY	6%	6%	5%	3%
DETTE	5%	5%	5%	5%
CORP	26%	26%	25%	24%
Monétaire	4%	7%	10%	14%

Min	Max
poche monétaire	poche monétaire
1%	14%

FIGURE 2.5 : Illustration de la capacité de déformation du bilan d'un assureur

L'ensemble de ces éléments montrent que l'allocation proposée pour le portefeuille de variance minimale n'est donc pas une allocation réaliste pour l'environnement assurantiel.

Il faut maintenant trouver comment intégrer les données fournies par la frontière efficiente pour améliorer l'allocation afin de pouvoir l'utiliser dans un cadre plus réaliste.

### Présentation d'outils quantitatifs pour la réallocation

Nous allons résoudre la problématique d'allocation en contexte restrictif en introduisant des contraintes de distance par rapport au point initial, tout en restant au plus proche de la frontière efficiente.

#### Définition de la distance :

Soit  $w = (w_1, \dots, w_n)$  et  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . On définit la distance  $dist_1(w, v)$  par :

$$dist_1(w, v) = \sum_{i=1}^n |w_i - v_i|$$

La norme est ici la valeur absolue.

Cette contrainte est une façon de prendre en compte la capacité de déformation du bilan définie précédemment. Dans la suite, nous garderons une limite de distance de 0,15 entre le vecteur de poids initial et le vecteur de poids cible.

Soit  $w_{init}$ , la répartition initiale de l'entité MHP. On cherchera à modifier  $w_{init}$  pour la rapprocher le plus possible de  $w_{cible}$ . Cependant, nous sommes limités dans les montants de réinvestissements. On traduira cela par un maximum de distance à ne pas dépasser.

Le problème devient une recherche du point le plus proche de la frontière efficiente par rapport à une limite  $L$  de distance entre  $w_{init}$  et  $w_{cible}$ .

Pour résoudre ce problème d'optimisation, plusieurs solutions sont possibles. Une première méthode simple serait de générer un grand nombre de points aléatoirement et de trouver ceux qui respectent les critères initiaux. Cette méthode a l'inconvénient d'être très peu efficace et ne garantit pas la validité des résultats obtenus.

Une deuxième méthode serait de résoudre le problème par optimisation informatique. Cette méthode est intéressante, mais elle présente l'inconvénient d'être complexe à mettre en place (en termes de code et d'audit), de ne pas toujours garantir la validité du résultat (certaines méthodes d'optimisation ne donnent accès qu'à des optimums locaux) et d'être parfois très longue en temps de calcul sans garantie de convergence de l'algorithme.

C'est pourquoi une méthode différente a été retenue. Cette méthode consiste à restreindre l'intervalle de recherche de manière à ce que sa taille soit suffisamment réduite afin d'être totalement appréhendée de manière informatique. Dans cette optique, la précision de l'allocation a été réduite à  $10^{-2}$  près par classe d'actifs. Cela permet d'avoir un nombre fini (et appréhendable informatiquement) d'allocations possibles. De plus, la précision choisie n'est pas restrictive dans notre cas quant à la qualité des résultats de l'allocation.

### Application de la méthode de réallocation sous contraintes

Avec cette méthode, il est possible de fixer une volatilité cible et d'analyser tous les points respectant cette contrainte ainsi que les conditions de distance par rapport à l'allocation initiale. Nous pouvons alors afficher une frontière efficiente alternative (figure 2.6) qui répond à nos critères de distance par rapport à l'allocation initiale et qui empêche les positions *short*.

Cette frontière efficiente affiche les premiers résultats utilisables en pratique par l'entité sur laquelle porte l'étude.

Elle n'est cependant pas aussi large que la première (figure 2.2), car les contraintes de poids obligent les intervalles possibles pour le rendement et la volatilité du portefeuille à être non seulement bornés,

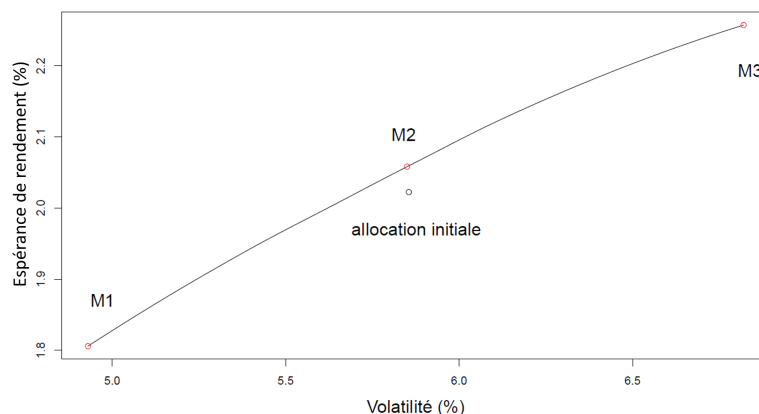


FIGURE 2.6 : Frontière efficiente sous contraintes

mais également très réduits.

Un ensemble de trois allocations représentatives d'une appétence au risque prédéfinie sera choisi et affiché sur la figure 2.6.

1. **M 1** : allocation prudente choisie avec une volatilité minimale à 4.9%.
2. **M 2** : allocation intermédiaire choisie avec une volatilité à 5.9%. Cette allocation aura pour objectif de conserver la volatilité de l'allocation initiale tout en augmentant son rendement espéré.
3. **M 3** : allocation offensive possédant le rendement espéré maximal possible à 6.8%.

On remarque que l'allocation initiale est déjà assez proche de la frontière efficiente. Cela suggère que les allocations proposées seront assez proches de l'allocation initiale, ce qui était un de nos objectifs (prise en compte de l'inertie du bilan). De plus, la courbe montre une légère convexité, ce qui est un résultat courant dans les frontières efficientes de Markowitz (augmenter le rendement espéré demande un coût en volatilité de plus en plus important).

#### Allocation 'M 1' :

L'allocation 'M 1' a pour objectif de proposer une allocation prudente. De même que précédemment, les parts de *PRIVATE EQUITY* et de la classe 'ACTION' seront des leviers d'ajustement du risque. La part de la classe 'IMMO' baisse très légèrement par rapport à l'allocation initiale. La construction de l'allocation 'M 1' consiste donc à diminuer la part de ces trois classes d'actifs pour les placer dans des obligations gouvernementales. On peut encore une fois remarquer que le résultat paraît cohérent et utilisable.

#### Allocation 'M 2' :

On peut tout d'abord comparer l'allocation initiale avec l'allocation efficiente de même volatilité. L'allocation efficiente de même volatilité ('M 2') est représentée dans la figure 2.8.



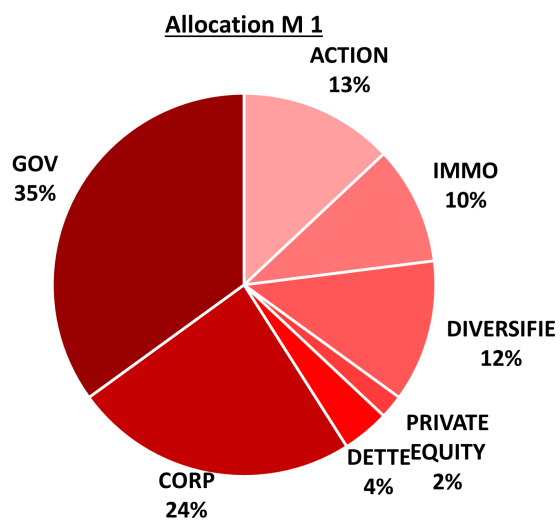


FIGURE 2.7 : Représentation de l'allocation 'M 1'

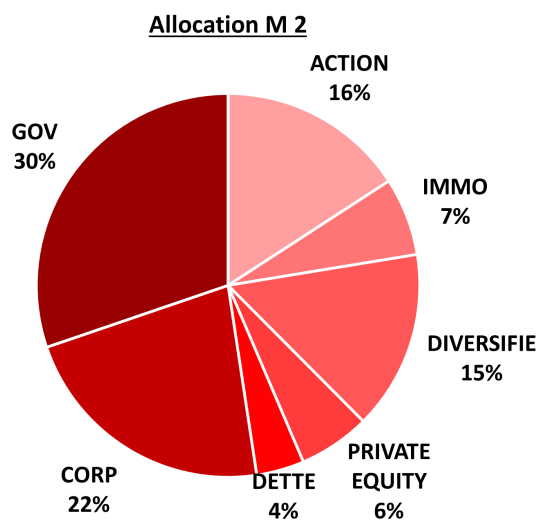


FIGURE 2.8 : Représentation de l'allocation 'M 2'

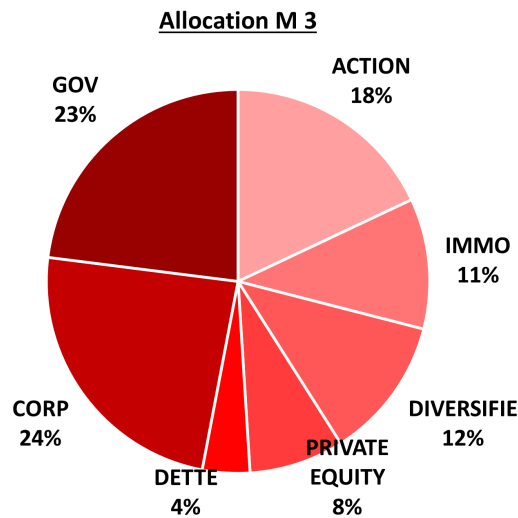


FIGURE 2.9 : Représentation de l'allocation 'M 3'

L'allocation 'M 2' est une allocation qui a saturé sa distance avec l'allocation initiale (étant donné que la sensibilité est de 1% sur l'allocation, on ne pourra pas aller au-delà de 0.14 de distance dans les faits). Nous nous attendons à ce que toutes les allocations saturent leur contrainte de distance.

Cette allocation va augmenter fortement la part relative de la tranche '*PRIVATE EQUITY*' et donner plus de poids pour les tranches '*DIVERSIFIE*', '*DETTE*' et '*GOV*'. À l'inverse, toutes les autres tranches vont diminuer leur poids, avec l'immobilier ('*IMMO*') qui va être le plus réduit (réduction relative de 36.4%). C'est une allocation intéressante dans l'ensemble. En effet, elle est assez équilibrée dans le sens où elle ne propose pas une réallocation totale dans une seule tranche, mais elle va bien utiliser les bénéfices de diversification en allouant peu dans des tranches jugées pertinentes par le modèle.

#### Allocation 'M 3' :

L'allocation 'M 3', marquée par son rendement espéré plus important, est représentée dans la figure 2.9.

Sans surprise, l'allocation 'M 3' va faire fortement diminuer la tranche d'obligations gouvernementales (tranche '*GOV*' possédant le rendement espéré le moins élevé) pour aller la redistribuer vers la tranche '*PRIVATE EQUITY*', '*ACTION*', et '*DETTE*'. La plus grande augmentation se trouve au niveau de la tranche '*PRIVATE EQUITY*', qui, encore une fois, fait office de variable d'ajustement du risque. Ici aussi, le modèle permet d'ajuster la distribution des tranches de manière pertinente.

### Étude de sensibilité

Un dernier point d'étude important est la sensibilité de l'allocation à un choc, que ce soit un choc de rendements ou un choc de volatilité. Si le modèle de Markowitz rend des résultats instables en fonction des données initiales de rendement et de volatilité, cela peut être un problème pour notre étude dans un environnement financier qui a tendance à évoluer rapidement. Pour un modèle de réallocation d'actifs, un léger changement d'hypothèses devrait entraîner un léger changement d'allocation. Le cas

Choc	30 %	20 %	10 %	-10 %	-20 %	-30 %
Part ACTION	0,20	0,20	0,19	0,18	0,16	0,16
Part IMMO	0,07	0,07	0,08	0,07	0,08	0,11
Part DIVERSIFIE	0,09	0,09	0,10	0,16	0,17	0,17
Part PRIVATE EQUITY	0,06	0,06	0,06	0,04	0,05	0,03
Part DETTE	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
Part CORP	0,24	0,24	0,22	0,22	0,22	0,22
Part GOV	0,30	0,30	0,31	0,29	0,28	0,27

TABLE 2.4 : Impact d'un choc simultané sur les rendements espérés des classes d'actifs *PRIVATE EQUITY* et *ACTION*

échéant, nous devrions avoir constamment de gros changements d'allocation qui augmenteraient les frais encourus, ce que nous ne souhaitons pas.

Nous avons vu que les classes d'actifs '*PRIVATE EQUITY*', *ACTION* et *GOV* étaient des classes d'ajustement du risque pour le modèle. En effet, pour augmenter le rendement espéré, un comportement logique est d'augmenter la part des classes '*ACTION*' et '*PRIVATE EQUITY*' et de diminuer la part d'obligations gouvernementales ('*GOV*'). Cela a pour effet d'augmenter le risque. Pour diminuer le risque, la manipulation inverse est courante.

C'est pourquoi nous allons appliquer un choc pour deux cas de figure :

1. Un choc simultané sur les rendements espérés des classes d'actifs '*PRIVATE EQUITY*' et '*ACTION*'.
2. Un choc sur les rendements espérés de la classe '*GOV*'

Nous appliquerons ensuite un choc sur la volatilité des obligations gouvernementales pour observer comment le modèle réagit devant cette contrainte.

Dans chacun de ces chocs, nous chercherons à garder la même volatilité que dans l'allocation initiale. Cependant, comme nous travaillons sur un ensemble discret d'allocations, une précision à 0,01 près sur la volatilité a été retenue.

Ainsi, l'allocation recommandée pour conserver un maximum de rentabilité (toujours sous les contraintes évoquée précédemment) est présentée dans le cas 1 (Table 2.4), avec une volatilité égale à celle de l'allocation initiale.

La sensibilité du programme au rendement espéré de la classe '*GOV*' est représentée dans le tableau 2.5. On remarque que le modèle n'est que très peu sensible à une légère modification des données de rendement obligataire (la part de *GOV* varie entre 0.29 et 0.31 selon le choc appliqué). C'est un résultat plutôt logique dans le sens où les rendements espérés sont très faibles pour la classe '*GOV*'.

Un test de sensibilité sur la volatilité de la classe d'actifs '*GOV*' a également été conduit. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 2.6.

On remarque qu'il y a une très légère augmentation de la part de la classe '*GOV*' lorsque la volatilité augmente. C'est dû au même effet que pour le rendement espéré. La volatilité étant de base très

Choc	30%	20%	10%	-10%	-20%	-30%
Part ACTION	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20	0,20
Part IMMO	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07
Part DIVERSIFIE	0,10	0,10	0,10	0,14	0,14	0,14
Part PRIVATE EQUITY	0,06	0,06	0,06	0,04	0,04	0,04
Part DETTE	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
Part CORP	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
Part GOV	0,31	0,31	0,31	0,29	0,29	0,29

TABLE 2.5 : Impact sur l'allocation d'un choc sur les rendements espérés de la classe 'GOV'

Choc	30%	20%	10%	-10%	-20%	-30%
Part ACTION	0.19	0.19	0.18	0.19	0.19	0.20
Part IMMO	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08
Part DIVERSIFIE	0.14	0.14	0.12	0.14	0.11	0.10
Part PRIVATE EQUITY	0.03	0.03	0.05	0.03	0.04	0.04
Part DETTE	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
Part CORP	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22
Part GOV	0.31	0.31	0.32	0.31	0.32	0.32

TABLE 2.6 : Impact sur l'allocation d'un choc sur volatilité de la classe d'actifs 'GOV'

faible, il faut la multiplier par un facteur important pour percevoir une différence.

On remarque toutefois que la part de la classe 'GOV' n'a pas une trajectoire claire en fonction du choc (elle augmente puis diminue). C'est un effet dû au fait que l'allocation est toujours soumise à une contrainte de rendement espéré. Par conséquent, une réorganisation 'lisse' (plus la volatilité diminue, plus la part de l'actif moins volatile est augmentée) n'a pas lieu. C'est un phénomène intrinsèquement lié à la précision au % près de l'allocation. Il faut grandement modifier les volatilités pour que l'allocation soit modifiée. C'est donc un modèle peu sensible. Un modèle à sensibilité faible peut être avantageux dans le sens où il ne recommandera pas un changement brusque dès qu'un paramètre sera amené à évoluer. L'environnement financier étant par nature très volatil, la situation apparaît comme souhaitable.

### Limites de la méthode

L'optimisation du couple rendement-volatilité de Markowitz propose un modèle intéressant par rapport aux enjeux des acteurs de l'assurance, mais ce modèle ne semble pas assez détaillé pour éviter certains écueils de taille. Le problème principal de la méthode que nous avons voulu améliorer est le choix de la volatilité comme métrique de risque à minimiser.

En effet, nous avons vu (et approfondirons ce point dans le chapitre 4) que notre entité de prévoyance était capable de se constituer des réserves financières afin d'obtenir un rendement comptable stable. La volatilité n'est alors pas un problème direct si des réserves peuvent compenser ce phénomène.

Le risque sur lequel notre entité sera sensible sera plutôt lié aux pertes extrêmes : une perte financière suffisamment importante pour épuiser les réserves mettrait l'entité en incapacité de payer ses prestations. Cette problématique a été reprise dans le cadre de Solvabilité II. En effet, la  $VaR_{99,5\%}$  est utilisée afin de calibrer les provisions réglementaires qui devront être constituées par les acteurs de l'assurance.

Nous souhaitons alors choisir une allocation qui prend en compte les queues de distribution des actifs. C'est dans cette optique que l'approximation de Cornish-Fisher sera présentée dans la partie ci-après.

## Chapitre 3

# Présentation et utilisation de l'approximation de Cornish-Fisher

### 3.1 Outils théoriques sur les valeurs extrêmes

Avant de présenter la méthode en tant que telle, il est nécessaire d'introduire quelques bases théoriques sur les quantiles de distribution.

#### 3.1.1 Quantile d'une variable aléatoire réelle

Soit un nombre réel  $\alpha \in [0; 1]$  et  $X$  une variable aléatoire réelle.  $x$  est un quantile d'ordre  $\alpha$  de  $X$  si  $\mathbb{P}(X \leq x) = \alpha$ .

#### 3.1.2 La *Value At Risk* (VaR)

La *Value At Risk* est une notion qui permet de modéliser la perte d'un instrument financier (avec une probabilité donnée), sur une période donnée. Prenons  $p$ , une probabilité et  $T$ , une période de projection. En assurance, l'interprétation qu'on donne à la  $\text{VaR}_{1-p}$  de période  $T$  est la pire des pertes pouvant être constatées lorsqu'on exclut tous les événements ayant une probabilité inférieure à  $p$  sur une période  $T$ . La VaR également se voit comme un quantile de distribution associé à un actif financier, modélisant ainsi la pires des pertes possibles pour un actif sur une période à une probabilité près. La  $\text{VaR}_{99.5\%}$  est la mesure de risque de base de la réglementation Solvabilité II. On pourrait alors utiliser les niveaux de chocs fournis par les textes de la norme et les considérer comme des indicateurs des caractéristiques des queues de distribution. Cependant, nous avons déjà pu évoquer les quelques problèmes majeurs que cela impliquerait. On a notamment le fait que la norme a pour hypothèse une distribution des actifs en loi normale, avec des queues de distribution légères. Dans les faits, les rendements des actifs ont tendance à ne pas suivre une loi normale (voir MANDELBROT, 1960, FAMA, 1963). Ce point fait l'objet de critiques sur le cadre réglementaire actuellement en place (BOONEN, 2017). De plus, la norme Solvabilité II va s'adapter de manière imparfaite à la situation particulière de chaque actif, et de chaque investissement dans ses exigences quantitatives. C'est pour cette raison que la norme prévoit une étude approfondie (dans le cadre de l'ORSA par exemple) de la solvabilité en adaptant le besoin de solvabilité à la situation spécifique de l'assureur. Cela confirme la nécessité de dépasser les chocs prévus par la norme.

Si les points évoqués ci-dessus peuvent s'avérer particulièrement gênants, il convient de vérifier qu'ils se transposent également sur nos données. Cette vérification se fera en testant les hypothèses de normalité des classes d'actifs dans nos données. Nous utiliserons pour cela le test de Shapiro-Wilk (SHAPIRO et WILK, 1965). Dans ce test, une  $p$ -value inférieure à 0.1 est convenable pour réfuter l'hypothèse de normalité (ROYSTON, 1995). Les résultats du test appliqué aux données de nos classes d'actifs sont présentés dans le tableau 3.1.

Classe d'actifs	Statistique du test	$p$ -value
ACTION	0,981	0,948
IMMO	0,944	0,291
DIVERSIFIE	0,972	0,796
PRIVATE EQUITY	0,906	0,054
DETTE	0,921	0,106
CORP	0,841	0,004
GOV	0,922	0,108

TABLE 3.1 :  $p$ -value et statistique du test de Shapiro-Wilk pour chacune des classes d'actifs

On remarque qu'à minima deux classes d'actifs ne suivent très probablement pas une loi normale. De plus, on peut douter de la normalité des actifs de dette et d'obligations gouvernementales. Enfin, les actifs n'ayant pas une  $p$ -value significative ne suivent pas forcément une loi normale. Ne pas avoir une  $p$ -value significative implique simplement que ce test ne permet pas de réfuter l'hypothèse de normalité. Il faudrait probablement avoir une quantité de données plus importante pour conclure. Ce test nous permet, au moins partiellement, de réfuter l'hypothèse de normalité des actifs utilisés. Il confirme la nécessité d'avoir un système d'allocation d'actifs qui n'est pas basé sur cette hypothèse. De plus, si tous les actifs ne sont pas gaussiens, cela complexifie les structures de corrélation nécessaires pour obtenir une  $VaR_{99,5\%}$ . C'est sur ces points que l'approximation de Cornish-Fisher trouve sa pertinence.

## 3.2 Présentation de l'approximation de Cornish-Fisher

Nous avons vu que les queues de distribution ont un rôle crucial à jouer dans l'allocation d'actifs d'un assureur. La solvabilité des acteurs de l'assurance en dépend. De plus, nous souhaitons modéliser les événements extrêmes sans faire d'hypothèse de normalité sur les données. La méthode que nous proposons permettant de résoudre ce problème est basée sur les travaux de Cornish et Fisher (CORNISH et FISHER, 1938 et FISHER et CORNISH, 1960). Nous appellerons l'approximation induite des travaux de ces auteurs 'Approximation de Cornish-Fisher' (*Cornish-Fisher Extension*). Cette approximation utilise les quatre premiers moments d'ordre (détaillés ci-dessous) pour donner une approximation des quantiles d'une distribution. Un des principaux intérêts de cette approximation est son adaptabilité. Elle est utilisable (sous certaines conditions mathématiques) dès que l'on peut obtenir les moments de la distribution. Après l'obtention de ces moments, l'utilisation de la fonction consiste en une simple application numérique sur un polynôme. Cela permet de gagner en efficacité informatique dans la mesure où seules quatre valeurs sont à déterminer pour générer toute la distribution. L'approximation de Cornish-Fisher s'inscrit dans une famille de méthodes permettant de générer des quantiles de variables

non gaussiennes, avec notamment l'approximation d'Edgeworth (HALL, 2013) ou de Gram-Charlier qui ont le même objectif.

Cette distribution de Cornish-Fisher nous offre plusieurs avantages. Tout d'abord, elle est facile à implémenter. De plus, elle permet d'utiliser le coefficient d'asymétrie (*skewness*) et le coefficient d'aplatissement (*kurtosis*) dans la distribution afin d'atteindre une approximation de degré 4. Enfin, la relation utilisée est simple et s'adapte bien dans la mesure du risque et dans l'optimisation moyenne-VaR d'un portefeuille (CAO et al., 2010 ; KIM et al., 2012 ; Fabozzi, Rachev and Stoyanov, 2012).

De plus, la méthode ne fait pas d'hypothèse sur l'échelle temporelle et donc s'adapte à la période souhaitée. C'est une propriété intéressante du point de vue de la gestion du risque. Cela permet de s'assurer de la conformité sur un an comme sur trois mois lors d'un évènement exceptionnel. On pourra alors être conforme au principe de cohérence : une entreprise doit pouvoir utiliser la même mesure de risque au fil du temps.

Enfin, l'approximation ne nous impose pas de choisir entre une loi normale ou une loi différente. Elle sera compatible dans tous les cas et donnera de bons résultats si la loi est normale. C'est une propriété particulièrement souhaitable puisque, comme on l'a vu dans nos tests de normalité, les données réelles montrent qu'une partie des actifs ne sera pas clairement gaussienne ou clairement non gaussienne, mais plutôt hybride.

### 3.2.1 Présentation théorique de la méthode

#### Outils théoriques nécessaires à la méthode

Afin de garder une certaine concision dans ce mémoire, de nombreux outils et démonstrations théoriques qui ont amené à l'approximation de Cornish-Fisher ne seront pas présentés. Ceux-ci se basent sur MAILLARD, 2018 et sont présentés plus en détail dans cet article.

#### L'approximation de Cornish-Fisher

L'approximation de Cornish-Fisher permet de transformer une variable aléatoire gaussienne  $z$  centrée réduite en une variable non gaussienne  $Z$  centrée réduite. On note  $S$  le coefficient d'asymétrie et  $K$  le coefficient de *kurtosis* (en excès). La transformation de Cornish-Fisher à l'ordre 4 est décrite par l'équation suivante :

$$Z = z + (z^2 - 1) \frac{S}{6} + (z^3 - 3z) \frac{K}{24} - (2z^3 - 5z) \frac{S^2}{36} \quad (3.1)$$

L'approximation de Cornish-Fisher peut également s'utiliser à l'ordre 3 et 5, nécessitant respectivement la connaissance des trois premiers et des cinq premiers cumulants.

On notera que la variable  $Z$  obtenue est centrée réduite. Pour obtenir une transformation avec  $Z'$  de moyenne  $m$  et d'écart type  $\sigma$ , il suffit d'écrire  $Z' = \sigma \times Z + m$ .

On remarque également que  $Z$  et  $z$  coïncident lorsqu'une variable possède les mêmes paramètres qu'une loi normale (*ie* un coefficient d'asymétrie et d'aplatissement en excès égaux tous deux à 0).



Lien avec la VaR

Dans le cas d'une distribution gaussienne :

$$\text{VaR}_{1-\alpha} = v_\alpha = -z_\alpha = -N^{-1}(\alpha)$$

Dans le cas d'une distribution non gaussienne :

$$\text{VaR}_{1-\alpha} = V_\alpha = -Z_\alpha = v_\alpha + (1 - v_\alpha^2) \frac{S}{6} + (5v_\alpha - 2v_\alpha^3) \frac{S^2}{36} + (v_\alpha^3 - 3v_\alpha) \frac{K}{24}$$

Domaine de validité de la transformation :

Une caractéristique parfois négligée est que cette transformation n'est pas valide pour toutes les valeurs de  $K$  et de  $S$ . Lorsque l'approximation est utilisée avec des paramètres invalides, une fonction quantile en forme de 'U' apparaît (voir figure 3.6). Ces valeurs sont mathématiquement aberrantes et cela vient fausser les résultats de l'approximation.

Pour que l'approximation soit valide, il est nécessaire et suffisant que la transformation soit bijective.

On pose :

$$k = \frac{K}{24} \quad s = \frac{S}{6}$$

La transformation est bijective si :

$$9k^2 - (3 + 33s^2)k + 30s^4 + 7s^2 \leq 0$$

C'est un polynôme de degré 2 en  $k$ , avec des coefficients positifs pour  $k$ . Il faut que ce polynôme soit négatif, et donc que la valeur de  $k$  soit entre ses deux racines (si elles existent) et que  $k$  a des racines dépendantes de  $s$ . On obtient que, pour un  $s$  donné,  $k$  se situera entre ses racines  $k_1$  et  $k_2$  telles que :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1+11s^2-\sqrt{s^4-6s^2+1}}{6} \\ k_2 = \frac{1+11s^2+\sqrt{s^4-6s^2+1}}{6} \end{cases}$$

On a également  $S$  qui doit être compris entre environ -2.485 et +2.485. Par exemple, pour un paramètre de *Skewness* égal à 0, le *kurtosis* devra être compris entre 0 et 8. Une visualisation graphique du domaine d'application de la méthode est présentée dans la figure 3.1.

C'est un domaine d'application relativement large, mais pas assez large pour nous permettre d'appliquer le modèle sans vérification au préalable.

**3.2.2 Validation de la méthode et tests de sensibilité**

L'utilité de l'approximation de Cornish-Fisher peut être illustrée par un graphique de l'article de AMÉDÉE-MANESME et al., 2015.

La figure 3.2 nous montre la qualité d'ajustement de l'approximation de Cornish-Fisher. Le cas choisi est particulièrement intéressant puisqu'il permet de comparer l'approximation gaussienne avec celle de Cornish-Fisher.

Ici, l'approximation de Cornish-Fisher est mieux adaptée par rapport à l'approximation gaussienne car il y a une asymétrie importante couplée à un aplatissement des queues de distribution que l'approximation gaussienne ne peut pas prendre en compte.

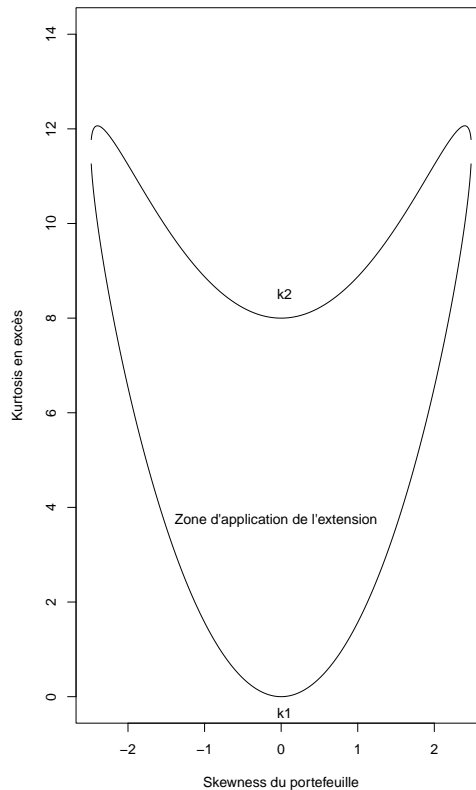


FIGURE 3.1 : Représentation du domaine de validité de l'approximation de Cornish-Fisher

On peut apprécier l'impact que peut avoir l'utilisation de l'approximation en l'utilisant sur des données réelles.

Cela peut se faire avec des rendements boursiers : nous avons réuni l'ensemble des rendements annuels de l'indice 'S&P500' depuis 1932. Nous allons créer la fonction de répartition empirique des rendements annuels de l'indice 'S&P500' que nous allons comparer avec la fonction de répartition de la loi normale de même moyenne et volatilité. Nous rajouterons également la fonction de répartition obtenue par l'approximation de Cornish-Fisher calibrée sur les données de rendement.

La figure 3.3 montre que l'estimation gaussienne est plus proche de la fonction de répartition empirique sur des valeurs proches de 0, mais l'estimation de Cornish-Fisher devient systématiquement plus proche de la fonction empirique sur des quantiles de perte extrêmes (à partir de  $x \leq 22\%$ ). Cela montre donc l'intérêt de l'approximation de Cornish-Fisher par rapport à l'approximation Gaussienne.

Comme nous l'avons vu, il est nécessaire de vérifier la validité du couple *skewness* et *kurtosis* pour utiliser l'approximation. C'est sur ce point que portera la partie suivante.

### Compatibilité des données avec la méthode

On peut parfois lire qu'en pratique en finance,  $K$  et  $S$  sont petits et  $K$  est positif (variables leptokurtiques), ce qui permet de respecter la condition de Cornish-Fisher \*. Cependant, nos observations

\*On peut trouver cette affirmation sur [https://fr.wikipedia.org/wiki/Approximation\\_de\\_Cornish-Fisher](https://fr.wikipedia.org/wiki/Approximation_de_Cornish-Fisher)

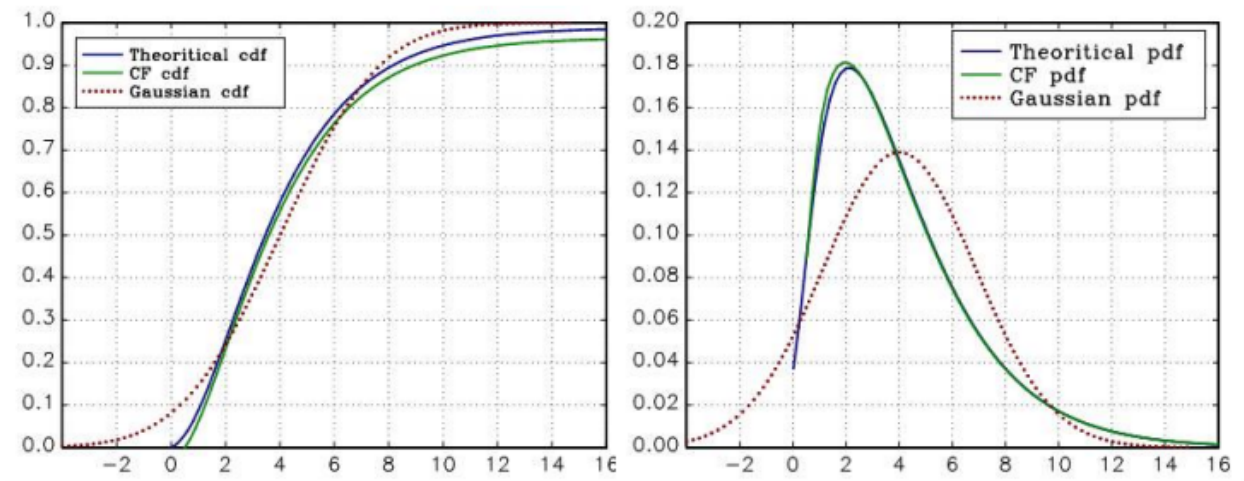


FIGURE 3.2 : Fonction de répartition et densité obtenues avec l'approximation de Cornish-Fisher avec une distribution du Khi-deux à 4 degrés de liberté,  $\mu = 4$   $\sigma^2 = 8$   $S = 1.41$   $K = 6$  (AMÉDÉE-MANESME et al. (2015))

nous incitent à douter de ce postulat. Les coefficients d'aplatissements et d'asymétrie dépendent de nombreux facteurs et s'ils peuvent avoir une tendance naturelle à rester dans certains intervalles, il n'y a pas de généralité possible. Pour une même classe d'actifs, il y a une variabilité du *kurtosis* en fonction de la période.

Pour vérifier cette affirmation, nous allons prendre les données de rendement net de l'*EURO STOXX 50*. Cet indice a l'avantage d'être représentatif des actifs en zone euro et de posséder un volume d'échange très significatif.

Nous allons partir d'un tableau des rendements journaliers de l'actif en question sur dix ans. Ces données nous donnent accès aux rendements jour par jour (ouvrable), mais aussi mois par mois, et année par année si l'on tronque la donnée pour s'intéresser à une échelle plus grande. Ces rendements nous donnent accès à un *kurtosis* et un coefficient d'asymétrie propre à la période donnée. C'est précisément cette idée que nous allons reprendre pour tracer les fonctions de *kurtosis* et *skewness* en fonction de la période de référence. L'objectif de cette recherche sera de vérifier si l'approximation a tendance à être valable uniquement lorsqu'on applique la méthode sur des rendements ayant une période de l'ordre de la journée, ou si ces rendements gardent leur validité lorsque la période est plus grande.

On rappelle que l'année est composée approximativement de 253 jours ouvrés, variant selon l'année. La figure 3.4a permet d'illustrer problème que pose le domaine de validité. Certes, la fonction de *kurtosis* est positive dans les rendements journaliers, mais elle est parfois trop grande (avec des valeurs autour de 30-40). De plus, tous les points en dessous de 0 ne sont pas valides dans l'approximation de Cornish-Fisher.

Le problème est le même pour le coefficient d'asymétrie : il atteint souvent des valeurs bien plus grandes que 2 (3.4b). Il y a donc un réel problème dans l'application de l'approximation de Cornish-Fisher sur des données financières.

Avec la répartition d'actifs initiale de l'entité et les données obtenues, on trouve un *kurtosis* semestriel de  $-0.144$  et un *skewness* de  $-0.918$ . Ce sont des valeurs qui sont en dehors du domaine de

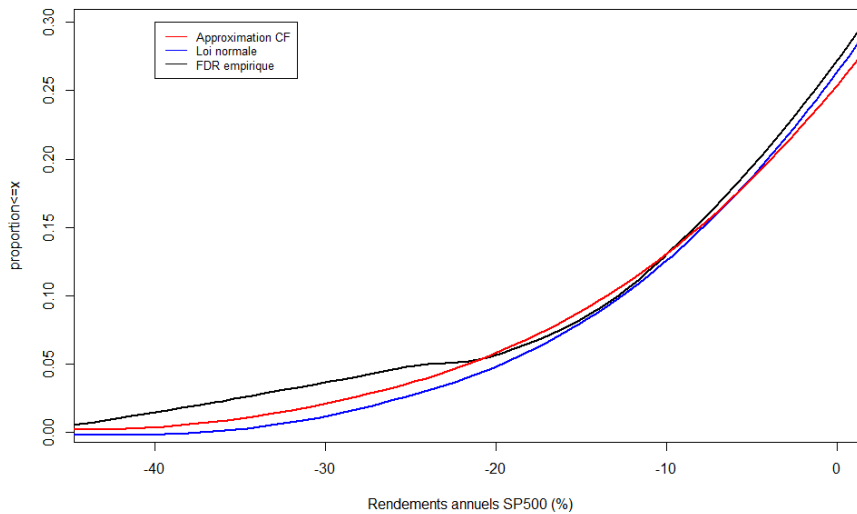


FIGURE 3.3 : Zoom sur la queue de distribution de la fonction de répartition empirique des rendements annuels de l'indice S&P500

validité de l'approximation. En faisant une analyse sur nos classes d'actifs, on remarque que la plupart des classes que nous utilisons sont en dehors du domaine de validité.

Nous en déduisons que nous ne pouvons pas utiliser l'approximation en l'état. De plus, même si le hasard avait fait que toutes les classes d'actifs et toutes leurs combinaisons respectaient le domaine de l'approximation de Cornish-Fisher, il suffirait que l'on change les données pour la période suivante et le risque serait à nouveau présent. On perdrait alors la qualité essentielle de cohérence de la mesure de risque : on ne pourrait pas utiliser la même mesure de risque d'une année sur l'autre. Il est donc crucial de trouver une méthode qui nous permet de contourner les restrictions de l'approximation de Cornish-Fisher.

### 3.2.3 Méthode de réarrangement des quantiles de Cornish-Fisher

Une solution serait d'utiliser la méthode de réarrangement des valeurs obtenues par l'approximation de Cornish-Fisher. La méthode en question permet de résoudre le problème de la transformation à l'aide d'une idée qui s'apparente à un tri.

La méthode de réarrangement trouve son origine avec Tchebychev qui l'a utilisée pour prouver un ensemble d'inégalités. Sa pertinence dans le cadre de l'approximation de Cornish-Fisher est explicitée dans CHERNOZHUKOV et al., 2010. Elle est également utilisée dans d'autres domaines tels que le transport optimal (voir VILLANI, 2003).

Mathématiquement, elle est décrite comme telle :

Pour  $\mathcal{X} = [0, 1]$  et  $f(x)$  une fonction mesurable de  $\mathcal{X}$  dans  $K$ , un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $F_f(y) = \int_{\mathcal{X}} 1\{f(u) \leq y\} du$  la fonction de distribution de  $f(X)$  pour  $X$  suivant une distribution uniforme dans  $[0, 1]$ .

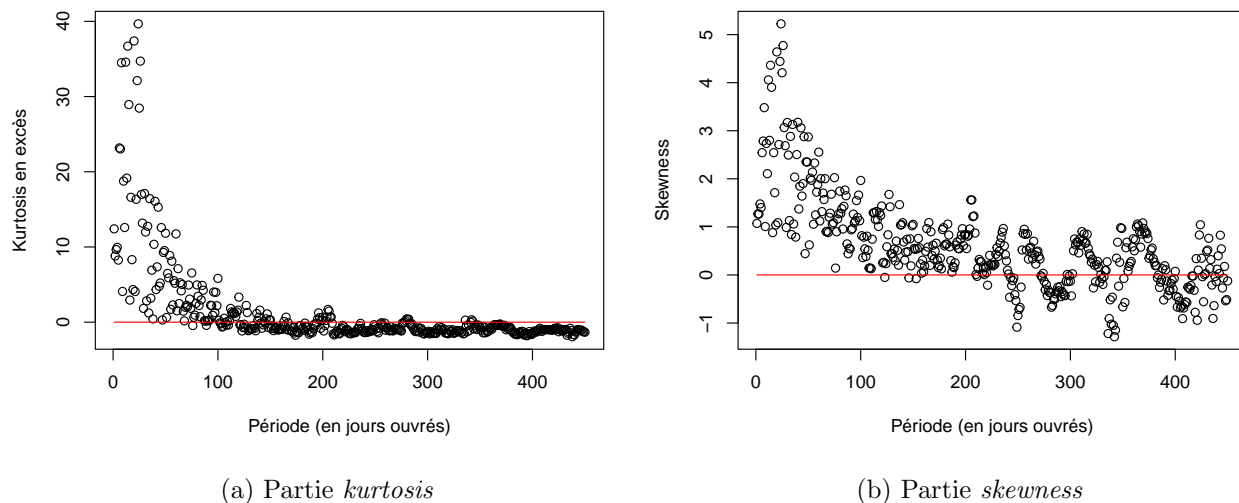


FIGURE 3.4 : Coefficients de *kurtosis* et de *skewness* obtenus en fonction de la période considérée

Le réarrangement croissant (*increasing rearrangement*) de  $f$  appelé  $f^*$  s'écrit alors :

$$f^*(x) := \inf \left\{ y \in \mathbb{R} : \left[ \int_{\mathcal{X}} 1\{f(u) \leq y\} du \right] \geq x \right\}$$

On peut résumer la méthode de CHERNOZHUKOV et al., 2010 par un tri ascendant sur la fonction quantile afin de la rendre monotone (AMÉDÉE-MANESME et al., 2015). Une fonction quantile est toujours monotone, sauf lorsque son estimation est erronée suite à une approximation de type Cornish-Fisher. Le réarrangement peut s'appliquer en toutes circonstances, car, lorsqu'il n'est pas nécessaire (fonction quantile monotone), le réarrangement va retourner la distribution initiale. Une façon d'évaluer l'efficacité de cette technique est de refaire l'application numérique de l'article de CHERNOZHUKOV et al., 2010.

Tout d'abord, on génère un ensemble de  $Y_i$  suivant une loi  $\Gamma(1/16, 16)$ . On s'intéresse à la moyenne empirique standardisée :

$$X_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - E[Y_i]) / \sqrt{\text{Var}(Y_i)}$$

Des échantillons de taille  $n = 4, 8, 16$  et  $32$  seront utilisés. On peut commencer par analyser les données des moyennes empiriques afin de vérifier si elles appartiennent au domaine de validité de l'approximation. Pour cela, les points représentant le couple *Skewness* et *Kurtosis* sont affichés dans la figure 3.5.

On remarque que pour toutes les valeurs de  $n$  que nous avons choisies, le domaine de Cornish-Fisher n'est pas respecté. Nous avons vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le domaine d'application de l'approximation de Cornish-Fisher soit respecté est la bijectivité de la transformation. Nous nous attendons donc à ce que la transformation de Cornish-Fisher pour ces quatre points ne soit pas bijective. Ainsi, le modèle devrait estimer une fonction de répartition qui n'est pas strictement croissante.

Ces estimations sont tracées dans l'ensemble de figures 3.6.

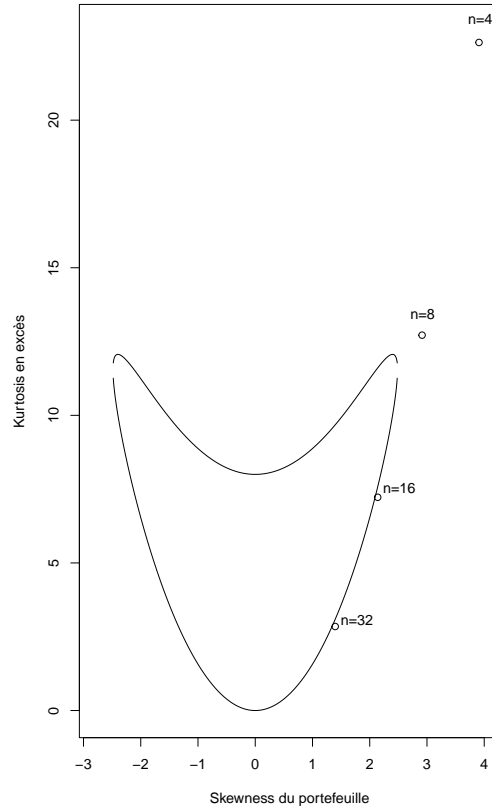


FIGURE 3.5 : Représentation des couples *Skewness* et *Kurtosis* des moyennes empiriques standardisées

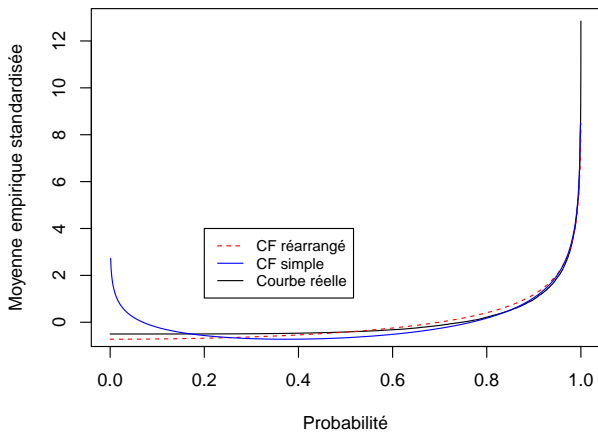
Les sous-figures de la figure 3.6 révèlent une amélioration substantielle de la qualité d'estimation. On peut également noter que nos résultats sont bien similaires à ceux obtenus dans l'article d'origine. On remarque que l'invalidité des transformations est bien visible. En effet, les quantiles de l'approximation de Cornish-Fisher ont une tendance à former un 'U' dans les cas d'invalidité des paramètres. On le voit particulièrement dans la figure 3.6a avec  $n = 4$ . Cette forme en 'U' se retrouvait souvent dans les modèles lorsqu'on sortait du domaine de validité de l'approximation. On voit ici que le réarrangement vient complètement remodeler les quantiles pour les rapprocher de leur valeur réelle. Un point appréciable de ce réarrangement est que la correction la plus importante se fait sur les quantiles de distribution extrêmes à la baisse. C'est une propriété particulièrement intéressante dans le cadre de la gestion des risques.

### Analyse numérique des erreurs

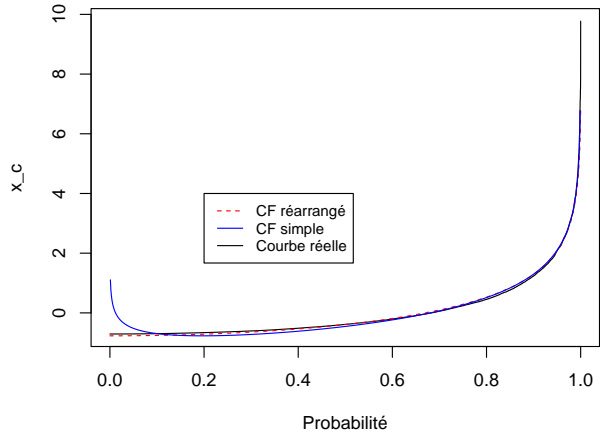
Afin d'avoir un aperçu quantifiable de la qualité d'approximation du réarrangement, un indicateur simple sera utilisé : la racine de la moyenne des erreurs au carré (*Root Mean Square Error* ou RMSE). Très simplement, pour chaque point estimé  $\hat{y}_t$ , nous le comparerons à  $y_t$ , le point de la courbe à approcher.

On a alors :

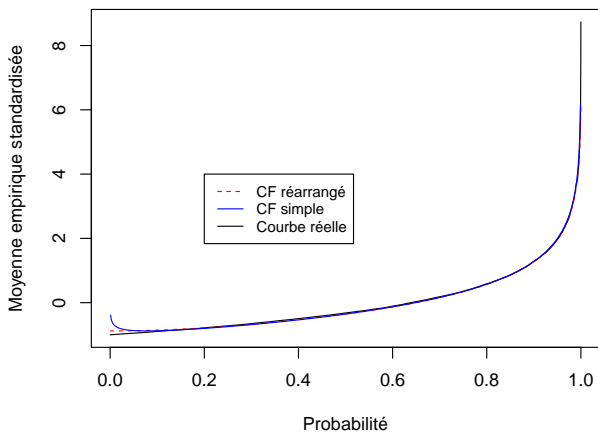
$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - y_t)^2}{T}}$$



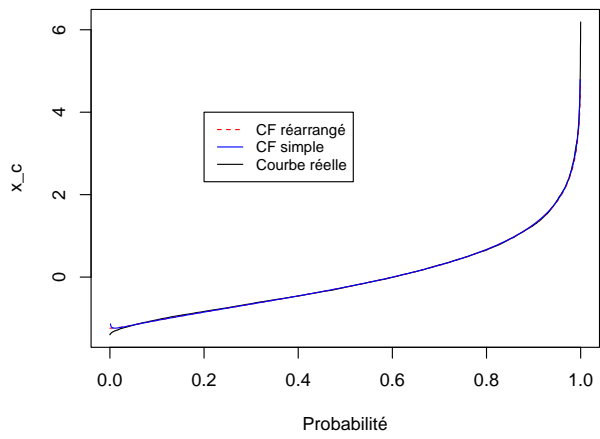
(a)  $n = 4$



(b)  $n = 8$



(c)  $n = 16$



(d)  $n = 32$

FIGURE 3.6 : Comparaisons des fonctions quantiles obtenues par l'approximation de Cornish-Fisher pour  $n = 4$ ,  $n = 8$ ,  $n = 16$  et  $n = 32$

Avec  $T$ , le nombre de points estimés.

L'avantage de cette mesure est qu'elle permettra de comparer deux estimations entre elles et pourra également donner une indication par rapport à la qualité globale de l'estimation.

Nous avons donc choisi d'afficher les RMSE de l'estimation en fonction de  $n$  et du fait qu'il y ait, ou non un réarrangement effectué. On peut voir sur le tableau 3.2 que l'impression visuelle de qualité de

$n$	RMSE CF sans réarrangement	RMSE CF avec réarrangement	Diminution du RMSE
32	0,019	0,017	11%
16	0,060	0,035	42%
8	0,17	0,049	71%
4	0,4	0,19	53%

TABLE 3.2 : Comparaison des RMSE avec et sans réarrangement

l'estimation donnée par l'ensemble de graphiques 3.6 se confirme numériquement. Assez logiquement, l'amélioration est bien plus substantielle quand  $n$  est petit que lorsque  $n$  est grand. Cela s'explique par le fait que la qualité d'ajustement était déjà assez bonne avant le réarrangement. Un point notable est que le réarrangement donne un RMSE du même ordre de grandeur (au sens scientifique du terme) que le meilleur des RMSE sans réarrangement ( $n = 32$ ) dès  $n = 8$ . Celui-ci est toutefois 2,5 fois meilleur. C'est encore une fois un point qui vient appuyer la qualité du modèle. On peut en conclure que cette méthode de réarrangement permet de réduire très efficacement les imprécisions de l'approximation liées à la violation du domaine de validité de Cornish-Fisher. Ce résultat nous permet alors d'envisager d'utiliser cette approximation même lorsque le domaine de validité n'est pas respecté.

### 3.3 Utilisation de l'approximation réarrangée

En suivant la méthode présentée dans la section précédente, nous avons implémenté un modèle permettant, pour une allocation donnée, de trouver les moments du portefeuille et d'en déduire un quantile de risque.

#### 3.3.1 Analyse de sensibilité du modèle

Une première approche du modèle serait de tester la sensibilité du quantile à 0.05% par rapport aux classes d'actifs. Plus particulièrement, nous allons observer quelle classe d'actif a le plus d'influence sur la  $\text{VaR}_{99,5\%}$  du portefeuille. Pour ce faire, les indices de Sobol (SOBOL, 2001) seront calculés. Ceux-ci montreront quels actifs influenceront le plus la VaR lorsqu'on part de la répartition initiale de l'entité 'MHP Actif Général'. La méthode va tester l'impact des légères modifications de la répartition initiale pour donner des sensibilités.

Nous utiliserons cet indicateur de sensibilité pour obtenir un comparatif des classes influençant le plus la  $\text{VaR}_{99,5\%}$ .

Afin d'analyser l'impact de la modification de la proportion d'une classe d'actifs dans le portefeuille, nous avons mis en place une méthode simple qui nous permet de réguler la proportion d'une classe d'actifs sans dénaturer le reste du portefeuille : si nous enlevons 1% à la classe d'actif  $i$ , nous rajouterons



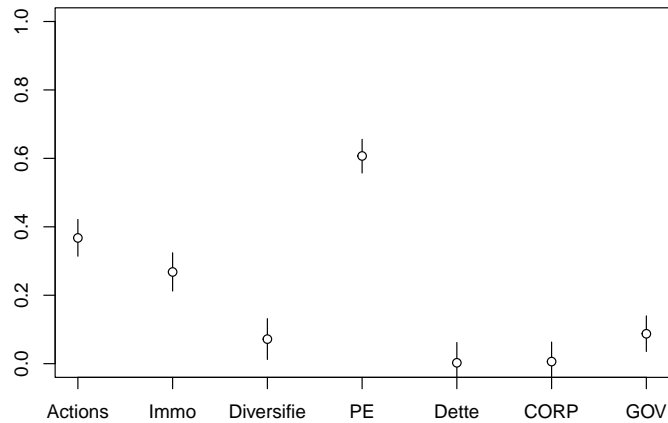


FIGURE 3.7 : Indices de Sobol de l'influence de la proportion des classes d'actifs sur la VaR à 99.5%

(1/6)% aux six autres. Cette méthode sera utilisée dans les applications numériques où l'on fera varier la proportion d'une classe d'actifs pour obtenir différents indicateurs.

La figure 3.7 est rassurante par rapport à la qualité du modèle. Elle nous montre que la proportion des classes d'actifs '*PRIVATE EQUITY*', '*ACTION*' puis '*IMMO*' sont les plus influentes pour la  $VaR_{99.5\%}$ . Il est également logique que la classe '*PRIVATE EQUITY*' soit de loin la plus influente de toutes. En effet, c'est une classe d'actifs à risque historiquement élevé.

Nous allons maintenant nous intéresser aux valeurs fournies par le modèle pour deux grandes classes d'actifs. Nous allons d'abord représenter les valeurs obtenues en faisant varier la part de GOV, qui est la classe jugée la moins risquée.

On peut également voir dans la figure 3.8 la VaR qui évoluera selon deux variables : Le taux de *PRIVATE EQUITY* dans l'allocation initiale et la valeur du quantile choisi pour la VaR (par exemple 99% pour  $VaR_{1\%}$ ). Les résultats obtenus semblent assez cohérents sur la figure. On remarque que plus la proportion de *PRIVATE EQUITY* dans l'allocation est grande, plus les risques de perte, ainsi que les potentiels gains sont élevés.

On observe également une pente qui s'accroît dans les extrêmes, ce qui traduit les gains et pertes potentiellement très importants à la hausse comme à la baisse dans les scénarios les plus optimistes et pessimistes.

De plus, ces premiers résultats nous permettent de comparer la perte potentielle à 99.5% à celle requise par la norme Solvabilité II (choc ACTION). Ces comparaisons sont faites à titre indicatif, car on ne compare fondamentalement pas la même chose en termes de période étudiée. Notre modèle affiche des  $VaR_{99.5\%}$  semestrielles alors que Solvabilité II affiche des  $VaR_{99.5\%}$  annuelles. Ces comparaisons sont néanmoins pertinentes du point de vue de l'ordre de grandeur. On s'attend à ce que les actifs risqués sur six mois le soient également sur 1 an.

Sur ce point, l'article de ANDRÈS et al., 2021 (*white paper*) commente le problème de la temporalité. Il y est noté que pour une période fine (intra-annuelle), le risque de marché est connu pour être très volatil. Cependant, après une crise, le marché a tendance à revenir à son niveau pré-crise et même à le

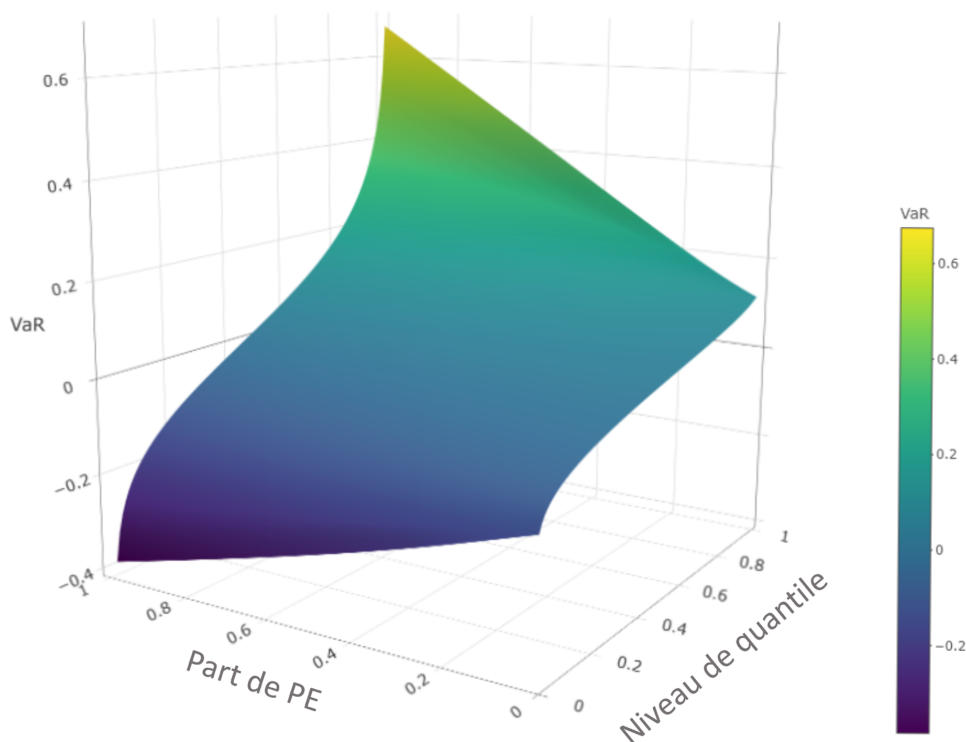


FIGURE 3.8 : Représentation 3D des estimations des quantiles par Cornish-Fisher en fonction d'une probabilité de survenance et de la part de *PRIVATE EQUITY* (PE) dans l'allocation

dépasser après un certain temps. Ce phénomène est appelé le comportement du retour à la moyenne du marché financier (*mean-reverting behaviour*). Ce phénomène traduit le fait qu'en moyenne, si un choc arrive, il sera mitigé dans le futur si le temps de projection est assez long.

On peut voir que le choc ACTION Solvabilité II type 2 (49%) ressemble aux 45% de notre classe d'actifs *PRIVATE EQUITY*. Nous sommes dans un ordre de grandeur cohérent par rapport aux chocs Solvabilité II.

Un récapitulatif des  $VaR_{99,5\%}$  des quantiles de perte pour chaque classe d'actifs ainsi que pour l'allocation actuelle se trouve dans le tableau 3.3.

Le risque de la classe immobilière ressort assez élevé, plus encore que celui du risque action. La norme Solvabilité II impose à 25% pour cette classe. Ici, le taux est sensiblement plus élevé dans notre référentiel par rapport à la norme. L'étude de AMÉDÉE-MANESME et al., 2015 donne une valeur à 31%. Il y reste une variabilité inhérente aux données utilisées sur cette valeur. De plus, la temporalité à 6 mois rajoute une différenciation supplémentaire. Nous restons tout de même à des niveaux cohérents.

En cherchant le SCR marché de l'entité 'MHP Actif Général', il apparaît que le ratio SCR marché sur investissements est de 10.8%. C'est un peu moins élevé que dans notre modèle. On peut penser que le choc immobilier de notre modélisation, la différence de temporalité et l'utilisation d'une autre

	VaR <sub>99,5%</sub>
Allocation initiale	16%
100% ACTION	34%
100% IMMO	37%
100% DIVERSIFIE	21%
100% PRIVATE EQUITY	45%
100% DETTE	15%
100% CORP	16%
100% GOV	1%

TABLE 3.3 : Représentation des chocs à 99.5% en fonction de la composition de l'allocation

matrice de corrélation expliquent cette différence.

Pour les obligations gouvernementales, le choc est extrêmement faible. Ce résultat s'explique par le fait que le modèle est calibré sur les trois pays aux taux très stables que sont l'Allemagne, la France et l'Italie. Aucun de ces pays n'a fait faillite ces dix dernières années, et les rendements des obligations émanant de ces états ont eu une volatilité très faible. Il ne serait pas possible d'utiliser cette valeur pour quantifier le risque d'un acteur engagé massivement sur le marché turc par exemple. Il semble nécessaire de calibrer cette classe d'actifs avec des données différentes si l'on voulait avoir une réelle adéquation avec ces acteurs plus risqués. Il serait également pertinent de calibrer les données gouvernementales sur une période plus longue que dix ans.

Pour refaire le lien avec Solvabilité II, la norme propose justement de séparer les chocs pour chaque pays en utilisant les 'courbes de taux pertinentes'. Ces courbes font l'objet de révisions régulières. Le manque de flexibilité de notre VaR sur les obligations gouvernementales n'est donc pas un écueil propre à notre modélisation.

On peut tout de même noter que sur des obligations du même type que celles sur lesquelles nous avons calibré notre modèle, nous aurions un SCR requis pour les obligations d'état à un niveau similaire.

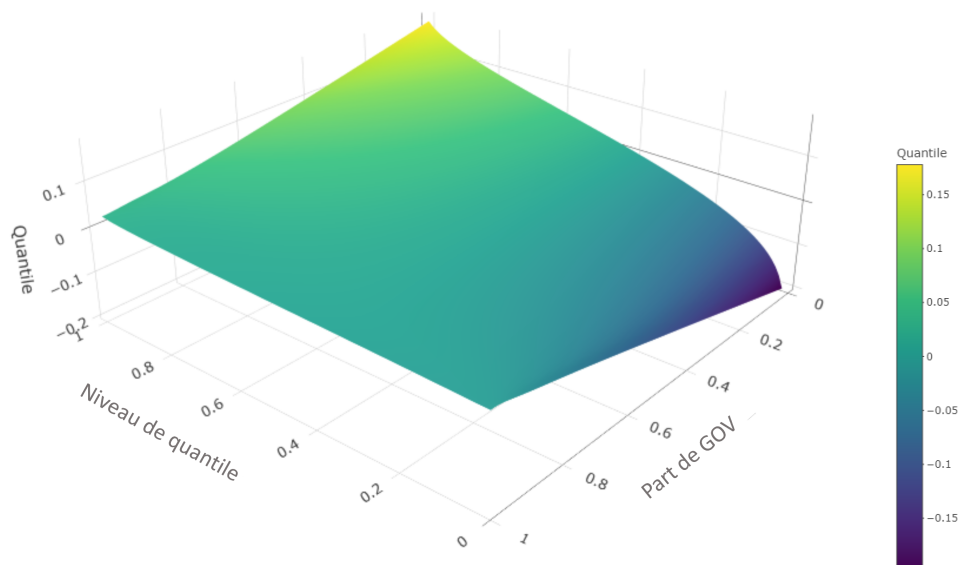


FIGURE 3.9 : Représentation 3D des estimations des quantiles par Cornish-Fisher en fonction d'une probabilité de survenance et de la part d'obligations gouvernementales dans l'allocation

On observe un phénomène contraire à celui de la figure 3.8 sur la figure 3.9. Plus la part d'obligations gouvernementales est grande, plus les VaR sont stables, que ce soit au niveau des gains ou des pertes. À l'inverse, l'allocation sans obligation gouvernementale augmente grandement l'amplitude des futurs résultats.

Ces observations témoignent d'une bonne cohérence des résultats du modèle aux extrêmes. En effet, il était attendu que plus l'allocation contient des obligations gouvernementales, moins elle est risquée. De plus, on remarque dans les deux figures que les résultats restent cohérents en tout point. La figure est lisse et ne possède pas de discontinuité difficile à interpréter.

Enfin, notre modèle permet d'avoir une image complète des quantiles de l'allocation actuelle (3.10).

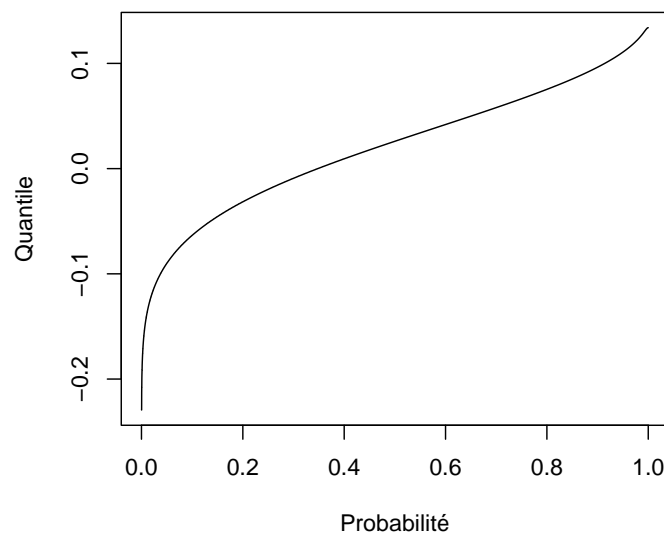


FIGURE 3.10 : Représentation de la fonction quantile des gains de l'allocation actuelle

La figure 3.10 nous montre un phénomène intéressant sur l'allocation actuelle : l'asymétrie négative (avec le coefficient d'asymétrie  $S = -0.58$ ) apparaît très clairement dans la fonction quantile. Cette caractéristique va grandement impacter les quantiles de rendement avec la possibilité d'obtenir des pertes importantes.

Nous avons vu que le modèle donne des résultats cohérents et pertinents. Nous allons maintenant tenter de l'utiliser pour améliorer l'allocation du groupe.

L'amélioration de l'allocation du groupe se basera sur 2 critères principaux :

1. L'espérance du rendement
2. La  $\text{VaR}_{99,5\%}$  du rendement

De la même manière que dans le chapitre 1 nous utiliserons les contraintes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1$$

$$\forall k, w_k \geq 0$$

$$\forall k, w_k \leq 1$$

$$dist_1(w, w_{cible}) < 15\%$$

De plus, nous reprendrons l'idée d'afficher trois profils d'allocations représentatifs d'une appétence au risque prédéfinie.

1. Une allocation prudente choisie avec une  $VaR_{99.5\%}$  minimisée à 13% (point 'CF 1').
2. Une allocation intermédiaire choisie avec une  $VaR_{99.5\%}$  à 15.6% (point 'CF 2'). Cette allocation aura pour objectif de conserver la  $VaR_{99.5\%}$  de l'allocation initiale tout en augmentant son espérance de rendement.
3. Un allocation offensive possédant une  $VaR_{99.5\%}$  à 19% (point 'CF 3').

Enfin, le nombre d'allocations possibles sera réduit en fixant la précision de l'allocation du modèle à 1% près.

#### Allocation 'CF 1' :

Nous allons commencer par afficher l'allocation 'CF 1' que l'on qualifiera de prudente. Sa représentation se trouve dans la figure 3.11.

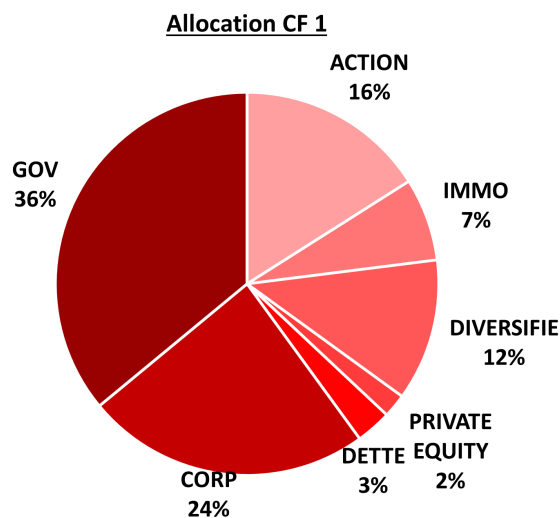


FIGURE 3.11 : Poids alloués pour chaque classe d'actifs dans l'allocation 'CF 1'

L'allocation 'CF 1' est caractérisée par une prédominance de la classe 'GOV'. Cette tendance est encore plus prononcée que pour l'allocation de variance minimale sous contrainte dans le modèle de Markowitz. Cette augmentation des poids de la classe 'GOV' se fait au détriment des classes 'IMMO', 'ACTION' et 'PRIVATE EQUITY'. Dans l'ensemble, les résultats pour cette allocation semblent cohérents et utilisables si on les compare à des allocations d'assureurs du marché.

Un point de comparaison supplémentaire par rapport au modèle de Markowitz se fait sur les fonctions quantiles obtenues selon l'allocation. Cela permettra de vérifier visuellement la diminution potentielle

de la taille des queues de distribution.

La figure 3.12 montre une diminution efficace des évènements de perte extrême. Une propriété

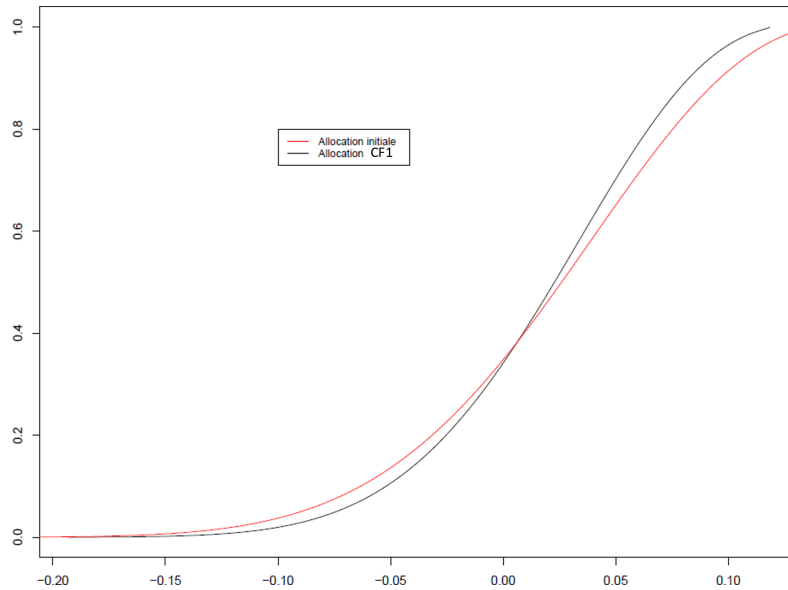


FIGURE 3.12 : Comparaison des fonctions de répartition de l'allocation initiale avec celle de l'allocation 'CF 1'

appréciable est que la courbe de distribution des pertes de l'allocation 'CF 1' est continuellement au-dessus de celle de l'allocation initiale. C'est l'inverse pour les rendements espérés, mais c'est un résultat prévisible, car l'allocation se veut prudente.

#### Allocation 'CF 2' :

L'allocation 'CF 2' est représentée dans la figure 3.13

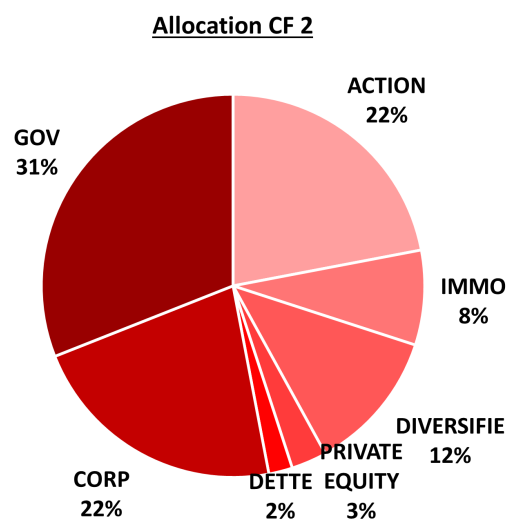


FIGURE 3.13 : Poids alloués pour chaque classe d'actifs dans l'allocation 'CF 2'

L'allocation 'CF 2' va être focalisée sur l'augmentation de la part de la classe 'ACTION'. C'est un

phénomène intéressant, car la classe d'actifs 'ACTION' ne semble pas aussi influente dans le cadre de la réduction du risque comparée à la part de 'PRIVATE EQUITY'. C'est donc qu'il y a un mouvement sur les queues de distribution qui va faire préférer la classe 'ACTION' à la classe 'PRIVATE EQUITY'. La part d'immobilier va encore une fois être diminuée. Le profil de cette classe ne semble pas être intéressant au niveau de sa  $\text{VaR}_{99.5\%}$ .

La figure 3.14 vient confirmer une distribution des rendements quasi similaire au niveau des pertes. C'est un résultat en adéquation avec l'objectif d'obtenir la même  $\text{VaR}_{99.5\%}$  que celle de l'allocation initiale.

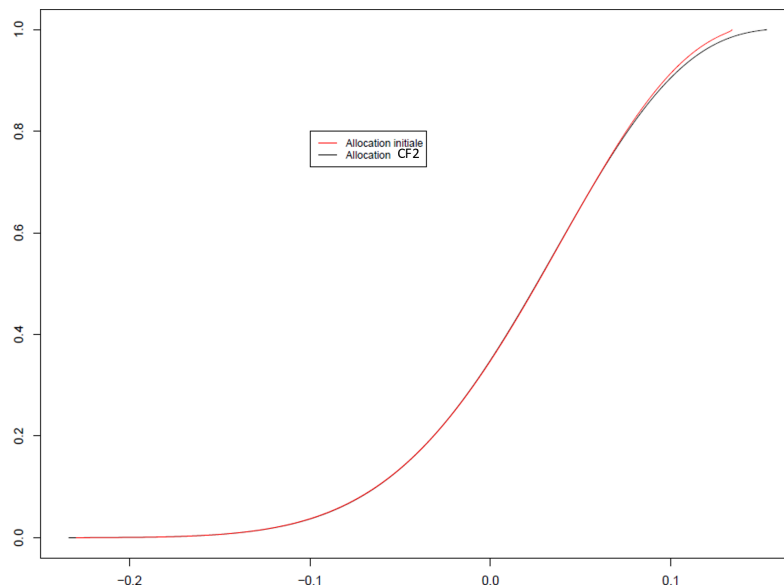


FIGURE 3.14 : Comparaison des fonctions de répartition de l'allocation initiale avec celle de l'allocation 'CF 2'

#### Allocation 'CF 3' :

L'allocation 'CF 3' est représentée dans la figure 3.15

L'allocation 'CF 3' va accroître le rendement espéré en augmentant grandement la part de 'PRIVATE EQUITY'. La part d'actions sera également plus grande. En contrepartie, le poids des classes 'GOV' et 'CORP' sera diminué.

La figure 3.16 va montrer une fonction de répartition plus allongée à la hausse comme à la baisse. C'est représentatif d'une allocation plus offensive dans la recherche du rendement, mais par conséquent plus risquée.

Enfin, nous allons nous inspirer des analyses de sensibilité faites dans le chapitre 2 pour faire apparaître la variabilité des rendements. Le tableau 3.4 montre la réorganisation optimale au sens rendement- $\text{VaR}_{99.5\%}$  de l'allocation lorsqu'on applique un choc simultané sur les classes 'ACTION' et 'PRIVATE EQUITY'. Le tableau de choc sur les classes d'actifs 'ACTION' et 'PRIVATE EQUITY' montre une certaine stabilité des résultats. Les poids se réorganisent de manière assez progressive en fonction des rendements donnés. On peut noter que le modèle va faire varier la classe 'ACTION' de manière bien plus importante que la classe 'PRIVATE EQUITY'. De plus, la classe 'DIVERSIFIE' est également

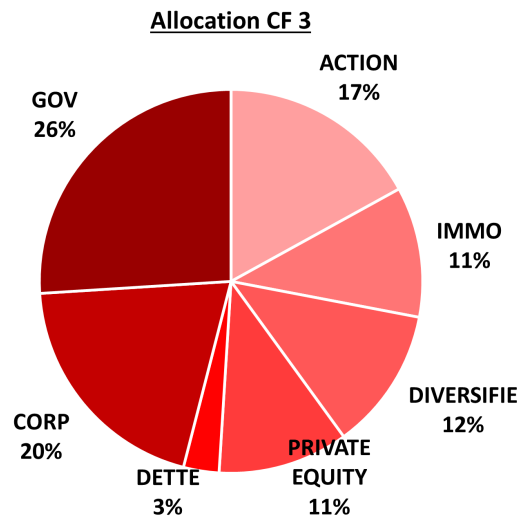


FIGURE 3.15 : Poids alloués pour chaque classe d'actifs dans l'allocation 'CF 3'

Choc	-30%	-20%	-10%	10%	20%	30%
ACTION	0,17	0,17	0,19	0,22	0,23	0,23
IMMO	0,11	0,11	0,09	0,08	0,07	0,07
DIVERSIFIE	0,19	0,19	0,14	0,12	0,11	0,11
PRIVATE EQUITY	0,02	0,02	0,04	0,03	0,03	0,03
DETTE	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02
CORP	0,21	0,21	0,21	0,22	0,24	0,24
GOV	0,29	0,29	0,32	0,31	0,30	0,30

TABLE 3.4 : Allocation du portefeuille en fonction du choc sur le rendement des classes 'ACTION' et 'PRIVATE EQUITY'

un grand facteur d'ajustement sur ces tests de sensibilité, passant d'un poids de 0.19 à 0.11.

Nous allons maintenant appliquer un choc sur le rendement des obligations gouvernementales (tableau 3.5).

Le modèle réagit de manière progressive à une modification du rendement : plus le rendement de la classe 'GOV' est élevé, plus la part de la classe augmente. On remarque que leur part augmente à la place de la part de la classe 'CORP', qui est également une classe relativement peu risquée. En termes de sensibilité, une augmentation du rendement des obligations gouvernementales de 30% fait augmenter de 6% la part de 'GOV' dans l'allocation. C'est encore une fois une sensibilité faible. Cependant, elle semble plus logique et prévisible que lors de l'utilisation du modèle de Markowitz, car une augmentation du rendement pouvait causer une diminution de la part du même actif.

Nous avons pu voir dans cette partie que l'approximation de Cornish-Fisher pouvait s'avérer pertinente dans le cadre de l'allocation d'actifs. La partie suivante servira à présenter le modèle ALM qui sera utilisé avec les allocations trouvées par la méthode.



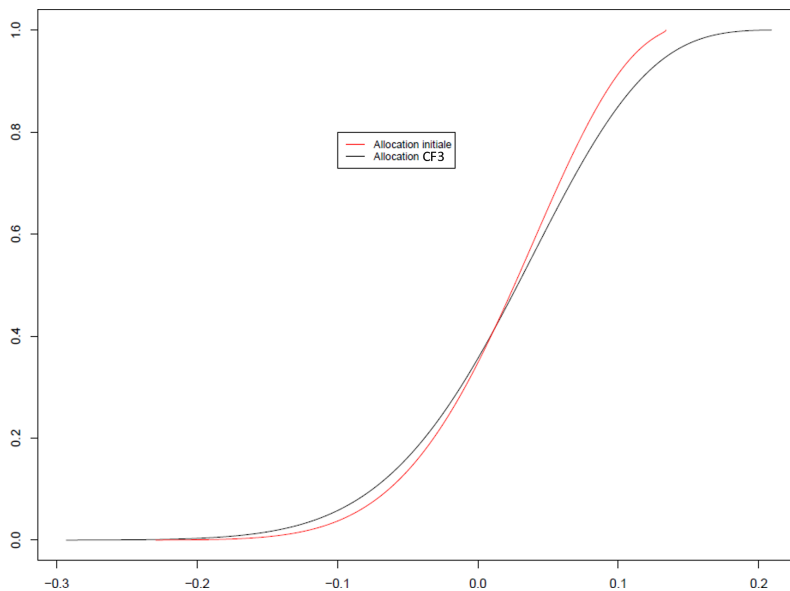


FIGURE 3.16 : Comparaison des fonctions de répartition de l'allocation initiale avec celle de l'allocation 'CF 3'

Choc	-30%	-20%	-10%	10%	20%	30%
ACTION	0,22	0,22	0,22	0,22	0,20	0,20
IMMO	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09
DIVERSIFIE	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
PRIVATE EQUITY	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04
DETTE	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
CORP	0,22	0,22	0,22	0,22	0,20	0,20
GOV	0,31	0,31	0,31	0,31	0,33	0,33

TABLE 3.5 : Allocation du portefeuille en fonction du choc sur le rendement de la classe 'GOV'

## Chapitre 4

# Présentation du modèle ALM

Le modèle ALM de Malakoff Humanis a pour objectif de donner un aperçu pertinent de la situation financière future du groupe ou d'une entité à partir d'une base d'actifs, d'un scénario économique et d'un stock de passif initial. Ce scénario économique comprend aussi bien des hypothèses à l'actif (courbe de taux, indices de performances futures...) qu'au passif (prévisions de rachats, de nouveaux assurés, de prestations...). Ce modèle prend également en entrée une allocation cible vers laquelle il va chercher à tendre.

Les résultats du modèle se composent d'une base d'actifs (appelée BDI dans la figure 4.1) vieillie au même format que celle en entrée, ainsi que d'un ensemble d'indicateurs : taux de rendement comptable (TRC), marge financière, duration, plus-value latente (PVL), perte de dépréciation durable (PDD), etc.

L'actif et le passif sont vieillies dans le temps selon différentes hypothèses en veillant bien à réaliser les différentes interactions actif-passif : un *flexing* est réalisé afin de recalculer à chaque étape les provisions au passif en fonction des intérêts techniques (qui dépendent des taux du scénario économique) et de la PB (qui dépend du TRC généré par l'actif). De plus, le passif contraint les niveaux de revenus à produire, et une fois cette richesse produite, elle va alimenter le passif via différents mécanismes : les intérêts techniques, la participation aux bénéfices, le taux de revalorisation...

Le modèle utilisé peut se résumer par la figure 4.1. Cette figure met en évidence sa décomposition en quatre parties phares :

- Le vieillissement de l'actif  
On projette la base d'actif à un an selon le scénario économique : vieillissement des caractéristiques des actifs (VNC, VM, maturité, PDD) et calcul des flux : tombées de nominaux et coupons, loyers, revenus, etc.
- Le *Flexing* du passif : recalcul des différentes provisions en fonction des entrées/sorties (écoulement du stock, affaires nouvelles), des intérêts techniques (dépendant des taux du scénario)
- La politique financière  
C'est la stratégie qui définit le montant de plus-value à réaliser sur l'année (dernier élément manquant au calcul du taux de rendement comptable de l'actif). Cette politique est régie selon différents paramètres : nécessité d'avoir un TRC lissé, conserver un matelas de plus-values adéquat...

- Le rebalancement

Ce dernier consiste tout d'abord en une première étape de vente où l'on cherche à se rapprocher de l'allocation cible tout en réalisant la plus-value déterminée par la politique financière. Ensuite vient une étape de rachat où l'on réinvestit le solde des différents flux (flux actifs, solde technique, montant vendu, etc.). Ces deux optimisations sont également réalisées sous les contraintes imposées par le cadre de risque.

Ces quatre étapes, réalisées chaque année de projection, permettent de se rapprocher de la cible, d'avoir une évolution dynamique et réaliste du portefeuille, de respecter le cadre de risque et de calculer les indicateurs clés du modèle.

La comparaison de ces indicateurs sous différents scénarios permet de comparer les différentes allocations testées entre elles.

Nous détaillerons ces étapes dans les parties suivantes.

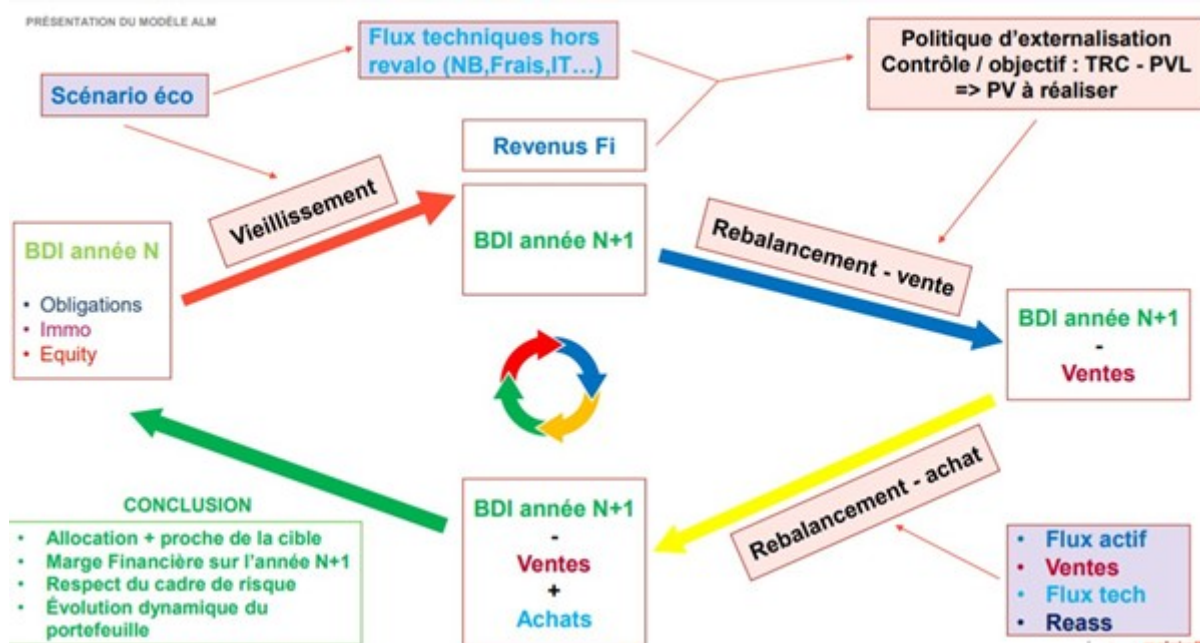


FIGURE 4.1 : Représentation schématique du fonctionnement du modèle ALM

## 4.1 Le vieillissement

Cette étape consiste à obtenir une anticipation de la base d'actifs en un temps  $T$  futur. On dit que l'on obtient une base d'actifs 'vieillie' à la fin de cette étape.

De la même manière que dans l'allocation, nous trierons les actifs en différentes classes qui seront modélisées d'une manière comparable. Cependant, l'univers d'allocation n'est pas le même que l'univers de modélisation. En effet, il n'y a pas de raison de penser que si deux actifs se modélisent de la même façon, alors ils seront équivalents dans l'univers d'allocation. L'univers de modélisation se présentera en trois grandes classes que nous présenterons dans cette section.

## 4.2 Catégories de l'univers de modélisation

### 4.2.1 Les actifs obligataires

Pour la modélisation obligataire, les indicateurs suivants seront projetés :

- La VNC
- La surcote-décote
- La valeur de marché (VM)
- La duration (calculée avec la VM)
- Les coupons courus
- Le taux de coupon
- La durée résiduelle
- Le coefficient d'indexation pour les OATI

Ces variables évolueront dans la base d'actifs en fonction de l'horizon de projection. Nous allons présenter brièvement les différents indicateurs clés modélisés.

La valeur nette comptable (VNC) est égale au prix d'achat ( $PA$ ) à l'instant de l'achat. Elle évolue ensuite pour correspondre à la somme des flux futurs ( $CF_t$ ) actualisés au taux de rendement actuariel (TRA).

$$VNC = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1 + TRA)^t} \quad (4.1)$$

Le TRA est calibré sur la VNC à l'instant de l'achat tel que :

$$PA = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1 + TRA)^t}$$

La valeur de marché correspond au prix auquel un acteur peut acheter ou vendre un actif sur le marché. Dans les faits, nous la considérerons comme la valeur actualisée des flux futurs aux taux de marché adéquats. Parfois, cette valeur de marché n'est pas accessible directement et il devient intéressant de la calculer. La valeur de marché (VM) s'écrit de manière générale :

$$VM = \sum_{t=1}^n \left( \frac{CF_t}{(1 + i_t)^t} \right) \quad (4.2)$$

On note  $i_t$  les taux de marché adéquat pour un flux entre la date initiale que l'on note 0 et la date  $t$ . Ce taux contient le taux zéro coupon sans risque et un supplément rémunérant le risque de liquidité et de défaut que l'on appellera souvent *spread*. L'ensemble de ces taux forment une courbe que l'on appelle généralement 'courbe de taux risqués'.

Du point de vue de la modélisation, pour les obligations *corporate* par exemple, elles sont classées

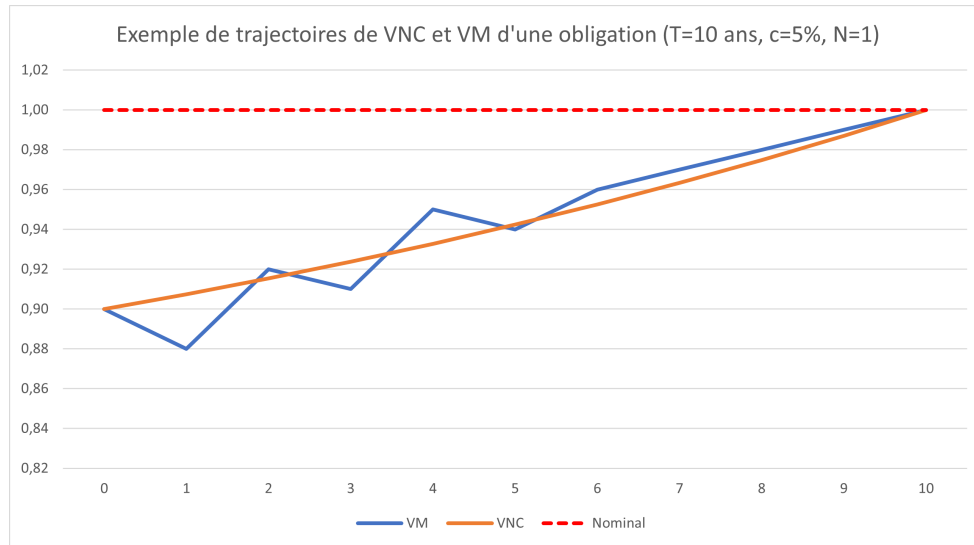


FIGURE 4.2 : Représentation de la valeur de marché d'un actif jusqu'à sa maturité.

en trois catégories par leur *rating* : AA ; A-BBB ; et HY (*High Yield*, correspondant à une notation <BBB) ; il faut donc dans les hypothèses du scénario économique trois projections de structures par terme de ces taux risqués.

De la même manière que pour le TRA, pour un actif avec une VM connue, le YTM (*yield to maturity*) est le taux calibré à un instant  $t$  tel que la VM de l'instrument financier est égale à l'ensemble de ses flux futurs actualisés à ce taux :

$$VM = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1 + YTM)^t}$$

Une façon de visualiser les différences fondamentales entre la VNC et la VM est d'observer leur modélisation pour le même actif obligataire dans la figure 4.2

On remarque que la VNC obligataire est très lissée et se rapproche du nominal de manière directe et claire. À l'inverse, la VM est beaucoup plus erratique.

Il en découle un élément important qui influencera la gestion d'actifs assurantielle (et par extension sa projection). Cet élément est le mécanisme de réserve de capitalisation. La réserve de capitalisation consiste en une 'réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leurs revenus' (*Code des assurances* 2001). Cette réserve assure que le rendement comptable espéré lors de l'achat des titres reste constant, indépendamment des variations des prix du marché. Cette réserve est modifiée lors de la cession de valeurs mobilières amortissables réglementaires avant leur date d'échéance.

Dans les faits, si une entreprise souhaite faire une plus-value sur un titre amortissable, alors cette plus-value va doter la réserve de capitalisation et inversement en cas de vente en moins-value.

En pratique, ce mécanisme limite l'intérêt de la spéculation obligataire pour l'assureur : cela confère aux obligations (l'investissement majoritaire des compagnies d'assurance) leur caractéristique HTM (*hold to maturity*). Sans pilotage de la réserve de capitalisation, il n'est pas intéressant pour l'assureur de céder des obligations avant leur terme, car la PVR ne rentrera pas dans le TRC.

La **surcote-décote** ( $SD$ ) est un des mécanismes encadrant l'évolution de la VNC au fil du temps.

Le calcul de la surcote-décote est indépendant des taux de marché, il ne dépend que du TRA à l'achat et de la différence entre le prix d'achat du titre et sa valeur de remboursement. Avec  $c$ , le taux de coupon et  $PA$  le prix d'achat :

$$SD_t = \sum_{i=t+1}^n c(1 + \text{TRA})^{-(i-t)} + \text{nominal}(1 + \text{TRA})^{-(n-t)} - PA$$

La valeur nette comptable d'un titre obligataire doit être vue nette de surcote-décote (WILLIOT, 2019) de sorte que :

$$\text{VNC}_t = PA \pm SD_t$$

Les deux types de valorisation principaux étant présentés, le lien avec la modélisation obligataire sera présenté dans la partie suivante. Nous présentons également un des principaux flux financiers que les assureurs reçoivent : le coupon. Le coupon attaché à une obligation correspond à l'intérêt que verse cette obligation à son détenteur.

$$\text{coupon} = \text{nominal} \times c$$

De plus, dans le cas où le taux de coupon est variable selon la période  $t$ ,

$$\text{coupon}_t = c_t \times \text{nominal}$$

On précise que l'on notera par la suite 'MATUR-RESID' la maturité résiduelle de l'obligation. Enfin, lorsqu'on parle de valeur de remboursement, on a :

$$\text{Remboursement} = \text{taux de remboursement} \times \text{nominal}$$

Le coupon couru ( $CC$ ) est alors la partie du coupon qui aurait été déjà reçue si le flux de l'obligation était versé de manière linéaire et continue sur la période. On a l'expression ci-dessous

$$CC = \frac{\text{nbjours}}{\text{période}} \times \text{coupon}$$

La période est donnée en jours.

Nous allons maintenant présenter le concept de duration d'un actif qui constitue un élément essentiel à la gestion actif-passif.

On appelle duration d'un actif ou d'un passif (ou sensibilité, ou encore duration modifiée) la mesure de la sensibilité du prix à son 'taux de rendement'. Mathématiquement, elle représente l'opposée de la dérivée (normée) du prix par rapport à son YTM.

$$D_{\text{modified}} = -\frac{1}{\text{VM}} \times \frac{d\text{VM}}{d\text{YTM}} \Leftrightarrow \frac{d\text{VM}}{\text{VM}} = -D_{\text{modified}} \times d\text{YTM} \Leftrightarrow \frac{d\text{VM}}{d\text{YTM}} = -D_{\text{modified}} \times \text{VM}$$

En pratique, elle permet d'approcher la variation de valeur ( $\Delta\text{VM}$ ) pour une variation infinitésimale du taux de rendement. Elle définit le pourcentage de diminution du prix (VM) pour une augmentation du YTM de 1%.

$$D_{\text{modified}} \approx -\frac{\Delta\text{VM}}{\text{VM}} \times \frac{1}{1\%} = -\frac{\text{VM}_{(\text{YTM}+x\%)} - \text{VM}_{(\text{YTM})}}{\text{VM}_{(\text{YTM})}} \times \frac{1}{1\%}$$

De plus, pour un actif dont on connaît les flux  $(CF_t)_{1 \leq t \leq n}$ , on a la duration de Macaulay donnée par

$$D_{\text{mac}} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \times CF_t}{(1+YTM)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+YTM)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \times CF_t}{(1+YTM)^t}}{VM}$$

On peut lier duration de Macaulay et duration modifiée avec l'expression suivante :

$$D_{\text{modified}} = \frac{D_{\text{mac}}}{(1 + YTM)}$$

Ces indicateurs étant présentés, nous pouvons détailler la modélisation obligataire.

### Les obligations à taux fixe

Les obligations à taux fixe (OATF) donnent un coupon périodique jusqu'à la maturité où elles remboursent un coupon et un nominal.

Pour calculer les VNC et VM d'une obligation à taux fixe, les relations 4.1 et 4.2 sont aisément utilisables puisque tous les taux sont fixes.

### Les obligations à taux variable

Ce sont des obligations qui versent un coupon dont le taux est réévalué périodiquement.

Le taux de coupon contient un taux fixe sommé avec un taux variable.

La modélisation de ces obligations se fait à l'aide d'un scénario économique du groupe. La VM sera donc alignée sur le taux de référence de l'actif modélisé.

### Les titres indexés sur l'inflation (OATi)

Les OATi ont un coupon et un nominal réévalués périodiquement pour prendre en compte l'inflation cumulée depuis l'émission du titre. Des courbes de prévision de l'inflation en fonction des années sont fournies en tant qu'hypothèses par les équipes du groupe. Ces courbes font partie intégrante du type de scénario dans lequel on se place.

Nous avons des taux annuels d'inflation, et les taux entre l'année  $n$  et  $n + 1$  sont interpolés si la maturité ne correspond pas parfaitement au registre de l'inflation.

Le nominal à la maturité du coupon s'écrit alors de la façon suivante :

$$\text{nominal}_{\text{indexé}} = \text{nominal}_{\text{init}} \times CI_{\text{MATUR-RESID}}$$

Avec

$$CI_t = CI_0 \times \frac{\text{inflation}_t}{\text{inflation}_0}$$

$$\text{coupon}_t = c \times (CI_t) \times \text{nominal}$$

### 4.2.2 Les actifs de type indicier

Dans ce type, on inclut les actions classiques, mais également les actifs qui ont vocation à faire uniquement de la performance et ne pas donner de coupon (certains fonds répliquant des indices par exemple).

La performance de l'indice est donnée par le modèle, ce qui permet de projeter la VM. La performance est de type *total return*, c'est-à-dire que les potentiels flux comme les dividendes sont réinvestis et pris en compte dans la VM. Ces actifs n'ont généralement pas de maturité définie. Les classes 'DIVERSIFIÉ' et 'ACTION' sont concernées par cette modélisation. Les principaux éléments à modéliser seront :

- La VNC
- La PDD
- La VM

Dans cette partie, le calcul de la VM sera simplifié dans l'optique d'utiliser les scénarios indicier. On écrira la VM avec la relation suivante :

$$VM(t + 1) = VM(t) \times \text{indice}_t$$

Dans la modélisation indicier, la VNC a tendance à rester fixe. Cependant, lors d'une perte importante, un mécanisme permettant d'affecter la valeur en VNC a été mis en place. Ce mécanisme est le mécanisme de provision pour dépréciation durable. Cette provision est déterminée pour les titres non amortissables justifiant d'une des conditions suivantes (WILLIOT, 2019) :

1. La dépréciation du titre est durable sur plus de six mois pour un taux supérieur à 20% en cas de faible volatilité des marchés, ou de 30% dans le cas d'une forte volatilité des marchés. Les régulateurs décident du type de volatilité des marchés.
2. La dépréciation en  $n - 1$  a été constatée et la moins-value est encore constatée en  $n$ .
3. La cession en début d'exercice a fait enregistrer une moins-value.  
La VNC sera alors réduite de la PDD.

### 4.2.3 Les actifs de type redistribuant

Les actifs que l'on considérera comme redistribuants sont des actifs qui servent un revenu financier de manière similaire à un coupon et dont leur valeur de marché peut être décorrélée de ses revenus. C'est concrètement une combinaison d'une modélisation obligataire avec une modélisation indicier. L'immobilier est l'exemple parfait de cette modélisation. En effet, sur une obligation, le fait de recevoir un coupon fait baisser la VM (sinon, il y aurait une opportunité d'arbitrage). À l'inverse, recevoir un loyer n'a pas cet effet. Il existe un amortissement dans l'immobilier, mais celui-ci est bien plus faible et n'est pas égal à la valeur du loyer. Pour les actifs de type redistribuant, on considérera la VNC fixe (sauf PDD), et la VM dépendra d'un indice.

Cette façon d'appréhender la modélisation d'un actif va alors nécessiter une hypothèse sur les revenus financiers et une hypothèse sur la valorisation (VM). Les classes d'actifs 'DETTE', 'PRIVATE EQUITY' et 'IMMO' seront considérées comme redistribuantes.



On remarque que les loyers immobiliers sont considérés de la même manière que des coupons et des dividendes, ce qui permet d'agréger la modélisation.

Les variables modélisées à chaque temps de projection pour ces actifs seront :

- La VNC (en prenant en compte la PDD et l'impact des appels et des amortissements)
- La PDD
- La VM (scénario économique indiciel sur la VM)
- Les coupons/loyers/dividendes (grâce aux taux de coupon connus et aux scénarios économiques de revenus)

Mathématiquement, la VNC se calculera de la façon suivante pour cette catégorie :

$$\text{VNC}(t + 1) = \text{VNC}(t) + \text{PDD} + \text{appels} - \text{amort}$$

On nomme 'appels' les appels de fonds demandés par les créanciers. Les appels et amortissements seront donnés dans les scénarios économiques. La VM sera modélisée de la façon suivante :

$$\text{VM}(t + 1) = \text{VM}(t) \times \text{indice}_{t+1}$$

De même, les revenus financiers associés à ces actifs vont être projetés à l'aide du scénario. De plus, à la fin du vieillissement, en fonction du scénario de taux, on met à jour le taux technique vie et le taux technique non-vie pour l'année de projection. Les nouvelles provisions sont également calculées afin d'alimenter certaines étapes suivantes. L'étape suivante sera d'utiliser ces résultats en cohérence avec la politique de gestion ALM du groupe.

### 4.3 La politique financière

La politique financière désigne ici l'ensemble des choix stratégiques faits par le groupe influant sur la réalisation des plus ou moins value ainsi que l'impact sur les résultats financiers qui en découle.

La compréhension de la politique d'externalisation du groupe nécessite la présentation du TRC et de son lien avec la participation aux bénéfiques (PB). Le TRC correspond à la somme des plus-values réalisées (PVR) à laquelle on ajoute les revenus financiers (coupons, loyers, dividendes, etc), les variations de surcote-décote, de coupon couru et de PDD. Le quotient de cet indicateur par la demi-base comptable est égal au TRC. Autrement dit :

$$\text{TRC}(t) = \frac{\text{PVR}(t) + \text{Revenus Financiers}(t) + \delta \text{SD}(t) + \delta \text{CC}(t) + \delta \text{PDD}(t)}{\text{Demi Base Comptable}(t)}$$

Avec

$$\text{Demi Base Comptable}(t) = \frac{\text{VNC}(t - 1) + \text{VNC}(t)}{2}$$

La PB est un passif rendu aux assurés dépendant du TRC. C'est un mécanisme obligatoire qui va permettre de redistribuer une partie des résultats aux assurés quand l'assureur affiche des résultats comptables (TRC) positifs. La participation aux bénéfiques est aujourd'hui un des principaux arguments commerciaux pour la souscription des contrats en assurance vie. Elle est au cœur de la gestion actif-passif.

On peut noter que le TRC est un indicateur largement pilotable par l'assureur : il suffit de ne pas vendre pour ne pas réaliser de plus-value et par conséquent ne pas afficher de TRC compétitif et inversement.

Le groupe a choisi de définir une stratégie financière qui régit le TRC via des critères de redistribution en fonction des paramètres suivants :

- La nécessité d'avoir un TRC lissé dans le temps : on veut éviter les sauts de TRC (la volatilité est nuisible d'un point de vue commercial).
- Piloter les distributions (PB).
- Garantir la sécurité financière de l'entité dans le temps (vision long terme nécessaire : robustesse aux différents scénarios). On cherche à conserver un matelas de plus-value confortable, tout en ayant une politique financière réaliste (on ne cherche pas non plus à minimiser le TRC).

On rappelle ici que les plus ou moins value du portefeuille s'écrivent comme la différence entre la VM et de la VNC pour chaque titre :

$$\text{PMVL} = \sum_{\text{R332-20}} \text{VM} - \sum_{\text{R332-20}} \text{VNC}$$

Seuls les actifs 'R-332-20' sont pris en compte, car les autres entrent dans le périmètre de l'application de la réserve de capitalisation.

La politique financière correspond donc aux critères qui régissent la plus-value à réaliser. Plus précisément ;

- Un stock de PVL  $< 5\%$  implique que l'on ne réalise pas les PVL (sauf en cas de contrainte de passif : il faut quoiqu'il arrive dégager suffisamment de revenus financiers pour payer les intérêts techniques)
- Lorsqu'on obtient un stock de PVL entre  $5\%$  et  $20\%$ , la politique est plutôt de reconstituer un matelas de PVL, avec une externalisation minimale
- Un stock de PVL supérieur à  $20\%$  est une situation confortable qui va permettre de redistribuer les plus-values de manière importante envers les assurés.

De plus, il y a une contrainte sur le TRC d'une année sur l'autre (pour assurer un TRC lisse dans le temps) :

$$(\text{TRC}_{t-1} - 0.2\%) \leq \text{TRC}_t \leq (\text{TRC}_{t+1} + 0.2\%)$$

On obtient alors un TRC 'lissé' au fil des années. Cet effet est observable dans la figure 4.3.

## 4.4 Le rebalancement

Le rebalancement est l'étape pendant laquelle le modèle réalise les achats/ventes. L'objectif du rebalancement est de converger vers l'allocation cible définie en amont. Il se passe en deux étapes :

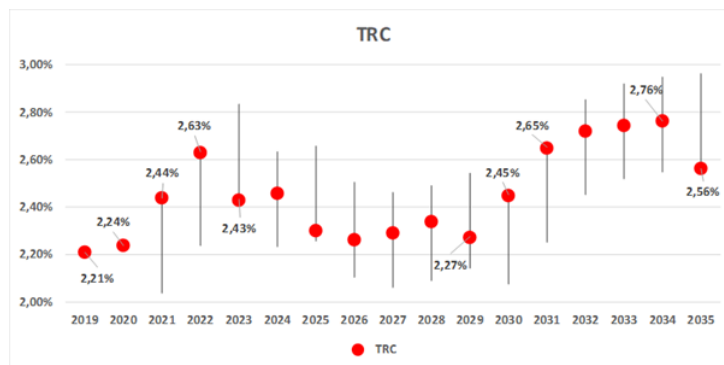


FIGURE 4.3 : Exemples de TRC obtenus lors de l'utilisation du modèle ALM. Les barres verticales représentent l'ensemble des valeurs possibles.

- Une première étape de vente : l'algorithme vend les classes d'actifs autorisées en cherchant à minimiser la distance à la cible sous la contrainte de réaliser exactement la plus-value définie dans l'étape précédente (la stratégie financière)
- Une étape d'achat où l'on réalloue le flux financier défini par :
  - le 'flux actif' déterminé lors du vieillissement (nominaux, coupons, etc.)
  - les montants de la vente de l'étape précédente
  - le solde technique (cotisations - prestations - frais)

Le rebalancement sera une étape clé de l'étude, car elle permettra de mettre en place les allocations trouvées. Celui-ci consiste en une minimisation sous contrainte. Il a pour but de minimiser l'écart entre la répartition réelle des actifs et l'allocation cible, tout en imposant des contraintes à la PVR qui est dégagée.

Concrètement, il se compose en deux phases :

Il y a tout d'abord une phase de vente qui consiste en une optimisation de la somme des plus ou moins-values latentes des classes d'actifs 'ACTION', 'TAUX' et 'DIVERSIFIE'. Cette somme doit être égale à la PVR demandée. On remarque que seulement trois classes d'actifs sont présentes dans l'optimisation. Ces trois classes d'actifs sont des actifs de performance. Ce sont ces classes qui seront affectées en priorité par le rebalancement. En effet, les autres actifs ne sont pas propices à un rebalancement, principalement au niveau de la vente à cause du mécanisme de réserve de capitalisation que nous avons vu précédemment. D'autres actifs comme l'immobilier ou la dette privée entraîneraient normalement à leur cession une décote de liquidité. Ces classes peuvent toutefois être vendues dans certains cas, notamment lorsqu'il n'y a plus assez de PVL sur la partie cotée ou lorsque le flux (revenu – solde passif) est négatif et que la VM cotée n'est pas suffisante pour compenser.

Les ventes ont pour conséquence la suppression (ou modification quand la ligne n'est pas vendue entièrement) de lignes dans la base d'actifs.

Le rachat a pour conséquence des rajouts de lignes selon un paramétrage défini en amont (maturités de réinvestissement, *rating*, pays de référence pour les obligations gouvernementales). Les réinvestissements se font aux conditions économiques en  $t$  (définies dans le scénario économique).

Ayant déjà obtenue les taux techniques, on peut calculer les intérêts techniques ( $IT = \text{taux technique} \times \text{provisions techniques}$ ) par risque.

On détermine également la participation aux bénéfices qui dépend, elle, du TRC défini grâce à toutes

les étapes précédentes (vieillessement, stratégie financière, rebalancement). Le flux à réinvestir s'écrit alors :

$$\text{FLUX}_{\text{REINV}} = \text{FLUX}_{\text{TOTAL}} + \text{Ventes}$$

Grâce à ces montants et aux provisions calculées juste après le vieillissement, il en découlera un nouveau solde technique pour l'année suivante ainsi qu'une nouvelle base de calcul pour les IT et la PB de l'année suivante.

À la fin du *flexing*, l'ensemble des opérations de la boucle ALM est terminé. On peut passer à l'année de projection suivante. L'ensemble des indicateurs peut être calculés pour cette année de projection :

- Des indicateurs économiques tels que la PVL
- Des indicateurs comptables tels que les comptes de résultat, les TRC, la marge financière.

On va discriminer les allocations testées en fonction de ces différents indicateurs. On appuie en particulier notre analyse sur la marge financière.

$$\text{Marge Financière} = \text{Revenu Financier} + \text{PVR} - \text{IT} - \text{PB} - \text{Revalorisation}$$

La marge financière est un indicateur phare, car elle prend en compte les interactions actif-passif. Elle est en partie pilotable, donc l'information sur un horizon de projection long est nécessaire. Cela correspond d'autant plus à une gestion du risque assurantiel pour des entités à passif long tel que pour les activités d'épargne et de retraite.

Le rendement sera obtenu en calculant (en scénario central) la marge financière actualisée en prenant bien soin d'externaliser l'ensemble des plus-values en dernière année de projection. Le risque sera quantifié par le temps d'arrêt représenté par l'année de projection où la marge financière devient négative en scénario adverse.

Nous avons vu un ensemble d'outils pour l'utilisation du modèle ALM. Il nous reste alors à définir une allocation stratégique satisfaisante pour pouvoir l'utiliser.

## Chapitre 5

# Application des allocations trouvées au modèle ALM

### 5.1 Rappel des allocations testées

Nous avons choisi de tester un total de six allocations dans le modèle ALM : trois allocations obtenues dans le cadre de l'optimisation dans le modèle de Markowitz ('M i') et trois allocations obtenues dans le cadre l'approximation de Cornish-Fisher ('CF i') réarrangée seront projetées. Pour chacun des deux modèles sous-jacents, nous avons une allocation risquée, une allocation équilibrée et une allocation prudente. Ces allocations ont déjà été présentées dans les parties correspondantes aux modèles en question, mais nous en dressons un résumé dans le tableau 5.1.

Nom des allocations	CF 1	CF 2	CF 3	M 1	M 2	M 3
ACTION	16%	22%	17%	13%	16%	18%
IMMO	7%	8%	11%	10%	7%	11%
DIVERSIFIE	12%	12%	12%	12%	15%	12%
PRIVATE EQUITY	2%	3%	11%	2%	6%	8%
DETTE	3%	2%	3%	4%	4%	4%
CORP	24%	22%	20%	24%	22%	24%
GOV	36%	31%	26%	35%	30%	23%

TABLE 5.1 : Récapitulatif des allocations retenues

### 5.2 Présentation des résultats

Nous avons choisi de restreindre les résultats présentés par le modèle à quelques indicateurs principaux. Ces indicateurs sont listés ci-dessous :

- La marge financière,
- Le TRC,

- La Valeur de marché totale de l'allocation à l'année  $n$ ,
- La PB.

L'horizon de projection a été fixé à dix ans.

### 5.2.1 Comparaison de la marge financière des allocations

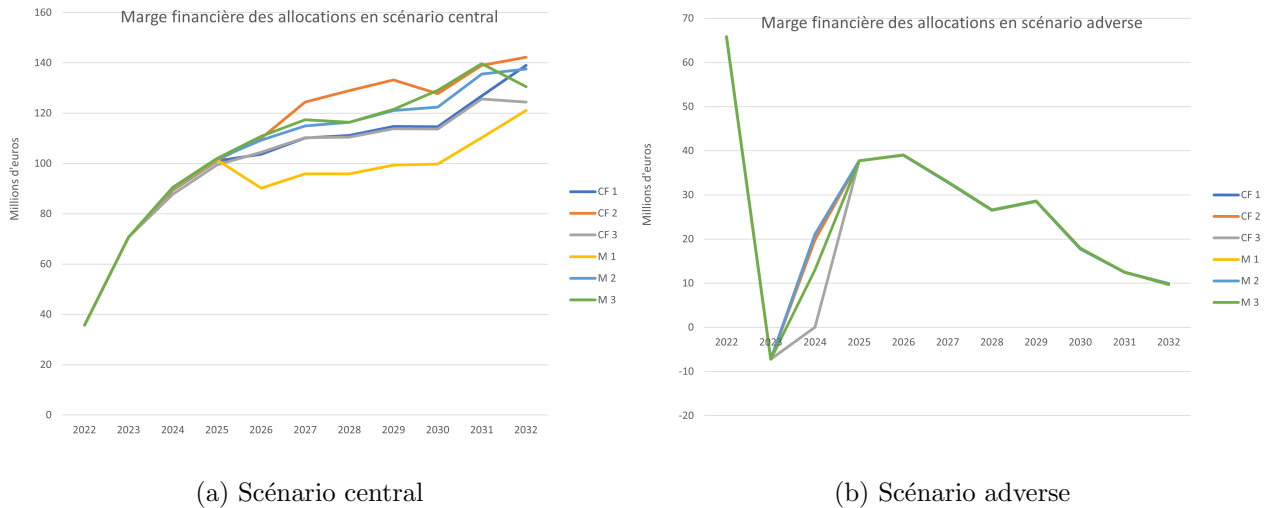


FIGURE 5.1 : Évolution de la marge financière en fonction de l'horizon de projection et du scénario

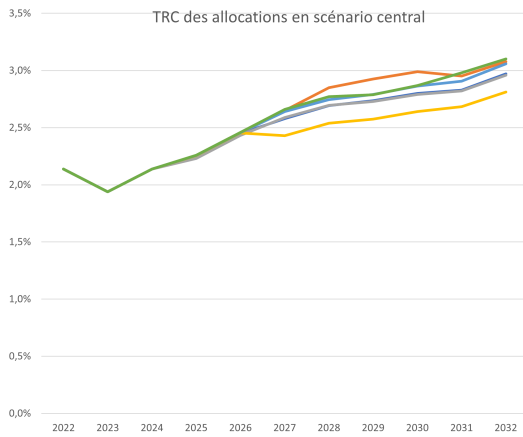
On rappelle que la marge financière est un facteur crucial pour juger de la qualité de l'allocation grâce à la prise en compte des interactions actif-passif. Dans la figure 5.1a (scénario central), on remarque que la marge financière ne dépend que peu de l'allocation jusqu'en 2025. C'est expliqué par l'inertie du bilan et par le fait que l'entité dispose d'un stock de PVL suffisant pour pouvoir compenser les variabilités annuelles des rendements financiers. Après cette année, les allocations se démarquent de la façon suivante :

On remarque que l'allocation 'CF 2' est l'allocation permettant de sortir la plus grande marge financière. À l'inverse, l'allocation 'M 1' ressort clairement comme la moins adaptée. Les autres allocations ont une performance plus intermédiaire.

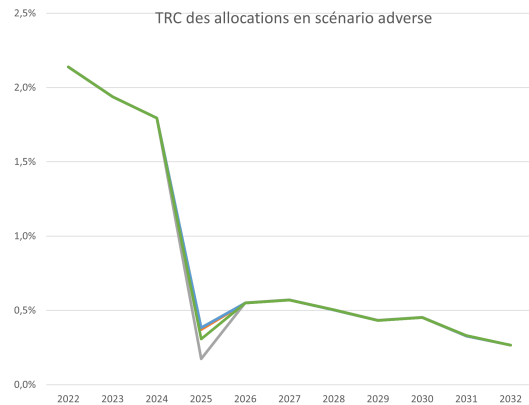
En scénario adverse (5.1b), les allocations performant généralement de manière très similaire, avec une grande chute en 2023 pour toutes les allocations (liée à la nature du scénario adverse qui veut tester la résilience face à cette chute). On peut toutefois noter la remontée plus lente de l'allocation 'CF 3' par rapport aux autres.

### 5.2.2 Comparaison du taux de rendement comptable des allocations

En scénario central (figure 5.2a), on observe un TRC globalement croissant au fil des années pour toutes les allocations. L'allocation 'CF 2' fait partie des meilleures allocations en termes de TRC. Cependant, l'allocation 'M 3' la dépasse très légèrement vers la fin de la période de projection. L'écart entre la meilleure allocation (3.1% de TRC) et la moins bonne allocation (2.8% de TRC) est d'environ 0.3%. L'allocation 'M 1' se démarque clairement du groupe en ayant un profil plus mauvais sur le TRC. Le reste des allocations est plus intermédiaire.



(a) Scénario central



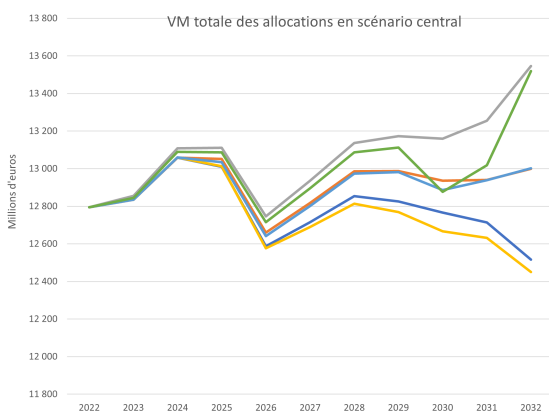
(b) Scénario adverse

FIGURE 5.2 : Évolution du TRC en fonction de l’horizon de projection et du scénario

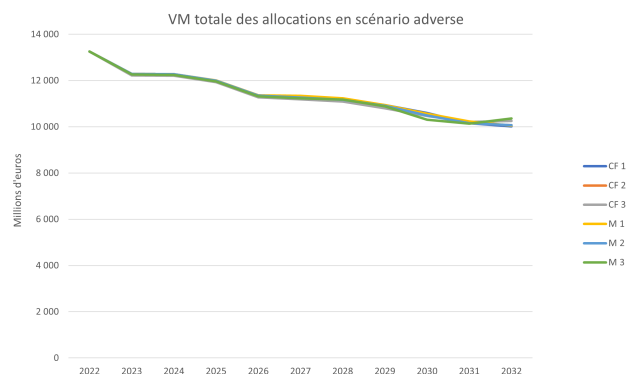
En scénario adverse (figure 5.2b), l’ensemble des allocations performe de façon très similaire. Toutes les allocations vont voir leur TRC subir une forte chute en 2025. Cette chute sera suivie par une stabilisation descendante des TRC. On note toutefois une chute plus importante du TRC de l’allocation agressive ‘CF 3’ par rapport aux autres.

Dans l’ensemble, cette section aura permis de montrer les bonnes performances des allocations ‘M 3’ et ‘CF 2’.

### 5.2.3 Comparaison de la VM totale des allocations



(a) Scénario central



(b) Scénario adverse

FIGURE 5.3 : Évolution de la VM en fonction de l’horizon de projection et du scénario

En scénario central, une bonne calibration des hypothèses de VM du scénario doit faire apparaître trois types de trajectoire :

- Les VM des allocations agressives ('CF 3' et 'M 3') au-dessus des autres.
- Les VM des allocations équilibrées ('CF 2' et 'M 2') en position intermédiaire.
- Les VM des allocations défensives ('M 1' et 'CF 1') en dessous des autres.

Cette tendance est bien celle observée (figure 5.3a), mais on y trouve quelques points notables. On remarque par exemple un léger fléchissement des VM entre 2028 et 2032 pour les allocations prudentes 'CF 1' et 'M 1'.

À catégorie de risque équivalente, les allocations de type Cornish-Fisher ('CF') sont au-dessus de celles de type Markowitz ('M') et fléchissent moins dans la première période baissière du scénario. On peut d'ailleurs ajouter que le modèle ALM a bien joué son rôle de lissage du TRC puisque la baisse conséquente de VM ne s'est par répercutée sur le TRC, comme on peut le voir sur la figure 5.2a. Dans les faits, le modèle va répercuter la baisse de VM sur son stock de PVL, ce qui va empêcher d'impacter le TRC.

En scénario adverse, il n'y a pas de différences notables sur la VM des allocations. On observe simplement une baisse continue de la VM pour toutes les allocations (figure 5.3b).

#### 5.2.4 Comparaison de la PB distribuée en fonction de l'allocation

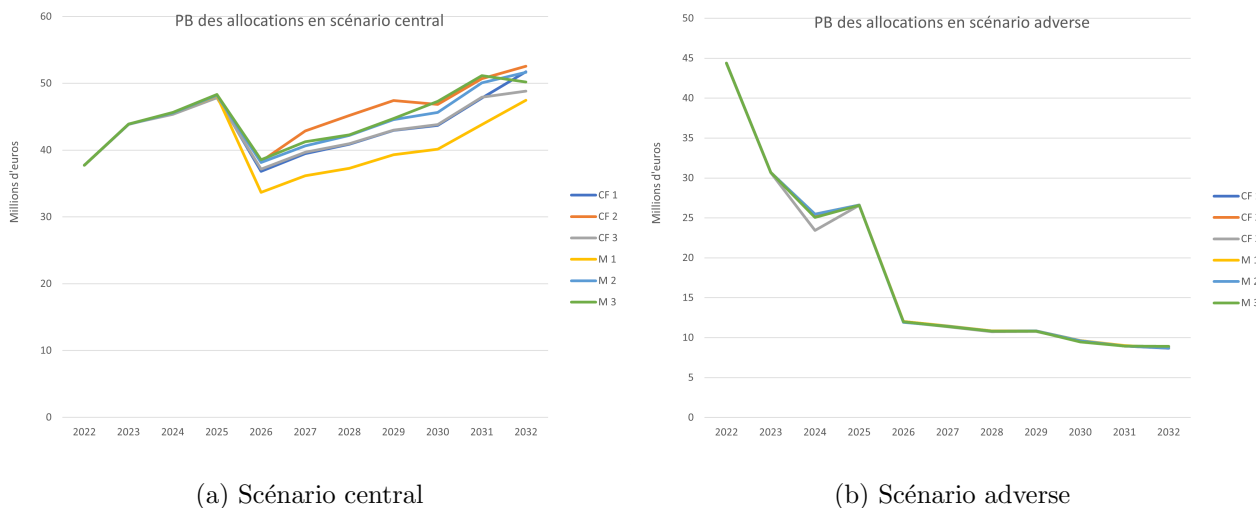


FIGURE 5.4 : Évolution de la PB en fonction de l'horizon de projection et du scénario

Par rapport à la participation aux bénéficiaires, on remarque sur les figures 5.4a et 5.4b que la PB est très corrélée à la VM des actifs. La baisse de VM de l'année 2026 se répercute clairement sur la PB. On constate une claire diminution de la PB dans le scénario adverse par rapport au scénario central, ce qui était attendu.

Si l'on étudie la performance des différentes allocations en scénario central, on peut voir qu'encore une fois, l'allocation équilibrée 'CF 2' est celle qui permet de distribuer le plus de PB. C'est une allocation qui se démarque donc sur la quasi-totalité des indicateurs choisis. À l'inverse, l'allocation 'M 1' est



celle qui permet le moins de redistribution de PB.

En scénario adverse, il n'y a encore une fois pas de différences notables parmi les allocations.

De par les résultats obtenus, on peut tirer les conclusions suivantes :

- Les allocations 'M 3' et 'CF 2' permettent d'obtenir de meilleurs résultats financiers.
- L'allocation 'M 1' est la moins performante vis-à-vis du modèle.
- Dans l'ensemble, les allocations trouvées permettent de résister au choc du scénario adverse de manière convenable (PB positive, TRC positif).

Une faiblesse de ces résultats viendrait du nombre d'allocations testées qui est relativement restreint. Ce défaut vient de l'importance du temps de calcul du modèle, empêchant d'essayer un grand nombre de scénarios.

# Conclusion

Notre étude a permis tout d'abord de présenter la théorie moderne du portefeuille et son application sur un modèle ALM. Nous avons vu que bien que cette méthode soit fondamentale en allocation d'actifs, elle n'en demeure pas moins limitée sur certains points. Le problème central sur lequel notre étude s'est focalisée est le manque de prise en compte des queues de distribution dans l'optimisation rendement-volatilité découlant de la théorie moderne du portefeuille. Pour ce faire, l'importance des queues de distribution dans l'allocation d'actifs a été soulignée. C'est tout le sens de la réglementation européenne sur la solvabilité (Solvabilité II) qui vient encadrer l'allocation d'actifs assurantielle, notamment par l'intermédiaire des chocs qu'elle impose sur les actifs. Ces chocs prennent en compte les queues de distribution des actifs et les estiment avec l'hypothèse de rendements gaussiens. Cette hypothèse étant critiquée, nous avons choisi de ne pas l'utiliser dans l'étude.

Afin de pouvoir prendre en compte la queue de distribution des actifs étudiés, l'approximation de Cornish-Fisher a été présentée. Notre étude a montré que cette approximation pouvait s'avérer plus pertinente dans l'approximation des queues de distribution d'une loi que l'approximation gaussienne. Cependant, celle-ci fait face à un écueil de taille : son domaine d'application est restrictif et n'assure pas la validité de l'approximation en toutes circonstances.

Une méthode de réarrangement a été présentée et calibrée afin de dépasser cette restriction. Il a été observé que cette méthode permettait de résoudre les restrictions posées par le domaine d'application de l'approximation tout en gagnant en précision par rapport à certaines méthodes actuelles. De plus, cette méthode possède une grande adaptabilité dans le sens où elle est informatiquement peu coûteuse et facile à implémenter dès que l'on dispose de données en nombre suffisant.

Enfin, nous avons montré comment, en utilisant des contraintes simples, cette méthode est utilisable sur un modèle ALM et permet d'obtenir des allocations pertinentes.

La méthode présentée a toutefois montré certaines limites lorsque la donnée n'était pas disponible en qualité suffisante (calibration sur des obligations d'état n'ayant jamais fait faillite les dix dernières années par exemple). Une généralisation de la méthode en remplacement de l'approximation gaussienne faite dans le cadre réglementaire ne semble pas pertinente pour cette raison. Il en ressort toutefois que cette méthode possède une utilité claire par rapport à l'optimisation rendement-volatilité simple dans la mesure où les queues de distribution sont effectivement prises en compte dans l'allocation. On remarque également que cette méthode trouverait son intérêt dans une utilisation qui viendrait compléter l'approximation gaussienne sur certains sujets où celle-ci est clairement défailante (lors d'une estimation ponctuelle dans le cadre de l'ORSA par exemple).

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce mémoire. Je souhaiterais tout d'abord remercier chaleureusement les personnes qui m'ont encadré dans l'équipe ALM de Malakoff Humanis. Je remercie plus particulièrement François MALIGOT, anciennement manager de l'équipe ALM chez Malakoff Humanis et encadrant de stage et d'alternance. Sa confiance, ses enseignements et son goût pour l'ALM qu'il m'a transmis pendant plus d'un an ont été extrêmement enrichissants.

Un grand merci s'adresse à Naoufal EL-BEKRI, actuaire dans l'équipe ALM de Malakoff Humanis. Ses conseils, ses propositions, ses relectures, sa bienveillance et son investissement pour compléter le rôle de tuteur lors du départ de François ont joué un rôle clé durant toute la réalisation du mémoire.

Je souhaite également remercier Tristan RAISON, actuaire dans l'équipe ALM de Malakoff Humanis pour les conseils, les outils qu'il m'a apporté ainsi que pour son implication jusqu'à la fin de ce mémoire.

Ma gratitude s'adresse enfin au corps professoral de l'ISFA, avec mon tuteur académique, Jean-Louis RULLIÈRE, mais aussi un ensemble d'autres professeurs qui ont été investis pour donner une formation de qualité à leurs élèves, malgré la période inédite.

Je remercie enfin ma famille et mes amis qui m'ont apporté leur soutien tout au long de mes études.

# Bibliographie

- AMÉDÉE-MANESME, C.-O., F. BARTHÉLÉMY et D. KEENAN (2015). “Cornish-Fisher expansion for commercial real estate value at risk”. *The Journal of Real Estate Finance and Economics* 50.4, p. 439-464.
- ANDRÈS, H., P.-E. ARROUY et A. BOUMEZOUED (2021). “A review of the solvency II equity shock”. *milliman.com*.
- AUTORITÉ DE CONTRÔLE PRUDENTIEL ET DE RÉOLUTION (ACPR) (2022). “Le marché de l’assurance-vie en 2021”.
- BOONEN, T. J. (2017). “Solvency II solvency capital requirement for life insurance companies based on expected shortfall”. *European actuarial journal* 7.2, p. 405-434.
- BRACH, L. (2016). “Allocation d’actifs sous contrainte de SCR”. Mém. de mast. Ecole Nationale de la Statistique et de l’Administration Economique (ENSAE), Malakoff.
- CAO, Z., R. D. HARRIS et J. SHEN (2010). “Hedging and value at risk: A semi-parametric approach”. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products* 30.8, p. 780-794.
- CHERNOZHUKOV, V., I. FERNÁNDEZ-VAL et A. GALICHON (2010). “Rearranging edgeworth–cornish–fisher expansions”. *Economic theory* 42.2, p. 419-435.
- Code des assurances* (2001). Dalloz.
- COLLIER, S. (2013). “Modélisation ALM d’un portefeuille de rentes viagères”. Mém. de mast. ISFA, Institut de Sciences Financières et d’Assurances, Lyon.
- CORNISH, E. A. et R. A. FISHER (1938). “Moments and cumulants in the specification of distributions”. *Revue de l’Institut international de Statistique*, p. 307-320.
- EIOPA (2010). “Solvency II Calibration Paper”.
- FAMA, E. F. (1963). “Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis”. *The journal of business* 36.4, p. 420-429.
- FISHER, S. R. A. et E. CORNISH (1960). “The percentile points of distributions having known cumulants”. *Technometrics* 2.2, p. 209-225.

- HALL, P. (2013). *The bootstrap and Edgeworth expansion*. Springer Science & Business Media.
- HOLTON, G. A. (2014). *Value At Risk, Theory and Practices*. T. 2. Glyn A. Holton.
- KIM, Y. S., R. GIACOMETTI, S. T. RACHEV, F. J. FABOZZI et D. MIGNACCA (2012). “Measuring financial risk and portfolio optimization with a non-Gaussian multivariate model”. *Annals of operations research* 201.1, p. 325-343.
- MAILLARD, D. (2018). “A user’s guide to the Cornish Fisher expansion”. *Available at SSRN 1997178*.
- MANDELBROT, B. (1960). “The Pareto-Levy law and the distribution of income”. *International economic review* 1.2, p. 79-106.
- MARKOWITZ, H. M. (1952). *Portfolio Selection*. Journal of Finance, p. 77-99.
- PLANCHET, F. et P.-E. THÉRON (2010). “Allocation d’actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non-vie”. *arXiv preprint arXiv:1001.1867*.
- ROYSTON, P. (1995). “Remark AS R94: A remark on algorithm AS 181: The W-test for normality”. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* 44.4, p. 547-551.
- SHAPIRO, S. S. et M. B. WILK (1965). “An analysis of variance test for normality (complete samples)”. *Biometrika* 52.3/4, p. 591-611.
- SOBOL, I. M. (2001). “Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates”. *Mathematics and computers in simulation* 55.1-3, p. 271-280.
- VILLANI, C (2003). “Topics in optimal transportation, volume 58 of Grad”. *Stud. Math. AMS, Providence* 33.
- VOSE (2017). “Raw moments versus central moments, <https://www.vosesoftware.com/riskwiki/Rawmomentsversuscentralmoments.php>”.
- WILLIOT, É. (2019). *Les grands principes de la comptabilité d’assurance*. L’Argus Éditions.

# Liste des figures

1	Frontière efficiente sous contraintes obtenues dans le cadre de l'optimisation rendement-volatilité . . . . .	8
2	Fonction de répartition et de densité obtenues avec l'approximation de Cornish-Fisher avec une distribution du Khi-deux à 4 degrés de liberté, $\mu = 4 \sigma^2 = 8 S = 1.41 K = 6$ (AMÉDÉE-MANESME et al. (2015)) . . . . .	10
3	Coefficients de <i>kurtosis</i> et de <i>skewness</i> obtenus en fonction de la période considérée . .	11
4	Évolution de la marge financière en fonction de l'horizon de projection et du scénario .	12
5	Évolution de la VM en fonction de l'horizon de projection et du scénario . . . . .	13
6	Efficient frontier under constraints obtained in the context of the return-volatility optimization . . . . .	16
7	Cumulative distribution function and density function obtained with the Cornish-Fisher extension using a Chi-squared distribution with 4 degrees of freedom, $\mu = 4 \sigma^2 = 8 S = 1.41 K = 6$ (AMÉDÉE-MANESME et al. (2015)) . . . . .	17
8	Kurtosis and Skewness coefficient of the <i>EURO STOXX 50</i> index depending on the considered period. . . . .	18
9	Evolution of the financial margin depending on the projection horizon and the scenario	20
10	Evolution of the market value depending on the projection horizon and the scenario .	20
11	Comparaison de la fonction de densité des rendements <i>MSCI World Developed</i> selon le choix de la modélisation (empirique ou hypothèse de normalité). Source : <i>Solvency II Calibration Paper</i> (CEIOPS-SEC-40-10) (2010) . . . . .	23
1.1	Représentation de l'allocation d'actifs de l'ensemble des assureurs français en 2020 (Source : France Assureurs, LES PLACEMENTS DE L'ASSURANCE EN 2020 ) . . .	27
2.1	Représentation de l'allocation d'actifs de l'entité MPH . . . . .	34
2.2	Représentation de l'hyperbole générant la frontière efficiente de marché . . . . .	35
2.3	Représentation du ratio rendement-volatilité optimal sur la frontière efficiente . . . . .	36
2.4	Représentation du portefeuille de variance minimale sur la frontière efficiente . . . . .	37
2.5	Illustration de la capacité de déformation du bilan d'un assureur . . . . .	38

2.6	Frontière efficiente sous contraintes . . . . .	40
2.7	Représentation de l'allocation 'M 1' . . . . .	41
2.8	Représentation de l'allocation 'M 2' . . . . .	41
2.9	Représentation de l'allocation 'M 3' . . . . .	42
3.1	Représentation du domaine de validité de l'approximation de Cornish-Fisher . . . . .	50
3.2	Fonction de répartition et densité obtenues avec l'approximation de Cornish-Fisher avec une distribution du Khi-deux à 4 degrés de liberté, $\mu = 4$ $\sigma^2 = 8$ $S = 1.41$ $K = 6$ (AMÉDÉE-MANESME et al. (2015)) . . . . .	51
3.3	Zoom sur la queue de distribution de la fonction de répartition empirique des rendements annuels de l'indice S&P500 . . . . .	52
3.4	Coefficients de <i>kurtosis</i> et de <i>skewness</i> obtenus en fonction de la période considérée . . . . .	53
3.5	Représentation des couples <i>Skewness</i> et <i>Kurtosis</i> des moyennes empiriques standardisées . . . . .	54
3.6	Comparaisons des fonctions quantiles obtenues par l'approximation de Cornish-Fisher pour $n = 4$ , $n = 8$ , $n = 16$ et $n = 32$ . . . . .	55
3.7	Indices de Sobol de l'influence de la proportion des classes d'actifs sur la VaR à 99.5% . . . . .	57
3.8	Représentation 3D des estimations des quantiles par Cornish-Fisher en fonction d'une probabilité de survie et de la part de <i>PRIVATE EQUITY</i> (PE) dans l'allocation . . . . .	58
3.9	Représentation 3D des estimations des quantiles par Cornish-Fisher en fonction d'une probabilité de survie et de la part d'obligations gouvernementales dans l'allocation . . . . .	59
3.10	Représentation de la fonction quantile des gains de l'allocation actuelle . . . . .	60
3.11	Poids alloués pour chaque classe d'actifs dans l'allocation 'CF 1' . . . . .	61
3.12	Comparaison des fonctions de répartition de l'allocation initiale avec celle de l'allocation 'CF 1' . . . . .	62
3.13	Poids alloués pour chaque classe d'actifs dans l'allocation 'CF 2' . . . . .	62
3.14	Comparaison des fonctions de répartition de l'allocation initiale avec celle de l'allocation 'CF 2' . . . . .	63
3.15	Poids alloués pour chaque classe d'actifs dans l'allocation 'CF 3' . . . . .	64
3.16	Comparaison des fonctions de répartition de l'allocation initiale avec celle de l'allocation 'CF 3' . . . . .	65
4.1	Représentation schématique du fonctionnement du modèle ALM . . . . .	67
4.2	Représentation de la valeur de marché d'un actif jusqu'à sa maturité. . . . .	69
4.3	Exemples de TRC obtenus lors de l'utilisation du modèle ALM. Les barres verticales représentent l'ensemble des valeurs possibles. . . . .	75

5.1	Évolution de la marge financière en fonction de l'horizon de projection et du scénario .	78
5.2	Évolution du TRC en fonction de l'horizon de projection et du scénario . . . . .	79
5.3	Évolution de la VM en fonction de l'horizon de projection et du scénario . . . . .	79
5.4	Évolution de la PB en fonction de l'horizon de projection et du scénario . . . . .	80



# Liste des tableaux

1	Comparaison des RMSE avec et sans réarrangement . . . . .	10
2	Récapitulatif des allocations retenues . . . . .	12
3	Comparison of RMSE with and without réarrangement . . . . .	18
4	Summary of the chosen allocations . . . . .	20
2.1	Correspondance entre les classes d’actifs et leur index dans la modélisation . . . . .	33
2.2	Présentation des données utilisées pour l’optimisation dans le cadre rendement-volatilité	34
2.3	Matrice de corrélation utilisée pour l’optimisation . . . . .	35
2.4	Impact d’un choc simultané sur les rendements espérés des classes d’actifs <i>PRIVATE EQUITY</i> et <i>ACTION</i> . . . . .	43
2.5	Impact sur l’allocation d’un choc sur les rendements espérés de la classe ‘GOV’ . . . . .	44
2.6	Impact sur l’allocation d’un choc sur volatilité de la classe d’actifs ‘GOV’ . . . . .	44
3.1	<i>p-value</i> et statistique du test de Shapiro-Wilk pour chacune des classes d’actifs . . . . .	47
3.2	Comparaison des RMSE avec et sans réarrangement . . . . .	56
3.3	Représentation des chocs à 99.5% en fonction de la composition de l’allocation . . . . .	59
3.4	Allocation du portefeuille en fonction du choc sur le rendement des classes ‘ACTION’ et ‘ <i>PRIVATE EQUITY</i> ’ . . . . .	64
3.5	Allocation du portefeuille en fonction du choc sur le rendement de la classe ‘GOV’ . . . . .	65
5.1	Récapitulatif des allocations retenues . . . . .	77