

**Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris  
pour l'admission à l'Institut des Actuaire le 10/03/2023**

Par : **Adrien Benchaouine**

Titre : **Etudes des contrats de réassurances Facultatifs**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

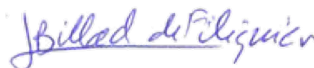
*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de la filière*

*Entreprise : AXA S.A.*

*Nom : Baradel Nicolas*

*Signature :*

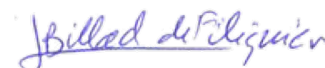


*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaire*

*Directeur du mémoire en entreprise :*

*Nom : David Billod de Filiquier*

*Signature :*

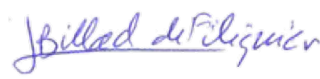


**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels**

*(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)*

*Signature du responsable entreprise*

Secrétariat :



Bibliothèque :

Signature du candidat



# Remerciements

Je souhaite remercier en premier mon tuteur et manager David Billod de Filiquier pour sa disponibilité, ses conseils et son aide dans la rédaction de ce mémoire. Je le remercie d'autant plus qu'il a accepté de superviser ce mémoire dans le cadre de mon CDI et non d'un stage de fin d'étude.

Je remercie toutes les personnes au sein d'AGRe et AXA SA qui m'ont aidé à la compréhension du monde de la réassurance. Mes pensées vont en particulier à Thierry Dubocage responsable du group security comittee qui m'a aiguillé sur la compréhension des enjeux métiers du risque de contrepartie.

De plus, je remercie toutes les personnes qui ont pris part à la rédaction de ce mémoire ainsi qu'à sa relecture. Je pense à l'ensemble de l'équipe pédagogique de l'ENSAE et en particulier à Nicolas Baradel mon tuteur de stage. Je remercie aussi Émilie, une amie chère, qui m'a épaulé pour la relecture et la mise en page de ce mémoire.

Enfin je remercie famille et amis de m'avoir soutenu et encourager dans la rédaction de ce mémoire. Je pense en particulier à mes parents, mon frère et mes grand parents ainsi qu'à mes amis Michael, Alvin, Téva, Gabriel, Axel, Julie, Caroline, Pauline, Corentin, Clément, Nolwenn, Albane, Manon et Maël.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Note de synthèse</b>	<b>I</b>
<b>Executive summary</b>	<b>VIII</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation du monde de la réassurance</b>	<b>3</b>
1.1 Rappel sur la norme solvabilité 2 . . . . .	3
1.1.1 Les 3 piliers de solvabilité 2 . . . . .	3
1.2 Définitions relatives à la réassurance . . . . .	5
1.2.1 Pourquoi la réassurance ? . . . . .	5
1.2.2 Les différents contrats de réassurance . . . . .	6
1.2.3 Les types de contrats . . . . .	7
1.3 Les principaux acteurs du marché de la réassurance . . . . .	10
<b>2 Modélisation des expositions pour les facultatives</b>	<b>12</b>
2.1 Définition de l'exposition chez AXA SA . . . . .	12
2.2 Modélisation des Facultatives . . . . .	14
2.2.1 Modélisation des quote-parts . . . . .	15
2.2.2 Modélisation des excédents de sinistres . . . . .	18
2.2.3 Calcul du bi-centenaire a priori . . . . .	21
2.3 Etude de la base de données . . . . .	27
2.3.1 Présentation de la base de données . . . . .	27
2.3.2 Statistiques Descriptives . . . . .	28
2.4 Modifications de la BDD . . . . .	36
2.5 Résultats . . . . .	38

<b>3</b>	<b>Modélisation des récupérations des Facultatifs corrélées</b>	<b>40</b>
3.1	Les copules . . . . .	40
3.2	Réduction de la dimension du problème . . . . .	43
3.2.1	Algorithme de réduction des BDDs. . . . .	44
3.2.2	Utilisation de la copule pour obtenir la corrélation . . . . .	49
3.3	Résultats . . . . .	51
3.3.1	Le cas du réassureur 13 . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Exposition des contrats passés</b>	<b>58</b>
4.1	Présentation de l'exposition Run-Off . . . . .	58
4.2	Création et relâchement du RO . . . . .	59
4.2.1	Présentation des cas simples . . . . .	59
4.2.2	Sensibilité sur les cas simples . . . . .	63
4.3	Vue globale de l'exposition du groupe AXA envers ses réassureurs . . . . .	69
4.3.1	Récapitulation de l'exposition totale envers un réassureur . . . . .	69
4.3.2	Mécanisme de diminution de l'exposition . . . . .	70
	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>
	<b>Annexes</b>	<b>74</b>

# Résumé

**Mots-clés :** Risque de contrepartie, Réassurance facultative, Corrélation, Solvabilité 2, Expositions

Axa Global Re (AGRe) était l'entité du groupe AXA qui couvre les opérations de réassurance du groupe. Récemment cette entité a fusionné avec AXA SA qui est à présent la Holding mais aussi le réassureur interne du groupe. Ainsi, AXA SA est l'entité du groupe la plus exposée au risque de contrepartie, son suivi, et en particulier celui envers les réassureurs, est donc essentiel.

La norme Solvabilité 2 implique un suivi de chaque risque encouru par les sociétés d'assurance, notamment le risque de contrepartie. C'est dans ce cadre qu'AXA a développé le modèle interne du risque de contrepartie envers les réassureurs. Dans ce modèle interne, le calcul du SCR va en particulier dépendre de l'évolution du rating des réassureurs et de l'exposition d'AXA SA envers ces réassureurs. On s'intéresse dans ce mémoire à cette composante du modèle.

L'exposition d'AXA SA envers ses réassureurs externes au groupe peut se scinder en deux parties : les réserves présentes dans les comptes ainsi que la modélisation des récupérations des contrats en vigueur pendant l'année. Ce mémoire se concentre sur le calcul de l'exposition créée par des contrats de réassurances facultatives. Le modèle actuel ne prenant pas en compte la corrélation entre facultatives, on se propose donc d'étudier l'impact de corrélation au sein du modèle à l'aide d'une méthode de copules. L'exposition créée par les contrats en vigueur pendant l'année se transforme ensuite en provisions cédées. Nous étudierons à la fin de ce mémoire la façon dont se créent et se relâchent ces réserves liées à la nouvelle souscription.

# Abstract

**Keywords :** Counterparty risk, Facultative reinsurance, Correlation, Solvability 2, Expositions

Axa Global Re (AGRe) was the entity of the AXA Group that covered the Group's reinsurance operations. Recently, this entity merged with AXA SA, which is now not only the holding company but also the Group's internal reinsurer. Thus, AXA SA is the Group entity most exposed to counterparty risk and is responsible for its monitoring. In particular, the counterparty risk that involves the reinsurers of the group AXA.

The Solvency 2 standard requires monitoring of each risk incurred by insurance companies, particularly counterparty risk. It is within this framework that AXA has developed the internal model for counterparty risk towards reinsurers. In this internal model, the calculation of the SCR will depend in particular on the evolution of the rating of the reinsurers and the exposure of AXA SA to these reinsurers. This paper focuses on this component of the model.

The exposure of AXA SA to its reinsurers outside the group can be split into two parts : the reserves present in the accounts and the modelling of recoveries from contracts in force during the year. This paper focuses on the calculation of the exposure created by facultative reinsurance contracts. The current model does not take into account the correlation between facultatives, so it is proposed to study the impact of correlation within the model using a copula method. The exposure created by the contracts in force during the year is then transformed into ceded reserves. At the end of this paper we will study how these reserves related to new underwriting are created and released.

# Note de synthèse

Le groupe AXA est scindé en plusieurs entités et parmi elles, Axa Global Re (AGRe) est responsable des opérations de réassurance de toutes les autres entités du groupe. Depuis juillet 2022, AGRe a fusionné avec la holding du groupe : AXA SA. Ainsi, AXA SA est à la fois la holding et le réassureur interne du groupe. AXA SA rassemble la majorité du business de réassurance du groupe AXA, elle est donc l'entité la plus exposée aux risques de contrepartie des réassureurs. Ce risque est complexe à étudier car le monde de la réassurance n'est pas très vaste et reste concentré sur plusieurs acteurs clefs du marché. Ce mémoire étudie l'exposition aux réassureurs du groupe AXA. Cette exposition se calcule sur la base de deux indicateurs : l'un correspond à une exposition des contrats en cours et l'autre correspond à des provisions se trouvant dans le bilan du groupe. Ce mémoire propose une étude précise de la modélisation des contrats de réassurance facultative dans le cadre des contrats en cours ainsi qu'à l'ajout de corrélation au sein de cette modélisation qui est aujourd'hui réalisée de manière indépendante. Ce mémoire présente finalement de manière simplifiée l'exposition présente dans le bilan sous forme de provisions cédées aux réassureurs.

## L'exposition aux réassureurs chez AXA

Les contrats de réassurance sont classifiés en deux catégories : les contrats de réassurance obligatoire, aussi appelés traités, et les contrats de réassurance facultative, aussi appelés FACS. Ce mémoire étudie les FACS. Dans cette forme de réassurance, l'assureur choisit précisément un risque à réassurer partiellement ou totalement avec les caractéristiques qu'il souhaite.

Chez AXA SA l'exposition crédit envers les réassureurs se résume au risque de contrepartie en réassurance. En effet, le groupe AXA n'autorise aucune de ses entités, dont AXA SA, à détenir des actifs financiers de réassureurs envers lesquels le groupe possède une exposition. Les cessions du groupe vers le marché de la réassurance suivent pour la plupart le schéma suivant :

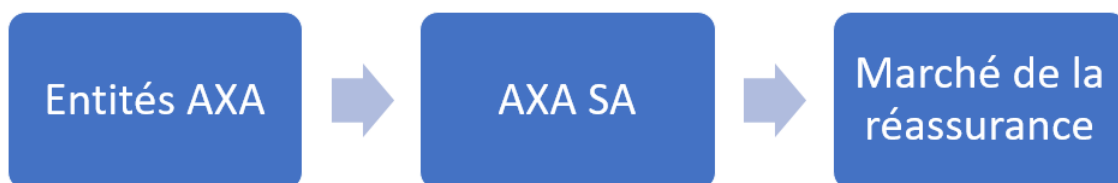


FIGURE 1 – Schéma de cessions au sein du groupe AXA

Le schéma ci-dessus représente la majorité des cessions au sein du groupe AXA. Néanmoins, il existe des cessions directes des entités AXA vers le marché de la réassurance. C'est en particulier le cas pour toutes les facultatives des entités AXA ainsi que certains traités.

Dans la suite, nous étudierons les contrats de réassurances facultatives. Ces contrats peuvent être de deux types, des quote-parts ou des excédents de sinistre. L'indicateur d'exposition pour les contrats en vigueur est un quantile 99,5% (ou bi-centenaire) de récupérations calculé sur 50000 simulations de récupération.

### Les quote-parts ou QP

Une quote-part est un contrat caractérisé par une répartition des sinistres entre assureur et réassureurs. Si un assureur cède 50% de son portefeuille à un réassureur alors le réassureur doit assumer 50% des sinistres du portefeuille. En échange, l'assureur transmet 50% de la prime du portefeuille au réassureur.

On note  $S$  les récupérations des traités QP et  $P$  leur primes associées. La modélisation des QPs se base alors sur les hypothèses suivantes :

1. On suppose que la distribution de  $\frac{S}{P}$  suit une loi Lognormale. Ainsi on peut noter :

$$\text{Log}\left(\frac{S}{P}\right) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (1)$$

On suppose aussi  $\sigma > 0$ .

2. On suppose que l'espérance des récupérations est égale à la valeur des primes. Ainsi on peut écrire :

$$\mathbb{E}(S) = P \quad (2)$$

3. On suppose que la value at risk 99.5% est une perte égale à deux fois la prime. Ainsi on a :

$$\mathbb{P}(S > 2P) = 0.5\% \quad (3)$$

Ces hypothèses mènent à deux résultats possibles quant à la valeur de  $\sigma$  et  $\mu$ . L'une des solutions ne donne pas une distribution adaptée à notre problème. La solution retenue est la suivante :

$$\begin{cases} \sigma = 0.285 \\ \mu = -0.04 \end{cases}$$

On peut ainsi représenter la loi résultante :

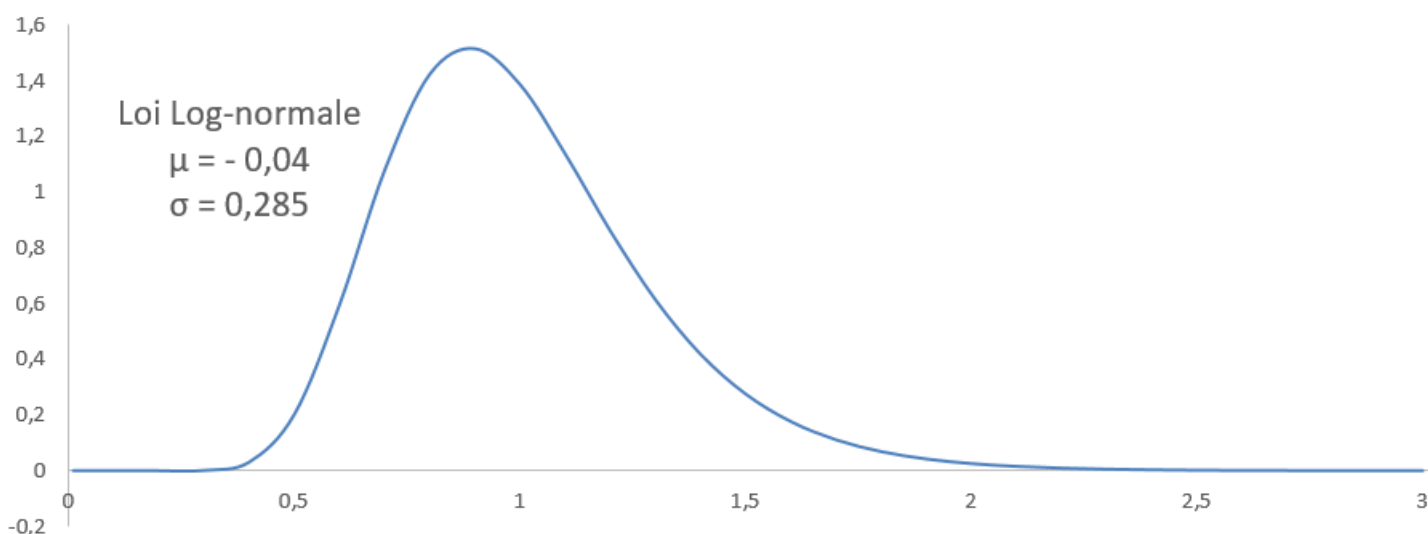


FIGURE 2 – Loi Log-normale avec  $\sigma$  et  $\mu$



## Les excédents de sinistres ou XS

Les excédents de sinistre sont des contrats qui prennent en charge un sinistre au dessus d'une certaine franchise, jusqu'à une certaine limite. Une tranche de réassurance est donc caractérisé par sa rétention et sa limite. La perte au sein d'une tranche peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$Loss(NbOcc) = Limite * NbOcc$$

Avec NbOcc, le nombre de fois où la tranche est consommée durant une année. A noter que NbOcc n'est pas forcément un entier comme une tranche peut ne pas être consommée à 100% lorsqu'elle est touchée.

De nombreuses hypothèses sont nécessaires à la modélisation des excédents de sinistres. Néanmoins, dans le cadre des facultatives, les XS ne possèdent qu'une seule tranche. Ainsi, le modèle se simplifie grandement. Les hypothèses sont les suivantes :

1. On suppose un loss ratio de la tranche égal à 1.
2. On note  $NbTot$  la fréquence moyenne générée des sinistres de la tranche. On suppose que  $NbTot$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$
3. Les sinistres qui touchent la tranche suivent une loi de sévérité uniforme sur la tranche.

Ces hypothèses mènent à la modélisation suivante :

$$Pertes = \sum_{k=1}^{NbTot} \mathcal{U}[0, 1] * Limite \text{ où } NbTot \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ avec } \lambda = 2 * LR * \frac{Primes}{Limite} = 2 * RoL$$

## Méthodologie et base de donnée

La modélisation se base sur une base de donnée (BDD) interne d'AXA SA de cessions de facultatives de toutes les entités du groupe.

### La base de donnée

La base de données utilisée est une base de données interne au groupe AXA. C'est une base de données déclarative, c'est-à-dire que chaque entité du groupe AXA reporte elle-même ses facultatives dans l'outil de reporting. Les équipes d'AXA SA ne font qu'en extraire les données depuis cet outil. Cette méthode de reporting possède des avantages et des inconvénients. D'une part, les entités sont les plus à même de connaître l'entièreté de leurs facultatives. Ainsi on peut s'attendre à avoir une BDD complète et précise des facultatives du groupe. Néanmoins, il reste possible qu'il y ait des erreurs de saisie de données de la part des entités. Il est de la responsabilité d'une équipe, le group security comittee (GSC) de vérifier qu'il n'y a pas de valeurs aberrantes dans les données qui peuvent fausser le calcul du SCR et de l'exposition aux réassureurs. Il est important de comprendre que, chez AXA SA, les contrats de chaque FAC ne sont pas disponibles, seule cette BDD l'est. Ainsi, une FAC peut être mal saisie dans l'outil, mais si les informations restent vraisemblables il est très difficile de déceler une erreur. La BDD peut nous fournir les informations nécessaires aux modélisations présentées précédemment, en particulier : la prime, la limite, le type de contrat, la ligne de business (LoB), sa durée de validité ainsi que la cédante et le réassureur de la FAC. De plus une fac n'est pas forcément cédée à 100%, ainsi la BDD possède l'information du taux de cession de la facultative. La base de donnée est composée de 20 758 FACs réparties sur 15 LoBs et 25 entités AXA.

Dans le but de limiter les valeurs aberrantes de la BDD, on applique un critère de suppression sur les queues de distribution des primes. Le but est de supprimer les FACs ayant des primes inférieures au quantile 1% et supérieures au quantile 99%. Cette méthode permet de filtrer les primes grossièrement fausses.

Avec cette BDD, on peut réaliser la modélisation indépendante des facultatives. A présent, on se doit de présenter la méthode qui va permettre de les corrélérer entre elles, les copules.

### Les copules

Il existe de nombreux types de copules, on souhaite utiliser une copule particulière : la copule gaussienne. cette copule permet de fixer simplement une matrice de corrélation entre facultatives. Pour définir la copule, nous avons besoin des deux définitions, celle de la fonction de répartition de la loi normale centrée ainsi que celle de la distribution du vecteur gaussien. La distribution est donnée en dimension deux pour plus de lisibilité :

$$\text{Fonction de répartition : } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$\text{Vecteur gaussien : } \Phi_{\rho}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$$

On peut à présent définir la fonction C qui est la copule gaussienne :

$$C(u, v) = \Phi_{\rho}(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$$

Les copules possèdent de nombreuses propriétés mathématiques intéressante, en particulier le théorème de Sklar.

#### Théorème de Sklar

Soit  $F_1, \dots, F_d$  d fonctions de répartition de  $\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ . On note  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$  l'ensemble des fonctions de répartition de  $\mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$  dont les marginales sont exactement  $F_1, \dots, F_d$ .

Si C est une copule alors pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  :

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

est une fonction de répartition de  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ .

Ce théorème permet l'utilisation de copules comme «fonctions de dépendance». En effet, la connaissance des marginales  $(F_1, \dots, F_d)$  et d'une fonction de copule C de manière séparée est suffisant pour trouver une fonction de répartition de  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ . On est alors libre du choix de la fonction C tant que celle-ci est une copule.

On rappelle que la BDD comporte 20 758 FACs, ainsi dans notre cas  $d = 20\,758$ . On se heurte à une problématique informatique de modélisation, la BDD est trop volumineuse pour que l'on puisse corrélérer toutes les FACs entre elles. On se propose de les corrélérer à la maille (Entité AXA, LoB) pour avoir des bases de données beaucoup moins volumineuses. L'idée est de vouloir scinder le problème en sous problème. Il existe 160 mailles (Entité, LoB). Néanmoins, il subsiste des cas où le nombre de FAC est toujours trop élevé. Par exemple la maille (Axa Turkey, Transport and marine) possède plus de 4 000 FACs. Ainsi, pour ces bases de données toujours trop volumineuses, l'accent est mit sur la corrélation des FACs ayant le bi-centenaire les plus élevés.

## Résultats

Ci-dessous un graphique qui résume les résultats avant et après corrélation des valeurs de bi-centenaire des récupérations du top 20 des réassureurs :

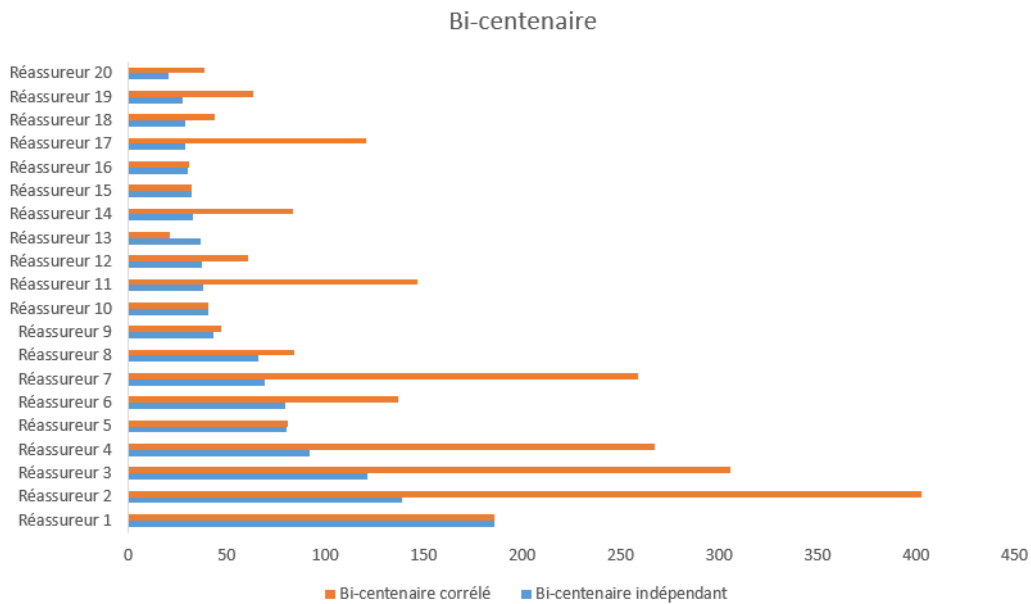
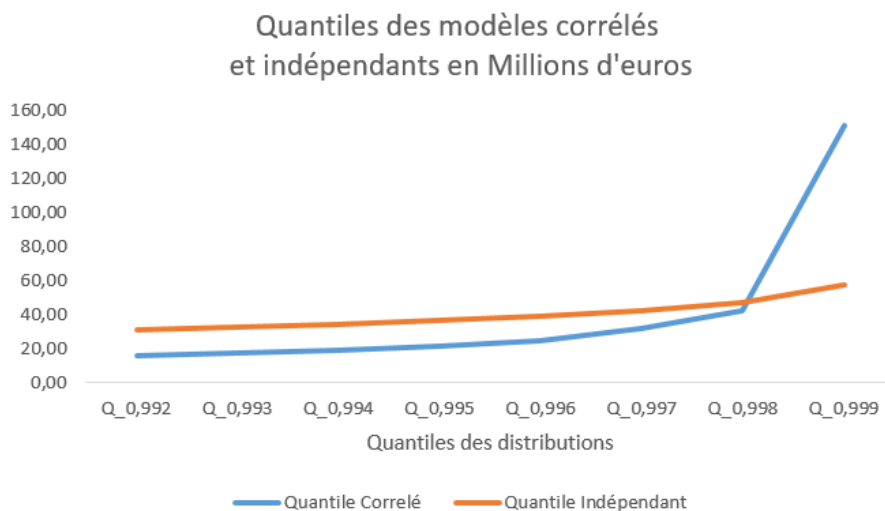


FIGURE 3 – Bi-centenaire pré et post corrélation (l'échelle horizontale est en millions d'euros)

On peut distinguer les réassureurs en trois catégories en fonction de l'impact de la corrélation sur leur bi-centenaire : les réassureurs dont l'exposition a augmentée, stagnée ou diminuée. Pour la plupart, l'exposition augmente et c'est le résultat intuitif que l'on pouvait prévoir. Les réassureurs dont le bi-centenaire stagne correspondent à des réassureurs qui ont des FACs prépondérantes dans plusieurs mailles différentes. Dans ces cas, la corrélation au sein des mailles a peu d'impact et aucune corrélation inter-LoB n'est ajoutée donc le résultat final est sensiblement le même. Les réassureurs dont le bi-centenaire diminue est la catégorie la moins intuitive. C'est un effet qui est du à la forme des distributions des XS. En effet, la corrélation trop forte entre les facultatives peut parfois mener à une augmentation forte des quantiles plus extrêmes que le 99,5% mais une diminution du quantile 99,5%. Ci-dessous un graphique représentant l'évolution de la valeur des quantiles extrêmes du réassureur 13 :



## Expositions des contrats passés

Cette partie correspond à l'étude simplifiée des provisions présent dans le bilan du groupe. Il s'agit d'expliquer comment la charge ultime d'un contrat se crée et se relâche au fil des années. Cette modélisation a besoin d'une information sur la prime du contrat, d'une hypothèse de loss ratio ainsi que d'une information de LoB du contrat pour lui affecter un payment pattern. Le payment pattern est un reflet mathématique d'un rythme comptable de règlement de sinistre. Pour la présentation on utilise un payment pattern cumulé de 4 ans, il se présente comme suit :

	$PP_1$	$PP_2$	$PP_3$	$PP_4$
Payment Pattern	15%	65%	75%	100%

TABLE 1 – Payment pattern cumulé de 4 ans.

On peut lire que au bout de trois ans, 75% de la sinistralité à l'ultime sera payée.

Les modélisations se basent sur l'hypothèse que la première année du contrat crée une charge à l'ultime d'un montant de  $LR * Prime$ . Ce montant devient l'exposition de début de la première année. Cette exposition est ensuite détruite en suivant les cash-flows du payment pattern. Les calculs sont réalisés avec  $LR = 1$  pour plus de lisibilité. On note  $Expo_{C_X}^Y$  l'exposition du contrat C signé l'année X à la fin de l'année Y. On présente trois cas dans ce mémoire, on montre ici les deux principaux :

### Cas n°1 : Un contrat non renouvelé

	$Expo_C^X$	$Expo_C^{X+1}$	$Expo_C^{X+2}$	$Expo_C^{X+3}$	$Expo_C^{X+4}$
Exposition	$P * (1 - PP_1)$	$P * (1 - PP_2)$	$P * (1 - PP_3)$	$P * (1 - PP_4) = 0$	$P * (1 - PP_5) = 0$

TABLE 2 – Exposition à travers les années envers le réassureur.

Réalisé avec un payment pattern de 4 années.

### Cas n°2 : Un contrat renouvelé

Ce cas est une généralisation du cas précédant où le même contrat est renouvelé chaque année. Il montre une stratification des réserves. En effet, l'exposition d'une année correspond à la somme d'une colonne. Ainsi, l'exposition totale est constituée d'exposition de contrats plus ou moins vieux. Voici un graphique qui illustre la stratification des réserves :

Year	X	X+1	X+2	X+3	X+4	X+5	X+6	X+7
$C_X$	$Expo_{C_X}^X$	$Expo_{C_X}^{X+1}$	$Expo_{C_X}^{X+2}$	0	0	0	0	0
$C_{X+1}$	0	$Expo_{C_{X+1}}^{X+1}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+3}$	0	0	0	0
$C_{X+2}$	0	0	$Expo_{C_{X+2}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+4}$	0	0	0
$C_{X+3}$	0	0	0	$Expo_{C_{X+3}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+5}$	0	0
$C_{X+4}$	0	0	0	0	$Expo_{C_{X+4}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+5}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+6}$	0

TABLE 3 – Stratification des réserves.

Il est possible sur le cas n°2 de réaliser des sensibilités : à la prime, au LR ainsi qu'au payment pattern. Ces sensibilités permettent d'étudier en particulier l'effet sur les réserves de l'inflation, d'un litige de paiements ou d'un provisionnement prudent.

Ce mémoire a donc présenté dans sa globalité la mesure de l'exposition au sein du groupe AXA. Le group AXA suit deux indicateurs : l' $Exp_{UW}$  qui est l'exposition des contrats toujours en vigueur ainsi que l' $Exp_{RO}$  qui est l'exposition présent au bilan. Néanmoins ce mémoire n'évoque pas la partie sur la réassurance obligatoire, on a en réalité :

$$Exp_{RO} = Exp_{RO}^{Facultatives} + Exp_{RO}^{Traites}$$

$$Exp_{UW} = Quantile_{0,995}(Strip^{Facultatives} + Strip^{Traites})$$

Néanmoins, l'exposition finale n'est pas la simple addition des deux indicateurs ci-dessus pour plusieurs raisons :

1. Le règlement ds provisions correspondent à des règlements futurs qui entreront dans la détermination de l'impôt sur les sociétés payé par le groupe. Ainsi l'exposition est diminuée de ces taxes. On note les taxes  $tx_{taxe}^{RO}$  et  $tx_{taxe}^{UW}$ .
2. En cas de défaut, le groupe AXA considère qu'un réassureur pourra tout de même payer une partie de ses dettes. On note la fraction qu'il pourra payer  $RR$  pour « recovery rate ».
3. Sur certaines de leurs provisions, les entités AXA possèdent parfois du collatéral. Les collatéraux sont des ensembles d'actifs financiers qui viennent diminuer la valeur de l'exposition. En cas de défaut du réassureur, l'entièreté du collatéral revient de droit à la cédante pour combler une partie de ses pertes. Le collatéral est principalement utilisé pour l'exposition du bilan mais il est possible d'en avoir sur certaines expositions UW. On note  $Collat_{RO}$  et  $Collat_{UW}$ .les collatéraux respectifs de chaque indicateur.

Ainsi le calcul de l'exposition finale du groupe AXA envers ses réassureurs se calcul de la manière suivante :

$$Exp_{Totale} = ((Exp_{RO} - Collat_{RO}) * (1 - tx_{taxe}^{RO}) + (Exp_{UW} - Collat_{UW}) * (1 - tx_{taxe}^{UW})) * (1 - RR)$$

# Executive summary

The AXA Group is divided into several entities and among them, Axa Global Re (AGRe) is responsible for the reinsurance operations of all the other Group entities. Since July 2022, AGRe has been merged with the Group's holding company : AXA SA. Thus, AXA SA is both the holding company and the internal reinsurer of the group. That's why, AXA SA gathers the majority of the AXA Group's reinsurance business and is therefore the entity most exposed to the counterparty risks of the reinsurers. This risk is complex to study because the reinsurance world is not very large and remains concentrated on several key players in the market. This thesis studies the AXA Group's exposure to reinsurers. This exposure is calculated on the basis of two indicators : one corresponds to the exposure of current contracts and the other corresponds to the provisions found in the Group's balance sheet. This paper proposes a detailed study of the modelling of facultative reinsurance contracts within the framework of current contracts as well as the addition of correlation within this modelling which is currently carried out independently. Finally, this paper presents in a simplified manner the exposure present in the balance sheet in the form of provisions ceded to reinsurers.

## AXA's definition of exposition

Reinsurance contracts are classified into two categories : obligatory reinsurance contracts, also called treaties, and facultative reinsurance contracts, also called FACs. This brief examines FACS. In this form of reinsurance, the insurer chooses precisely a risk to be reinsured partially or totally with the characteristics it wants.

At AXA SA, the credit exposure to reinsurers is limited to the reinsurance counterparty risk. The AXA Group does not authorise any of its entities, AXA SA included, to hold financial assets of reinsurers to which the Group has an exposure. The Group's cessions to the reinsurance market mostly follow this pattern :



FIGURE 4 – Group AXA cessions

The above diagram represents the majority of cessions within the AXA Group. However, there are direct cessions from AXA entities to the reinsurance market. This is particularly the case for all AXA entities' facultative business as well as certain treaties.

In the following, we will study facultative reinsurance contracts. These contracts can be of two types, quota share or excess of loss. The exposure indicator for in-force contracts is a 99.5% quantile (or bi-centennial) of recoveries calculated on 50,000 recovery simulations.

### The quota-shares or QS

A quota share is a contrat that consists in an allocation of claims between an insurer and one or several reinsurers. If an insurer cedes 50% of its portfolio to a reinsurer, then the reinsurer must assume 50% of the portfolio's claims. In exchange, the insurer passes on 50% of the portfolio premium to the reinsurer.

Let  $S$  be the recoveries from the QP treaties and  $P$  the associated premiums. The modelling of the QPs is then based on the following assumptions :

1. It is assumed that the distribution of  $\frac{S}{P}$  follows a Lognormal distribution. Thus we can note :

$$\text{Log}\left(\frac{S}{P}\right) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (4)$$

We also assume that  $\sigma > 0$ .

2. It is assumed that the expectation of recoveries is equal to the value of premiums. Thus we can write :

$$\mathbb{E}(S) = P \quad (5)$$

3. It is assumed that the value at risk 99.5 % is a loss equal to twice the premium. Thus we have :

$$\mathbb{P}(S > 2P) = 0.5\% \quad (6)$$

These assumptions lead to two possible results for the value of *sigma* and *mu*. One of the solutions does not give a distribution adapted to our problem. The chosen solution is the following :

$$\begin{cases} \sigma = 0.285 \\ \mu = -0.04 \end{cases}$$

The resulting law can thus be represented as follows :

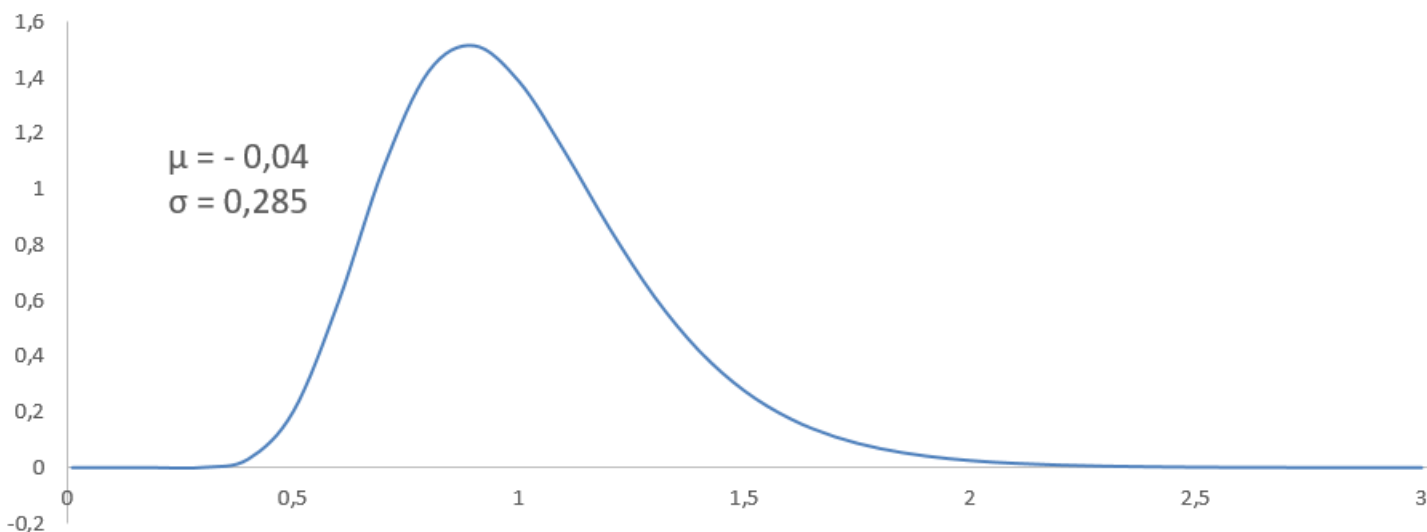


FIGURE 5 – Log-normal law with  $\sigma$  and  $\mu$

## The excess of loss or XL

Excess claims are contracts that cover a claim above a certain deductible, but below a certain limit. The difference between the limit and the deductible is called a layer. The loss within a layer should be calculated using the following formula :

$$Loss(NbOcc) = Limit * NbOcc$$

With NbOcc, the number of times the layer is consumed during a year. Note that NbOcc is not necessarily an integer as a layer may not be consumed at 100 % when it is reached.

Many assumptions are required to model the excess of loss contracts. However, in the case of facultatives, an XS have only one layer. Thus, the model is greatly simplified. The assumptions are as follows :

1. A loss ratio of 1 is assumed for the layer.
2. Let us note  $NbTot$  the average frequency generated by the claims of the layer. It is assumed that  $NbTot$  follows a Poisson distribution. Let  $\lambda$  be the parameter.
3. The losses that attach the layer follow a uniform law across the layer.

These assumptions lead to the following model :

$$Loss = \sum_{k=1}^{NbTot} \mathcal{U}[0, 1] * Limit \text{ where } NbTot \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ with } \lambda = 2 * LR * \frac{Premium}{Limit} = 2 * RoL$$

## Methodology and input data

The modelling is based on an internal AXA SA database of facultative cessions from all group entities.

### Input Data

The database used is an internal AXA Group database. It is a declarative database, meaning that each AXA Group entity reports its own data in the reporting tool. The AXA SA teams simply extract the data from this tool. This reporting method has both advantages and disadvantages. On the one hand, the entities are in the best position to know all of their facultatives. Thus one can expect to have a complete and accurate database of the group's facultatives. Nevertheless, it remains possible that there are data entry errors from the entities. It is the responsibility of a team, the group security committee (GSC), to check that there are no outliers in the data that may distort the calculation of the SCR and the exposure to reinsurers. It is important to understand that, at AXA SA, the contracts of each FAC are not available, only this database is. Thus, a FAC may be incorrectly entered into the tool, but if the information remains plausible it is very difficult to conclude that there is an error. The database can provide us with the information needed for the modelling presented above, in particular : the premium, the limit, the type of contract, the line of business (LoB), its validity period as well as the cedant and the reinsurer of the FAC. Moreover, a facultative is not necessarily ceded to 100 %, so the DB has information on the cession rate of the facultative. The database is composed of 20,758 FACs spread over 15 LoBs and 25 AXA entities.



In order to limit the outliers in the database, a suppression criteria is applied on the premium distribution tails. The aim is to remove the FACs with premiums lower than the 1% quantile and higher than the 99% quantile. This method makes it possible to filter out the grossly false premiums.

With this database, we can carry out the independent modelling of the facultatives. Now, we have to present the method that will allow us to correlate them together, the copulas.

## Copulas

There are many types of copulas, we want to use a particular one : the Gaussian copula. This copula is used because we can use a correlation matrix to compute it. To define it, we need both definitions, that of the distribution function of the centred normal distribution and that of the distribution of the Gaussian vector. The distribution is given in dimension two for readability :

$$\text{Distribution function : } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$\text{Gaussian vector : } \Phi_{\rho}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$$

We can now define the function C which is the Gaussian copula :

$$C(u, v) = \Phi_{\rho}(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$$

Copulas have many interesting mathematical properties, in particular Sklar's theorem.

### Sklar Theorem

Let  $F_1, \dots, F_d$  be  $d$  distribution functions of  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Let  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$  be the set of distribution functions of  $\mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  whose marginals are exactly  $F_1, \dots, F_d$ .

If C is a copula then for all  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  :

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

is a distribution function of  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ .

This theorem allows the use of copulas as "dependence functions". Indeed, the knowledge of the marginals  $(F_1, \dots, F_d)$  and of a copula function C separately is sufficient to find a distribution function of  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ . We are then free to choose the function C as long as it is a copula.

We recall that the database contains 20 758 FACs, so in our case  $d = 20 758$ . We come up against a computer modelling problem : the database is too large for us to correlate all the FACs with each other. We propose to correlate them at the mesh level (AXA Entity, LoB) to have much smaller databases. The idea is to transform the problem into several smaller ones. To be precise there is around 160 smaller databases. Nevertheless, there are still cases where the number of FACs is too high. For example, the mesh (Axa Turkey, Transport and marine) has more than 4,000 FACs. Thus, for these databases that are still too large, the focus is on correlating the highest bi-centennial FACs.

## Results

Below is a graph summarising the results before and after correlation of the bi-centennial recovery values of the top 20 reinsurers :

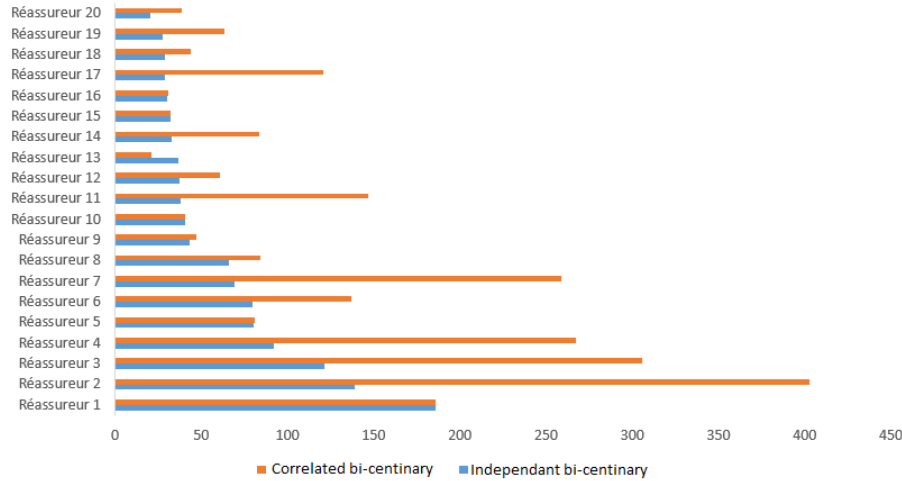


FIGURE 6 – Bi-centenary before and after correlation. Horizontal scale is in millions of euros.

Reinsurers can be divided into three categories according to the impact of the correlation on their bi-centennial : reinsurers whose exposure has increased, stagnated or decreased. For most, exposure is increasing and this is the intuitive result that could be expected. Reinsurers with stagnant bi-centennial correspond to reinsurers that have dominant FACs in several different meshes. In these cases, the correlation within the grids has little impact and no inter-LoB correlation is conducted so the final result is essentially the same. Reinsurers with a decreasing bi-centennial is the least intuitive category. This effect is due to the shape of the XS distributions. Indeed, the strong correlation between facultatives can sometimes lead to a strong increase in the quantiles more extreme than the 99.5 % but a decrease in the 99.5 % quantile. Below is a graph representing the evolution of the value of the extreme quantiles of reinsurer 13 :

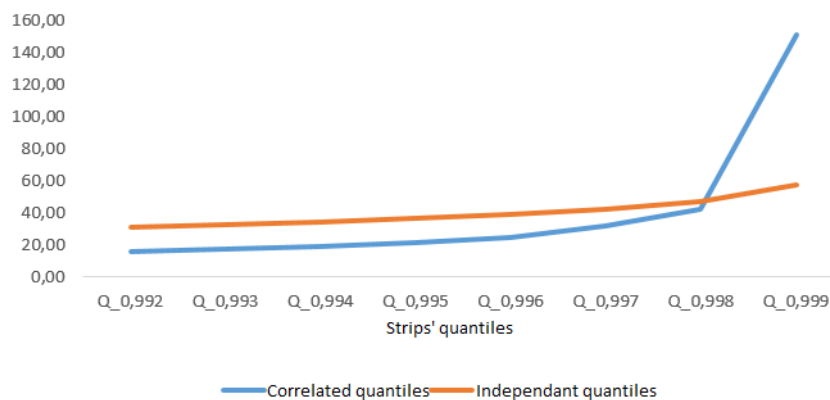


FIGURE 7 – Independant and correlated quantiles of reinsurer's 13 strips. Vertical scale is in millions of euros.

## Past contrats exposition

This section is a simplified study of the provisions in the group's balance sheet. The aim is to explain how the ultimate expense of a contract is created and released over the years. This modelling needs information on the premium of the contract, a loss ratio assumption as well as information on the LoB of the contract to assign a payment pattern to it. The payment pattern is a mathematical reflection of an accounting rhythm of claims settlement. For the presentation of the function, a cumulative payment pattern of 4 years is used, it is presented as follows :

	$PP_1$	$PP_2$	$PP_3$	$PP_4$
Payment Pattern	15%	65%	75%	100%

TABLE 4 – 4 years payment pattern.

This table reads as follow : by the end of the third year, 75% of the whole sinistrality will be paid.

The models are based on the assumption that the first year of the contract creates an ultimate charge of  $LR * Prime$ . At the begining of the year, this amount becomes the exposition to the reinsurer. Then, this amount is paid back by the reinsurer by following the cash flows of the payment pattern. The calculations are carried out with  $LR = 1$  for better readability. We note  $Expo_{C_X}^Y$  the exposure of contract C signed in year X at the end of year Y. Three cases are presented in this paper, the two main ones are shown here :

### Case n°1 : Non-renewed contract

	$Expo_C^X$	$Expo_C^{X+1}$	$Expo_C^{X+2}$	$Expo_C^{X+3}$	$Expo_C^{X+4}$
Exposition	$P * (1 - PP_1)$	$P * (1 - PP_2)$	$P * (1 - PP_3)$	$P * (1 - PP_4) = 0$	$P * (1 - PP_5) = 0$

TABLE 5 – Exposition of the reinsurer over the years  
Computed with a 4 year payment pattern

### Case n°2 : Renewed contract

This case is a generalisation of the previous case where the same contract is renewed every year. It shows a stratification of the reserves. Indeed, the exposure of a year corresponds to the sum of a column. Thus, the total exposure is made up of exposures of older and younger contracts. Here is a graph that illustrates the stratification of the reserves :

Year	X	X+1	X+2	X+3	X+4	X+5	X+6	X+7
$C_X$	$Expo_{C_X}^X$	$Expo_{C_X}^{X+1}$	$Expo_{C_X}^{X+2}$	0	0	0	0	0
$C_{X+1}$	0	$Expo_{C_{X+1}}^{X+1}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+3}$	0	0	0	0
$C_{X+2}$	0	0	$Expo_{C_{X+2}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+4}$	0	0	0
$C_{X+3}$	0	0	0	$Expo_{C_{X+3}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+5}$	0	0
$C_{X+4}$	0	0	0	0	$Expo_{C_{X+4}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+5}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+6}$	0

TABLE 6 – Reserves' stratification

It is possible to carry out sensitivities on case n°2 : to the premium, to the LR and to the payment pattern. These sensitivities make it possible to study in particular the effect on the reserves of inflation, a payment dispute or prudent provisioning.

This paper has therefore presented the overall measurement of exposure within the AXA Group. The AXA Group tracks two indicators : the  $Expo_{UW}$  which is the exposure of contracts still in force and the  $Expo_{RO}$  which is the exposure on the balance sheet. However, this brief does not mention the part on compulsory reinsurance, we have in fact :

$$Expo_{RO} = Expo_{RO}^{Facultatives} + Expo_{RO}^{Traites}$$

$$Expo_{UW} = Quantile_{0,995}(Strip^{Facultatives} + Strip^{Traites})$$

However, the final exposure is not the simple addition of the two indicators above for several reasons :

1. The settlement of the provisions corresponds to futur revenues for the AXA Group. On those revenues, the group will have to pay taxes. Thus the exposure is reduced by these taxes. We note the taxes  $tx_{tax}^{RO}$  and  $tx_{tax}^{UW}$ .
2. In the event of a default, the AXA Group considers that a reinsurer will still be able to pay a portion of its debts. We note the fraction that it will be able to pay  $RR$  for "recovery rate".
3. On some of their provisions, AXA entities sometimes hold collateral. Collateral is a set of financial assets that reduce the value of the exposure. In the event of default by the reinsurer, all of the collateral rightfully reverts to the ceding company to cover part of its losses. Collateral is mainly used for balance sheet exposure but it is possible to have collateral on some of the UW exposures. We note  $Collat_{RO}$  and  $Collat_{UW}$ , the respective collateral for each indicator

Therefore the calculation of the AXA Group's final exposure to its reinsurers is calculated as follows :

$$Expo_{Total} = ((Expo_{RO} - Collat_{RO}) * (1 - tx_{tax}^{RO}) + (Expo_{UW} - Collat_{UW}) * (1 - tx_{tax}^{UW})) * (1 - RR)$$

# Introduction

Le groupe AXA possède parmi ses entités une entité responsable de la majorité de son business de réassurance. Cette entité a évolué au fil temps pour devenir Axa Global Re (AGRe) jusqu'en juillet 2022 où elle a fusionné avec la holding du groupe : AXA SA. Depuis cette date, AXA SA est à la fois la holding du groupe mais aussi le réassureur interne du groupe. Ainsi, AXA SA rassemble la majorité du business de réassurance du groupe AXA, c'est donc l'entité la plus exposée au risque de contrepartie des réassureurs. Ce risque est un risque de crédit qui correspond aux risques qu'un réassureur auprès duquel AXA a acheté certaines couvertures ne puissent pas honorer ses engagements. Dans la plupart des cas, le réassureur ne peut pas honorer ses engagements lorsqu'il est en faillite, on parle de défaut du réassureur ou défaut de crédit. Ce mémoire se focalise sur l'étude de ce risque et comment il est géré et appréhendé au sein d'AXA SA. Ce risque est étudié à travers un indicateur que l'on appelle exposition et qui est composé de deux sous-indicateurs : l'exposition présent dans le bilan d'AXA SA, qui correspondent aux contrats « passés », ainsi que d'une exposition sur les contrats toujours en cours.

L'exposition qui correspond au contrat en cours ne peut, par définition, pas être connue de manière précise pendant que le contrat est toujours actif. Ainsi, AXA SA se doit de modéliser les récupérations attendues du réassureur sur chaque contrat en vigueur pendant l'année. L'exposition retenue est alors un quantile précis de cette distribution.

L'exposition qui correspond aux contrats « passés » est composée de provisions techniques envers les réassureurs, cette exposition sera étudié de manière simplifié dans la partie 4. Cette exposition peut aussi évoluer même dans le cas où le contrat n'est plus en vigueur, en effet les provisions peuvent se dégrader ou s'améliorer selon l'évolution du traitement des sinistres sous-jacent. Ce suivis est réalisé sur la réassurance dites obligatoire ainsi que la réassurance dites facultatives.

Ici, on s'intéressera à la partie réassurance facultative pour les contrats toujours en vigueur et en particulier, à l'ajout dans le modèle interne de certaines dépendances entre les facultatives selon plusieurs critères comme la ligne de business (LoB) ou la région géographique de l'entité. Actuellement, pour les facultatives, le modèle interne permet de calculer les expositions d'AXA SA envers les réassureurs par une méthode de Monte Carlo. Chaque simulation nous donne un niveau d'exposition auprès de tous les réassureurs en fonction de leurs contrats. Une hypothèse importante du modèle est qu'il n'y a pas de corrélation entre facultatives au sein d'une simulation.

L'objectif de ce mémoire est de questionner l'hypothèse d'indépendance et de réaliser des sensibilités à la corrélation. En effet, le modèle actuel néglige la dépendance entre FAC et il semble alors possible que notre mesure actuelle de d'exposition soit sous-estimée. La méthode retenue pour introduire de l'inter-dépendance entre fac est une méthode à base de copules. Cette méthode permet de réutiliser le modèle indépendant déjà disponible. Ainsi, une étude avec le modèle actuel a été effectuée pour servir de point de comparaison à l'étude réalisée avec le modèle introduisant de la corrélation intra ligne de business.

Pour ce faire, il est nécessaire d'avoir une base de données (BDD) de facultatives qui sert au calcul du risque de contrepartie. L'étude s'est faite sur des facultatives P&C des entités AXA. Au sein des entités AXA, AXA XL est un cas particulier car spécialisé en business entreprises et grands risque. Pour une plus grande homogénéité du portefeuille étudié, il a été décidé de retirer la plupart de leurs facultatives. Il est important de noter que les valeurs présentées sont modifiées par rapport à la réalité pour ne pas divulguer des chiffres stratégiques au groupe AXA. Les récupérations liées aux facultatives ont été modélisées à partir des chiffres modifiés.

Ce mémoire s'articule autour de quatre parties :

- I un rappel sur la réassurance en générale, en particulier sur les contrats les plus courants ainsi que l'impact de la norme solvabilité 2 sur les réassureurs.
- II une présentation de la modélisation actuelle chez AXA SA, en particulier la modélisation des facultatives ainsi que l'étude et la transformation de la base de données qui sert d'entrée au modèle.
- III une étude sur l'introduction de corrélation intra LoB dans la modélisation des facultatives.
- IV une présentation des provisions créées par les contrats de réassurances et la relâche de ces mêmes provisions.

Ce rapport s'inscrit dans la lignée des mémoires sur le risque de crédit chez AGRe, en particulier : [4] et [5].

# 1 Présentation du monde de la réassurance

## 1.1 Rappel sur la norme solvabilité 2

### 1.1.1 Les 3 piliers de solvabilité 2

La directive européenne Solvabilité 2 est entrée en vigueur le 1er janvier 2016. Elle se base sur les trois piliers suivants :

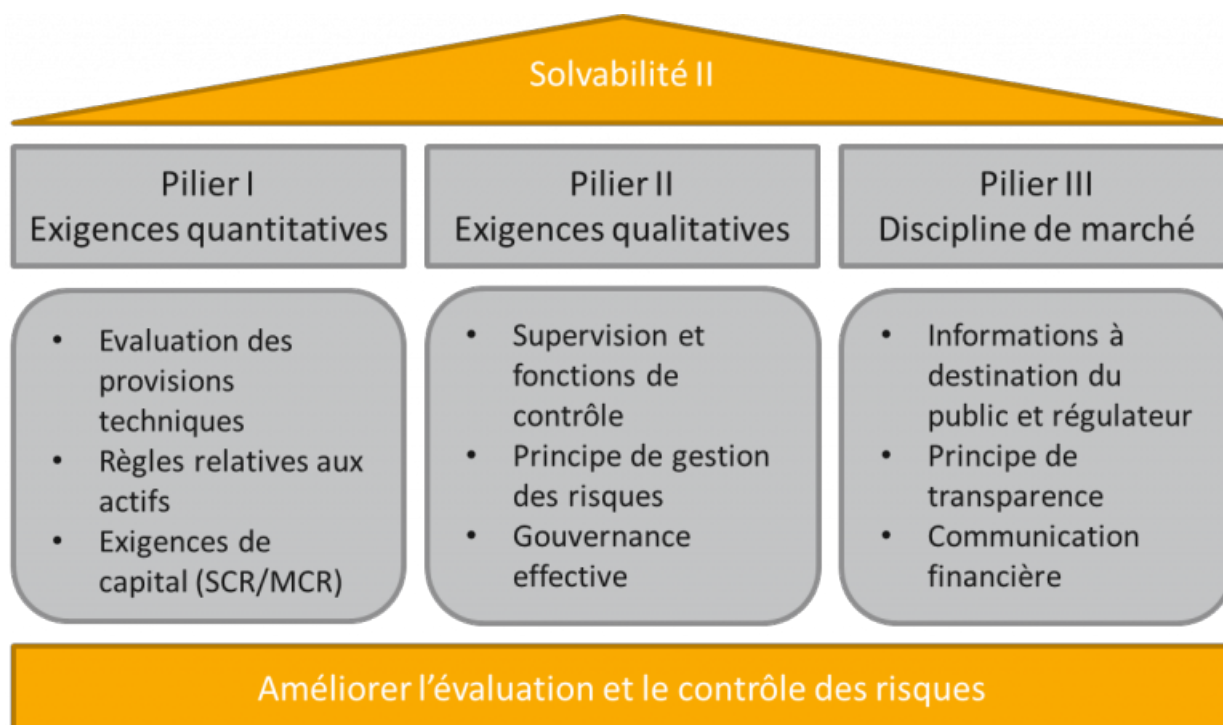


FIGURE 1.1 – Les trois piliers de solvabilité 2

#### Pilier 1

Le pilier 1 comprend la partie quantitative de la directive. C'est au sein de ce pilier que se trouvent les exigences de SCR en particulier. Le SCR se calcule comme la perte qui résulterait d'un risque ayant une probabilité de 0,5% à horizon 1 an. Le SCR se calcule risque par risque puis s'agrège pour obtenir un SCR total. Il peut se calculer par la formule standard, qui correspond à une méthodologie fournie dans les textes de la directive ou par modèle interne après approbation de l'ACPR. Mathématiquement, il s'agit d'une Value at Risk 99,5%. La VaR se calcule de manière indirecte :

$$\mathbb{P}(VaR(\alpha) < \text{capital requis}) = 1 - \alpha$$

La VaR s'interprète graphiquement de la manière suivante :

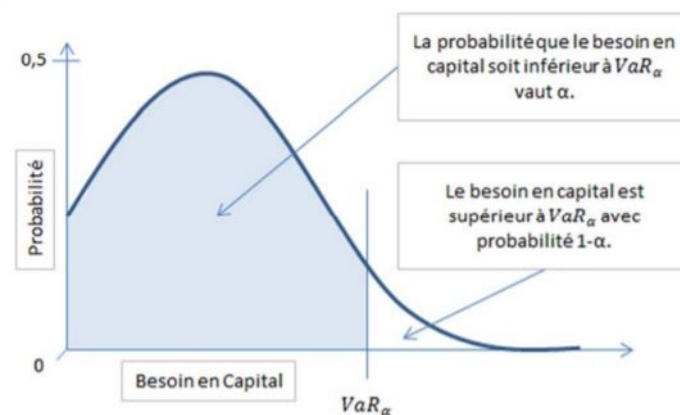


FIGURE 1.2 – Schéma de la Value at Risk ou VaR

Ci-dessous, un schéma résume les différents risques qui rentrent en compte dans le calcul du SCR. Le risque de défaut de contrepartie se trouve dans le module du SCR crédit.

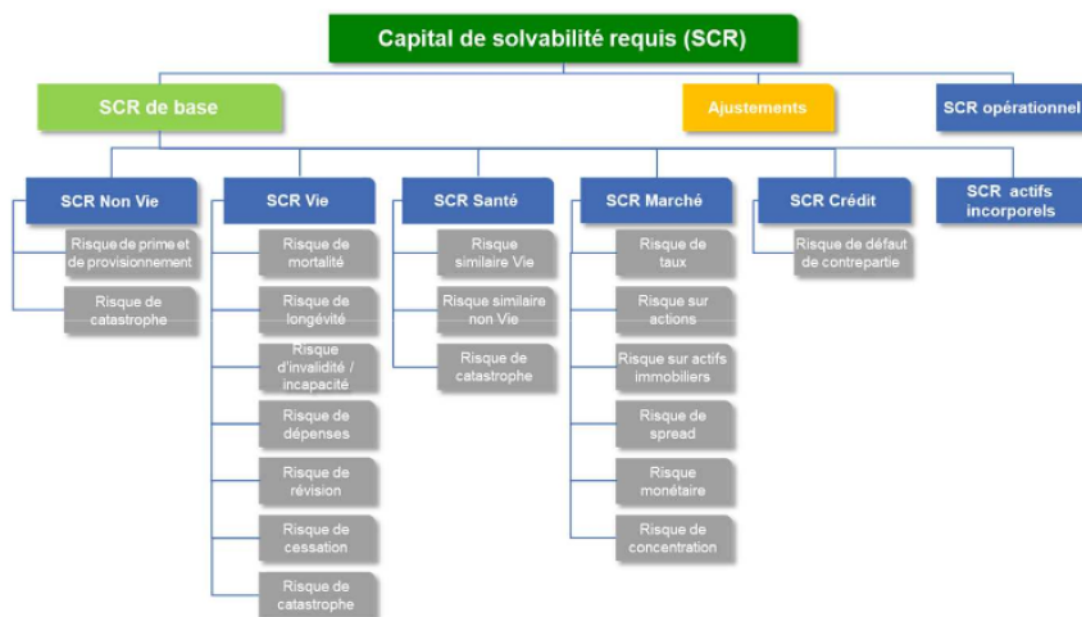


FIGURE 1.3 – Structure du SCR

## Pilier 2

Ce pilier définit la structure du contrôle interne et du risk management de l'entreprise. Il s'agit d'une démarche à la fois qualitative et quantitative. En particulier, ce pilier met en place deux gouvernances principales : l'ERM et l'ORSA. Le processus ERM (Enterprise Risk Management) oblige notamment l'entreprise à définir, pour chaque risque, son appétit aux risques. Cet appétit représente le montant maximal que l'entreprise peut se permettre de perdre à cause de ce risque. Le processus ORSA correspond lui à un rapport que fait l'entreprise de sa capacité à posséder des fonds propres supérieurs au SCR en tout temps.



Dans ce rapport, on s'intéresse en particulier à l'appétit au risque de contrepartie de réassurance. C'est-à-dire le montant maximal que le groupe AXA peut se permettre de perdre en cas de faillite d'un réassureur. On appelle exposition la valeur que l'on perd si cette contrepartie fait faillite.

### **Pilier 3**

Le pilier 3 est un pilier qui doit permettre une transparence entre les sociétés du monde de l'assurance et les différents acteurs du marché. Ainsi, chaque entreprise se doit de publier des rapports décrivant en particulier son profil de risque. Certaines de ses informations se doivent d'être publiques, néanmoins certaines sont transmises uniquement au régulateur car elles sont stratégiques pour les entreprises.

### **Conclusion**

Pour ce rapport, l'essentiel à retenir de la directive solvabilité 2 se résume en 2 points :

1. La nécessité de modéliser l'exposition aux réassureurs pour le calcul du SCR.
2. Cette même modélisation est utilisée dans le pilotage et le respect de l'appétit aux risques de contrepartie en réassurance.

## **1.2 Définitions relatives à la réassurance**

La réassurance possède des concepts spécifiques à son environnement. Cette partie a pour but de présenter les définitions et les concepts principaux du monde de la réassurance. L'objectif est de montrer comment la réassurance est un outil de gestion de risques auquel ont accès les assureurs. Néanmoins, il est essentiel de noter que la réassurance en Europe est soumise à la même réglementation solvabilité 2 qu'un assureur.

### **1.2.1 Pourquoi la réassurance ?**

La réassurance est née de différents problèmes auxquels font face les compagnies d'assurances. La réassurance propose plusieurs services aux assureurs dont le plus important est le transfert de risques. Le réassureur se présente alors comme l'assureur de l'assureur. Lorsque l'on se place du côté de l'assureur, on dit qu'il cède du risque : il s'agit d'une cession. Lorsque l'on se place du côté du réassureur, on dit qu'il accepte du risque : il s'agit d'une acceptation. Une fois le risque cédé par l'assureur et accepté par le réassureur, ce dernier possède deux choix. Premièrement, il peut décider de faire de la rétention de risques : il accepte le risque et le garde dans son portefeuille. Deuxièmement, il peut choisir de rétrocéder ce risque. Dans ce cas, le réassureur cède le risque qu'il a précédemment accepté à un autre acteur financier. Cet acteur peut être de plusieurs natures : un autre réassureur, des banques d'investissement, des fonds de pension ou encore un ou plusieurs investisseurs particuliers (qui jouent un rôle similaire à celui d'un assureur). Ainsi, le schéma de cessions et d'acceptations peut s'étendre à plus qu'une relation entre un assureur et un réassureur.

Les assureurs possèdent aussi le choix de céder du risque à un réassureur à travers un outil que l'on appelle un pool de réassurance. Un pool de réassurance permet à des assureurs de mutualiser leurs

risques sur une ligne de business précise. Au sein d'un groupe comme AXA, les pools permettent une diversification géographique. Chez AXA, la gestion de ces pools est la responsabilité d'AXA SA. Cette entité réassure les pools sur le marché de la réassurance, comme elle le fait d'ailleurs pour des traités non présent dans un pool. Ainsi, assureurs et réassureurs se partagent en fin d'année les gains ou les pertes réalisés par le pool proportionnellement à leur participation au sein du pool.

Le transfert de risques est central pour le bon fonctionnement d'une assurance. Une compagnie d'assurance peut avoir besoin de transférer son risque pour plusieurs raisons :

1. se protéger contre des risques émergents qui peuvent être difficiles à quantifier.
2. réduire son exposition sur certaines branches d'activité qu'elle pense trop élevée.
3. réduire son exposition sur des événements auxquels elle ne veut pas faire face.
4. réduire son expositions à certains risques pour pouvoir augmenter sa capacité de souscription.

Depuis la mise en place de solvabilité 2, les éléments cités ci-dessus ont tous des conséquences sur les exigences de fond propre de l'assureur. En particulier, le transfert de risques permet de diminuer le coût du capital de rétention du risque en libérant des fonds propres de l'assureur. De plus, le transfert de risque permet de lisser le bilan d'un assureur et ainsi d'obtenir une stabilité dans les résultats de l'entreprise.

Suite aux explications précédentes, il est important de noter que le profil d'un réassureur est bien plus risqué qu'un assureur. En effet, le réassureur est à même d'accepter des risques dont les assureurs ne veulent pas assumer les conséquences pour diverses raisons. Ainsi, le réassureur se doit de diversifier ses acceptations autant qu'il le peut. Il le fait à travers une diversification géographique ainsi qu'une diversification de ligne de business. Géographiquement, le réassureur peut accepter du risque d'assureurs du monde entier. Plus les zones géographiques sont variées, plus la diversification est importante. En effet, il est très peu probables que des sinistres importants arrivent en même temps partout dans le monde. Au niveau des lignes de business, il existe une diversification entre les pertes liées aux dommages biens et les pertes liées à la responsabilité générale. Ainsi, le réassureur s'assure de la diversification au sein de son portefeuille.

Parmi les rôles moins importants du réassureur on peut retrouver la réassurance financière ainsi qu'une fonction de renfort des assureurs. La réassurance financière consiste à prêter des fonds propre, en particulier pour améliorer le ratio de solvabilité d'un assureur. Le réassureur peut aussi jouer le rôle d'un cabinet de conseil en accompagnant l'assureur dans la gestion de sinistres ou dans le développement de nouveaux produits assurantiels. Ainsi, l'assureur peut bénéficier de l'expertise d'un réassureur sur certains sujets.

## **1.2.2 Les différents contrats de réassurance**

En réassurance les contrats peuvent être de deux types : la réassurance obligatoire, aussi appelée traité, et la réassurance facultative, que l'on note souvent FAC. Chacun de ces contrats est vendu par le réassureur et acheté par l'assureur que l'on appelle aussi cédante. A noter que dans le cas d'une rétrocession, un réassureur peut également être une cédante.

### **La réassurance obligatoire : Les traités**

Dans cette forme de réassurance l'assureur à l'obligation de céder et le réassureur d'accepter de couvrir l'entièreté des risques du contrat. C'est à dire qu'après signature du contrat, tous les risques

de ce portefeuille sont cédés par l'assureur au réassureur. Pour l'assureur, c'est une protection pour son portefeuille de risques. On appelle ce type de contrat "traité de réassurance".

### **La réassurance facultative : Les FACs**

Dans cette forme de réassurance, l'assureur choisit précisément un risque à réassurer partiellement ou totalement avec les caractéristiques qu'il souhaite. Le réassureur, quant à lui, à le choix d'accepter ou de refuser un tel contrat. En général c'est une forme de réassurance utilisée pour des grands risques à faible fréquence. En effet, lorsque la somme assurée d'un risque en particulier ne peut pas être mise au sein d'un traité, il faut l'exclure du traité et en faire une facultative.

Au sein des FACs il existe une sous catégorie appelée les FAC-Obligatoires. Très peu présente dans nos portefeuilles, il s'agit d'une forme de réassurance obligatoire mais dont les conditions par contrat ne doivent pas dépasser certaines limites définies à l'avance d'un commun accord entre les deux parties.

### **1.2.3 Les types de contrats**

Que ce soit en réassurance facultative ou obligatoire, les contrats suivent toujours deux types : un type proportionnel et un type non-proportionnel. Dans la suite, nous étudierons en détail un type de réassurance proportionnel, les "Quote-parts" et un type de réassurance non-proportionnel, les "Excédents de sinistres".

#### **Les quote-parts**

On retrouve de manière régulière les quote-parts sous leur appellation anglaise : quota share ou QS. Les quote-parts sont la forme la plus simple de réassurance proportionnelle. Elle est caractérisée par une seule variable nommée pourcentage de cession. Si un assureur cède 50% de son portefeuille à un réassureur alors le réassureur doit assumer 50% des sinistres du portefeuille. En échange, l'assureur transmet 50% de la prime du portefeuille au réassureur.

Deux points importants sont à noter. Tout d'abord, les contrats peuvent avoir une limite maximale de pertes mais ce n'est pas toujours le cas. Dans le cas où il n'y pas de limite, le réassureur s'expose à autant de perte que l'assureur s'il n'avait pas été réassuré. Dans le cas où une limite maximale existe, cela se reflète sur la commission versée par le réassureur à la cédante.

Dans le cadre de la réassurance proportionnelle il est courant qu'il existe des commissions de réassurance. Ces commissions sont payées par le réassureur à la cédante. En général, ces commissions sont un pourcentage de la prime payée par la cédante. On peut distinguer deux cas sur le fonctionnement des commissions :

1. la commission fixe : en notant  $x$  le pourcentage de commission, on a simplement :

$$Commission = x * Prime$$

2. la commission variable : dans ce cas, la commission  $x$  varie entre une commission maximale et une commission minimale qui ont été fixées à la signature du contrat. En général, la commission va dépendre du loss ratio du portefeuille. Le loss ratio correspond au rapport  $\frac{Pertes}{Primes}$ .

On peut imaginer plusieurs profils d'évolution du loss ratio. Un exemple de profil sera présenté par la suite.

Le graphique suivant, présent dans [4], propose un résumé des deux situations à l'aide d'un exemple :

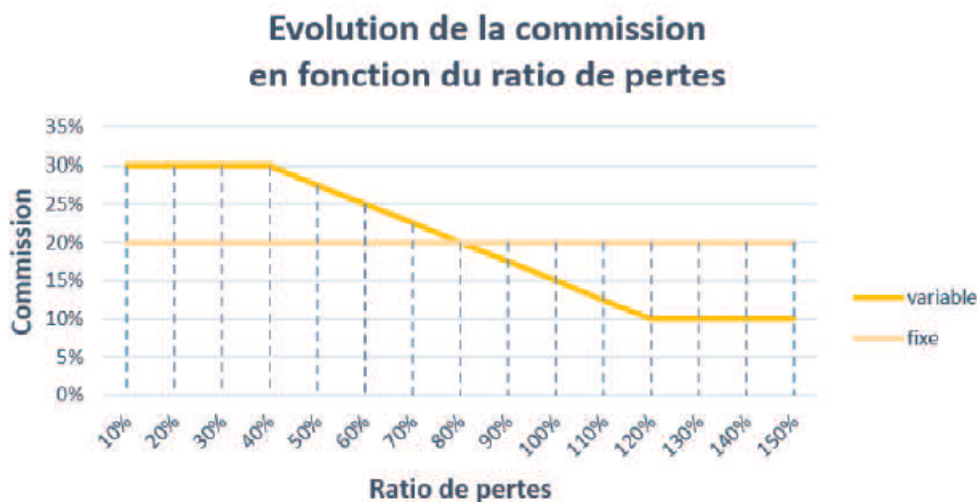


FIGURE 1.4 – Profils d'évolutions de la commission

Les deux profils de commissions utilisés sont les suivants :

$$Commission\_Fixe(LR) = 20\%$$

$$Commission\_Variable(LR) = \begin{cases} 30\% & \text{si } LR \leq 40\% \\ 30\% - \frac{1}{4}(LR - 40\%) & \text{si } LR \in ]40\%; 120\%[ \\ 10\% & \text{si } LR \geq 120\% \end{cases}$$

Pour conclure, si l'on se place du côté de la cédante nous avons les cashflows suivants :

- la cédante doit payer une prime P.
- le réassureur doit payer les récupérations Rec de la quote-part.
- le réassureur doit payer la commission de réassurance Com lié à la prime P.

Ainsi, la cédante de la part du réassureur perçoit le flux suivant :

$$\boxed{-P + Rec + Com}$$

### Les Excédents de sinistres

On retrouve de manière régulière les excédents de sinistres sous leur appellation anglaise : excess of loss ou XL. Les contrats d'excédents de sinistres consistent en la prise en charge par le réassureur d'une partie du sinistre. En effet, le contrat est touché lorsque les récupérations d'un sinistre sont supérieures à un cap que l'on appelle *priorité* ou *rétenion*. Le réassureur prend en charge le montant dépassant ce cap. Néanmoins, le réassureur ne s'engage à payer qu'une somme maximale par contrat que l'on appelle *limite* ou *portée*. On note ce type de contrat **limite XS priorité**.

Graphiquement on peut le représenter comme suit :

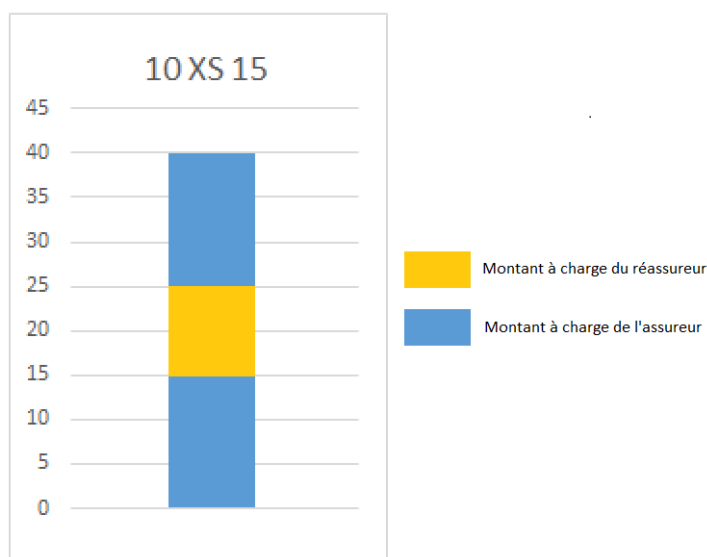


FIGURE 1.5 – Contrat en excédents de sinistre 10XS15

Les contrats en excédant de sinistre sont utilisés pour couvrir soit des évènements soit des risques précis. Les excédents de sinistres par risque fonctionnent par risque, c'est à dire qu'ils viennent à couvrir les pertes d'un sinistre ne concernant qu'un seul risque. Ce risque peut être de nature différente (des personnes physiques, des objets matériels, ...). Les excédents de sinistres par évènements sont eux utilisés pour couvrir des évènements précis comme des catastrophes naturelles ou des accidents. Dans ce cas, le traité s'applique sur un portefeuille qui contient plusieurs entités assurées, par exemple une flotte d'avion.

Un contrat de type XS d'une durée d'un an peut être consommé plusieurs fois durant la même année. Dans le contrat, la cédante et le réassureur doivent se mettre d'accord sur plusieurs caractéristiques du contrat :

1. le nombre de reconstitution du contrat : il s'agit du nombre de fois que le contrat peut s'appliquer lors de sa période de validité. Il est possible que ce nombre soit infini.
2. la prime de reconstitution : il s'agit de la prime payée pour être protégé par le contrat. La première prime payée par la cédante correspond à la prime de première reconstitution du contrat. Les primes payées à chaque reconstitution peuvent avoir des montants différents de celles payées précédemment.
3. l'*Annual Aggregate Limit*, ou AAL : il s'agit du montant maximal de la prise en charge du réassureur pour une tranche sur une année entière.
4. l'*Annual Aggregate Deductible*, ou AAD : il s'agit d'une franchise supplémentaire qui s'applique sur l'ensemble des sinistres qu'a subit la tranche pendant un an.

Avec tous les éléments du contrat on peut à présent écrire la formule de calcul des récupérations d'une tranche :

$$\text{Sinistre à charge du réassureur} = \text{Max}(\text{Min}(\text{AAL}, \text{Récupération de la tranche} - \text{AAD}), 0)$$

## 1.3 Les principaux acteurs du marché de la réassurance

Le marché de la réassurance ne possède pas énormément d'acteurs. C'est l'une des raisons pour lesquelles le suivi du risque de crédit est important. En effet, diversifier les réassureurs avec qui AXA peut céder du business trouve ses limites dans la faible diversité de réassureurs disponibles sur le marché. De plus, si l'on souhaite avoir de « bons » réassureurs c'est à dire des réassureurs ayant une note supérieure à un certain seuil, leur nombre diminue encore. Le tableau ci-dessous présente le top 15 des réassureurs mondiaux.

En milliards USD

Rang	Compagnie	Chiffre d'affaires 2019			Fonds propres	Ratio en % (1)		
		Total	Non vie	Vie		Sinistres à primes	Frais de gestion	Combiné
1	Swiss Re	42,228	26,095	16,133	31,037	79,7	31,7	111,4
2	Munich Re	37,864	24,742	13,122	34,245	66,7	34,4	101,1
3	Hannover Re	25,309	16,555	8,754	12,718	69	29,5	98,5
4	SCOR	18,302	8,005	10,297	7,139	68,1	30,9	99
5	Berkshire Hathaway	16,089	11,112	4,977	428,563	86,6	25,1	111,7
6	Lloyd's	14,978	14,978	-	39,150	71	34,5	105,5
7	Great West Lifeco	13,260	-	13,26	19,549	ND	ND	ND
8	China Re	13,161	5,218	7,943	13,881	65	36,4	101,4
9	Reinsurance Group of America	12,150	-	12,15	11,601	ND	ND	ND
10	PartnerRe	7,285	5,792	1,493	7,270	72,4	28	100,4
11	Korean Re	6,963	6,157	0,806	2,124	85,9	14,9	100,8
12	General Insurance Corporation of India	6,862	6,735	0,127	5,027	97,2	18,2	115,4
13	Everest Re	6,356	6,356	-	9,133	66,9	28,4	95,3
14	XL Bermuda	5,010	5,010	-	13,240	65,4	34,5	99,9
15	Transatlantic Holdings	4,946	4,946	-	5,243	68,4	32,5	100,9

FIGURE 1.6 – Top 15 des réassureurs du monde en 2019

Source : [1]

Certains réassureurs se focalisent sur une seule branche de business, vie ou non-vie, d'autres sont mixtes. D'après A.M. Best, en 2019, les ordres de grandeur en termes de chiffre d'affaires sont les suivants :

- le chiffre d'affaires de tous les réassureurs du monde s'élève à environ 290 milliards de dollars.
- le chiffre d'affaires du Top 10 des réassureurs s'élève à environ 200 milliards de dollars soit ~ 70% du total. Au sein de ces 200 milliards de dollars on trouve :
  - 112 milliards de dollars en business non-vie.
  - 88 milliards de dollars en business vie.
- le chiffre d'affaires du Top 15 des réassureurs s'élève à environ 230 milliards de dollars soit ~ 80% du total.
  - 141 milliards de dollars en business non-vie.
  - 89 milliards de dollars en business vie.

Pour compléter, on peut retrouver sur la page suivante le Top 10 des réassureurs par business vie ou non-vie :

En milliards USD

Rang 2019	Compagnie	Primes brutes	Fonds propres	Ratio combiné en %
1	Swiss Re	26,095	31,037	111,4
2	Munich Re	24,742	34,245	101,1
3	Hannover Re	16,555	12,718	98,5
4	Lloyd's	14,978	39,15	105,5
5	Berkshire Hathaway	11,112	428,563	111,7
6	SCOR	8,005	7,139	99
7	General Insurance Corporation of India	6,735	5,027	115,4
8	Everest Re	6,356	9,133	95,3
9	Korean Re	6,157	2,124	100,8
10	PartnerRe	5,792	7,27	100,4

FIGURE 1.7 – Top 10 des réassureurs non-vie en 2019

Source : [1]

En milliards USD

Rang	Compagnie	Primes émises brutes vie	Fonds propres
1	Swiss Re	16,133	31,037
2	Great West Lifeco	13,26	19,549
3	Munich Re	13,122	34,245
4	Reinsurance Group of America	12,15	11,601
5	SCOR	10,297	7,139
6	Hannover Re	8,754	12,718
7	China Re	7,943	13,881
8	Berkshire Hathaway	4,977	428,563
9	Pacific LifeCorp	2,072	16,055
10	Generali	1,553	33,433

FIGURE 1.8 – Top 10 des réassureurs vie en 2019

Source : [1]

## 2 Modélisation des expositions pour les facultatives

### 2.1 Définition de l'exposition chez AXA SA

Le risque de crédit envers les réassureurs se trouve dans le module de risque de crédit des nomenclatures de solvabilité 2. Le risque de crédit correspond au risque qu'une contrepartie, ici un réassureur, n'honore pas ses obligations envers le détenteur de la créance. Ainsi, le risque de crédit correspond au risque qu'une entité ne paye pas sa dette envers une autre. Chez AXA SA, le risque de crédit envers les réassureurs se résume uniquement au risque de contrepartie en réassurance. En effet, le groupe AXA n'autorise aucune entité AXA à détenir de la dette ou des actions d'un réassureur envers qui le groupe a une exposition.

Pour la gestion de ce risque, AXA SA se repose sur plusieurs indicateurs :

1. La valeur de la créance/dette. Cette valeur peut être considérée comme la valeur de l'exposition.
2. La probabilité que l'entité qui a émis la dette ne puisse pas la rembourser. On l'appelle la probabilité de défaut.
3. Le taux de recouvrement. Il s'agit d'un taux de récupération en cas de défaut de l'entité endettée. Par exemple, si le taux de recouvrement vaut 50%, alors en cas de défaut de la contrepartie, 50% de la dette est récupérée par le détenteur de la créance. En effet, lorsqu'une entité fait défaut il est rare que celle-ci ne possède plus rien. Ainsi, les récupérations liées aux traités ne devraient pas être totalement perdues. Ce taux est utilisé dans le calcul du SCR ainsi que dans le calcul de l'appétit aux risques du groupe.

Par la suite, le risque de contrepartie considéré sera uniquement envers un réassureur.

Comme présenté dans [4], ce risque a besoin d'une attention particulière, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il n'existe que très peu de données historiques de faillites de réassureurs. Ces données sont encore plus faibles si l'on regarde uniquement des « gros » réassureurs, la plupart des faillites étant des faillites de « petits ». Une analyse historique ne paraît ainsi pas envisageable pour ce risque en particulier.

De plus, le marché de la réassurance est assez restreint. Le nombre d'acteurs est limité et leur profil de risques est plutôt différent des acteurs traditionnels des marchés financiers. Ainsi, il est important de faire attention à la fois à son risque de concentration et à bien délimiter son appétit aux risques envers chaque réassureur, et en particulier envers les plus gros du marché. Le choix d'augmenter son appétit aux risques envers certains réassureurs est un choix qui est dicté par de nombreuses études sous-jacentes ainsi qu'une concertation du comité exécutif du groupe.



Enfin, le risque de crédit en réassurance est assez volatile. En effet, ce risque a une particularité en lien avec l'inversion du cycle de production en assurance<sup>1</sup>. L'exposition, c'est à dire le montant dû par le réassureur à la cédante, ne peut être qu'une estimation puisqu'il peut y avoir des évolutions de sinistralité.

AXA SA est le réassureur interne du groupe AXA. Cela veut dire que chaque entité AXA se réassure presque exclusivement chez AXA SA, en particulier pour la réassurance obligatoire. AXA SA va ensuite garder une partie du risque et en rétrocéder une grande majorité sur le marché de la réassurance. Lorsque AXA SA rétrocède totalement certains contrats à l'identique, il joue un rôle similaire à un courtier.



FIGURE 2.1 – Schéma de cessions au sein du groupe AXA

Le schéma ci-dessus montre que la nature même de l'activité d'AXA SA l'expose à un fort risque de contrepartie envers le marché de la réassurance. De plus, il est important de noter que les autres entités AXA ne voient que les deux premiers blocs du schéma. Ainsi, une entité AXA attend un paiement de ses créances de la part d'AXA SA. Et ce même si les réassureurs externes à qui AXA SA a rétrocédé les contrats ont fait faillite. La gestion du risque de contrepartie est ainsi essentielle pour que AXA SA puisse faire face au cas où un réassureur chez lequel elle est exposée fait faillite.

Néanmoins, au sein du groupe il existe des cessions directes des entités AXA (hors AXA SA) vers le marché de la réassurance. Ainsi le schéma se simplifie comme décrit dans la figure suivante :

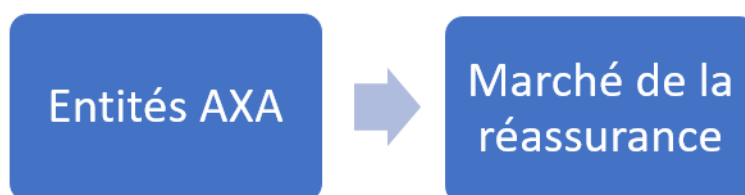


FIGURE 2.2 – Schéma de cession directe

Certains traités sont en cession directe mais ceux-ci restent assez rares. Cependant, il est important de noter que c'est le cas pour toutes les facultatives du groupe.

Néanmoins, AXA SA est responsable de la modélisation des traités et des facultatives pour le groupe entier et non uniquement pour elle-même. Ainsi, les traités et les facultatives placés sur le marché de la réassurance sans passer par AXA SA sont aussi modélisés par AXA SA. Cette modélisation est ensuite utilisée à plusieurs fins, dont les deux plus importantes sont :

- le calcul du SCR de crédit de chaque entité : AXA SA fait parvenir à chaque entité sous la réglementation solvabilité 2 leurs expositions pour leur calcul local de SCR.

1. L'inversion du cycle de production est endémique à l'activité d'assurance. Il s'agit de vendre un produit, ici un contrat d'assurance, avant de connaître son coût final. C'est la raison pour laquelle la gestion des risques est au coeur des métiers de l'assurance.

- le calcul de la valeur d'exposition aux réassureurs : cette exposition aux réassureurs est calculée pour le groupe dans sa globalité, et n'est pas différenciée par entité.

Le suivi de l'exposition aux réassureurs est assuré par le comité de sécurité d'AXA. Ce comité est appelé *Group Security Committee* ou GSC. Ce comité a pour but d'assurer la qualité des données utilisées pour la modélisation des récupérations des traités et des facultatives. Le comité de sécurité possède plusieurs autres missions. Il doit tout d'abord gérer la liste de sécurité. C'est une liste de réassureurs à qui les entités peuvent céder leurs contrats. Cette liste doit être mise à jour régulièrement, et ce pour plusieurs raisons dont :

- les mises à jours des notations des réassureurs par les agences de notation comme A.M. Best. Dans le cas d'une dégradation de la notation d'un réassureur, le comité de sécurité peut être amené à interdire les entités de lui céder traités et facultatives.
- les valeurs de l'appétit aux risques du groupe. Si l'exposition envers un réassureur est dangereusement proche de la limite qui lui est accordée, alors le comité de sécurité se doit d'interdire toute cession supplémentaire envers lui.

Ensuite, le comité de sécurité doit fixer certaines limites de cession. En particulier sur les facultatives, le comité fixe des limites de cessions par risque.

Enfin, le comité peut délivrer des dérogations aux deux règles précédentes. En effet, il arrive que les entités demandent au comité de sécurité des dérogations sur certains points particuliers. Si une dérogation est considérée comme conséquente, la demande doit être justifiée par les entités lors d'un comité. Le GSC juge alors si la demande est recevable ou non et donne son verdict.

Les équipes du modèle interne en charge du risque de crédit doivent être en étroite collaboration avec le comité de sécurité pour mettre à jour les données le plus souvent possible. En effet, le Comité de Sécurité a besoin d'un appui technique, par exemple pour obtenir les niveaux d'appétit au risque suite à un choc d'inflation ou de taux de change.

## 2.2 Modélisation des Facultatives

De par ses obligations de gérer à la fois ses cessions et ses acceptations, AXA SA se doit de prévoir les récupérations associées à ses traités et à ses facs. AXA SA est responsable de la modélisations de ses cessions mais aussi de celles de toutes les entités du groupe. Cette partie du rapport a donc pour but de présenter les modélisations des quotes-parts et des excédents de sinistres dans le cas spécifique des facs. Ces modélisations sont essentielles pour le calcul de la métrique que l'on va suivre, un bi-centenaire des récupérations. Cette métrique fait partie intégrante du calcul de l'exposition au risque de contrepartie. Ce calcul prend toutefois en compte d'autres éléments qui ne seront pas discutés ici.

Comme précisé ci-dessus, la métrique utilisée est le bi-centenaire des récupérations. Elle correspond au quantile 99,5% d'une distribution de récupérations. Dans le modèle interne de AXA SA, cette distribution est simulée à l'aide d'une méthode de Monte Carlo. La modélisation est faite facultative par facultative. Les facultatives sont supposées indépendantes entre elles ainsi elles sont agrégées par réassureur pour obtenir la métrique.

A chaque fac est associée un strip de récupération, qui correspond à la simulation de 50 000 scénarios. Ainsi on estime le quantile 99,5% par la 250<sup>ème</sup> plus grande valeur du strip de récupération de la fac.

Il y a une diversification au sein de toutes les facultatives que le groupe AXA a cédé à un réassureur. Il n'est pas possible de considérer que le quantile 99,5% associé à un réassureur est la somme

des quantiles 99,5% de ses facs. Sommer les quantiles 99,5% de chacune des facultatives cédées à ce réassureur reviendrait possiblement à regarder un scénario plus extrême qu'un quantile 99,5% de la distribution globale des pertes cédées à ce réassureur. Ainsi, nous sommions les strips de chaque Fac pour un réassureur donné et nous prenons ensuite le quantile de ce strip sommé. Compte tenu de la façon dont nous modélisons les récupérations des contrats, cette somme revient à supposer une indépendance entre les pertes de toutes les facultatives.

Par exemple, imaginons que nous sommes dans les conditions suivantes :

- Nous réalisons 5 simulations de récupérations sur 4 facultatives.
- Il est difficile de définir un quantile 99,5% pour si peu de simulations. On prend plutôt la seconde valeur la plus grande du strip comme métrique. Le raisonnement reste le même pour le quantile 99,5%.

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4	Somme
1	10	0	9	0	19
2	6	2	8	0	16
3	9	5	8	0	22
4	7	0	10	0	17
5	15	5	12	9	41
métrique	10	5	10	0	25

Nous observons que la métrique sur le strip sommé vaut 22 alors que la somme des métriques par fac vaut 25.

La métrique considérée est une VaR. La VaR n'étant pas sous additive, il est théoriquement possible d'avoir des cas où la VaR de la somme est supérieure à la somme des VaR.

Les deux parties suivantes présentent la modélisation, dans le modèle d'AXA SA, des récupérations sur les facultatives de type quote-parts et excédents de sinistres. Dans le cadre des facs, il n'y a pas d'autres types de contrats.

### 2.2.1 Modélisation des quote-parts

La modélisation porte sur les récupérations des facs. L'effet des primes et des commissions vu en chapitre 1 sera pris en compte plus tard dans le calcul de l'exposition au risque.

La modélisation se base sur trois hypothèses principales. Notons  $S$  les récupérations des traités et  $P$  les primes associées à ce même traité. Notre inconnue est donc  $S$ .

1. On suppose que la distribution de  $\frac{S}{P}$  suit une loi Lognormale. Ainsi on peut noter :

$$\text{Log}\left(\frac{S}{P}\right) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (2.1)$$

On suppose aussi  $\sigma > 0$ .

2. On suppose que l'espérance des récupérations est égale à la valeur des primes. Ainsi on peut écrire :

$$\mathbb{E}(S) = P \quad (2.2)$$

3. On suppose que la value at risk 99.5% est une perte égale à deux fois la prime. Ainsi on a :

$$\mathbb{P}(S > 2P) = 0.5\% \quad (2.3)$$

Ainsi, pour déterminer la distribution, nous avons uniquement besoin de la valeur des primes. Les hypothèses (2.2) et (2.3) permettent de déterminer les coefficients  $\mu$  et  $\sigma$  utilisés dans la modélisation.

On se propose de déterminer  $\mu$  et  $\sigma$ . Pour ce faire nous allons utiliser les résultats mathématiques suivants :

1. Soit  $\text{Log}(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Alors  $\mathbb{E}(Y) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$
2.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mu + \sigma \mathcal{N}(0, 1)$
3. Soit  $q$  le quantile 99.5 % de la loi normale centrée réduite. On a :

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) > q) = 0.5\%$$

Numériquement on a  $q \approx 2,576$ .

On suppose les hypothèses (2.1), (2.2), (2.3).

Partons de l'hypothèse 2 pour trouver une première relation entre  $\mu$  et  $\sigma$ . On a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{S}{P}\right) = 1$$

Donc en utilisant (2.1) :

$$\log\left(\mathbb{E}\left(\frac{S}{P}\right)\right) = \log(1) = 0$$

$$\boxed{\mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0}$$

On peut utiliser l'hypothèse 2.3 pour trouver une seconde relation entre  $\mu$  et  $\sigma$ . On a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{P} > 2\right) = 0.5\%$$

Par croissance du logarithme et positivité de  $\sigma$  on peut écrire :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log(\frac{S}{P}) - \mu}{\sigma} > \frac{\log(2) - \mu}{\sigma}\right) = 0.5\%$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\frac{\log(2) - \mu}{\sigma} = q}$$

On peut synthétiser les équations :

$$\begin{cases} \mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0 \\ \log(2) - \mu - q * \sigma = 0 \end{cases}$$

Déterminons  $\sigma$  à l'aide de l'équation :

$$\sigma^2 - 2q\sigma + 2\log(2) = 0$$

La résolution mène à un discriminant  $\Delta \approx 21$  et donc aux deux solutions suivantes :

$$\sigma_1 = q - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } \sigma_2 = q + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Les deux solutions étant positives on retient arbitrairement  $\sigma_1$ .

Application numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 0,285 \\ \mu = -\frac{\sigma_1^2}{2} = -0,04 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 = 4,86 \\ \mu = -\frac{\sigma_2^2}{2} = -11,80 \end{array} \right.$$

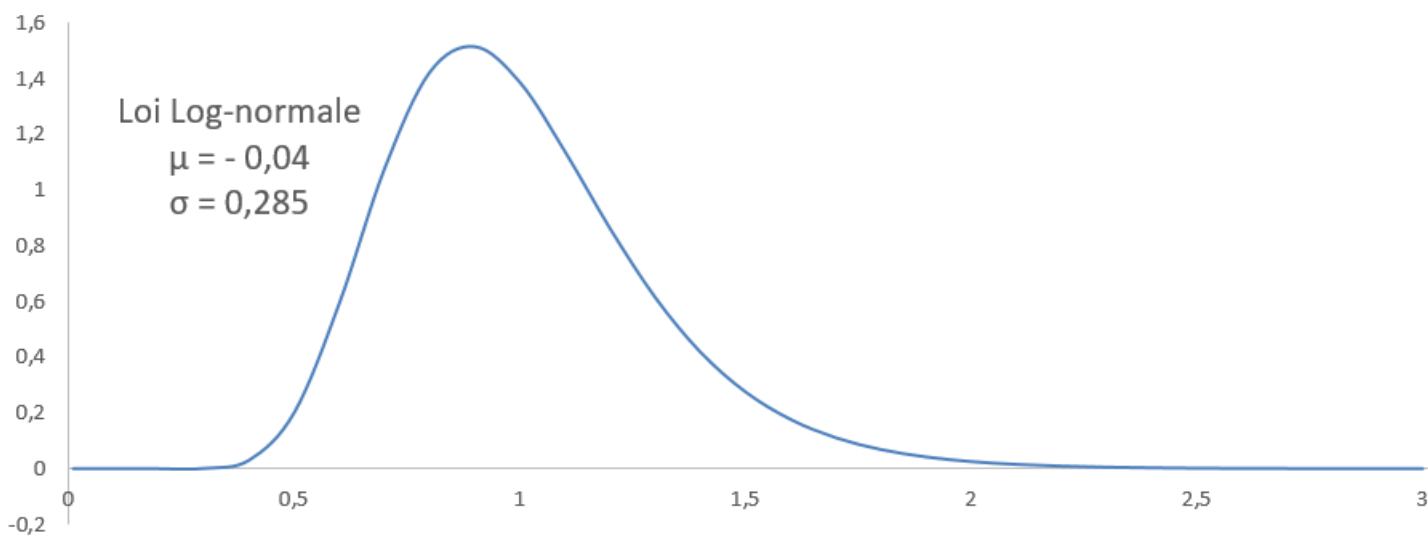


FIGURE 2.3 – Loi Log-normale avec  $\sigma_1$

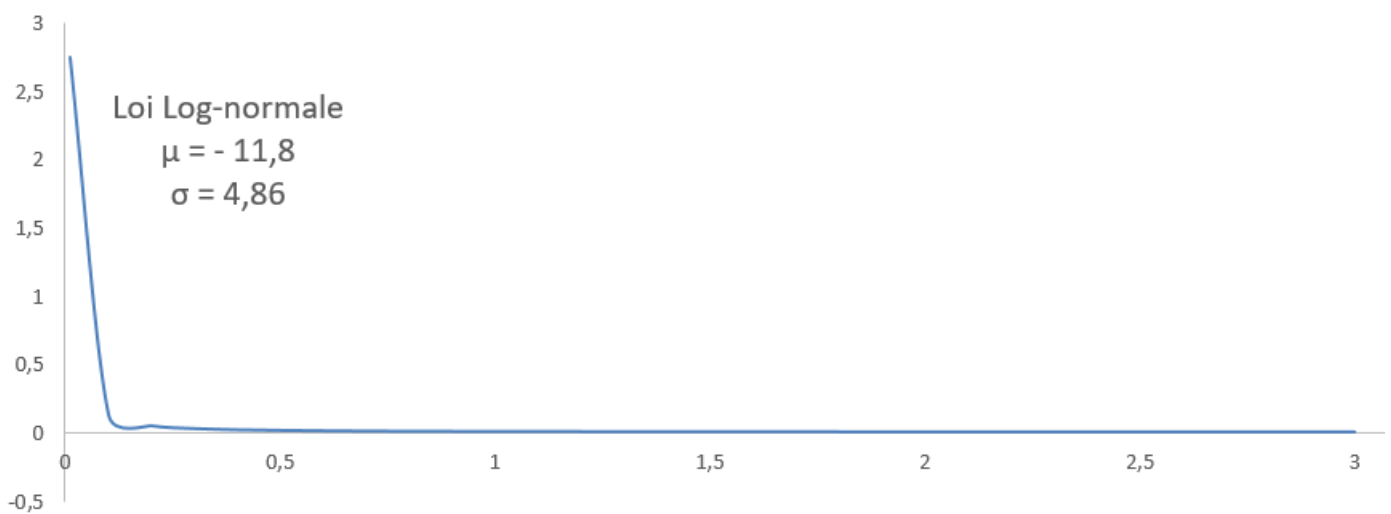


FIGURE 2.4 – Loi Log-normale avec  $\sigma_2$

La modélisation avec  $\sigma_1$  semble la plus appropriée. La modélisation a pour but de simuler la diversification entre les FACs. La modélisation à l'aide de  $\sigma_2$  ne permet pas de bien capter cet effet.

## 2.2.2 Modélisation des excédents de sinistres

La modélisation des XS dans le modèle utilisé pour le calcul des récupérations est complexe. La modélisation peut se retrouver en détails dans [5] et [4]. Pour garder un maximum de clarté entre les sources, nous utiliserons au maximum les mêmes notations, et en particulier celles de [5].

La perte au sein d'une tranche doit être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$Loss(NbOcc) = Max(Min(AAL, Limite * NbOcc - AAD), 0) \quad (2.4)$$

Avec NbOcc le nombre de fois où la tranche est consommée durant une année. Il est à noter que NbOcc n'est pas forcément un entier car la tranche peut ne pas être consommée à 100% lorsqu'elle est touchée.

Dans le cas des FACs, la modélisation est plus facile que pour les traités. En effet, il n'y a pas d'empilement de tranches : chaque FAC n'est modélisée que comme une seule tranche. De plus, pour les FACs, le concept d'AAD n'a pas vraiment lieu d'être puisqu'il s'agit de la réassurance d'un seul risque. Ainsi, on ne prend pas en compte d'AAD ce qui revient à prendre  $AAD = 0$ . De même, le concept d'AAL n'a pas lieu d'être. On ne considère donc pas d'AAL dans le modèle ce qui revient à prendre l'AAL égale à l'infini.

Les deux dernières hypothèses permettent d'adapter la formule précédente de pertes comme étant :

$$Loss(NbOcc) = Limite * NbOcc \quad (2.5)$$

La première hypothèse simplifie grandement la modélisation de NbOcc. En effet, si la FAC ne possède qu'une tranche, il n'y a plus de dépendance entre les tranches.

Les premières hypothèses ont permis de simplifier la fonction de perte. Nous ajoutons d'autres hypothèses nécessaire à la modélisation : On vise un loss ratio par FAC de 100%. On note  $Nbindep$  le nombre de fois où la tranche doit être consommé pour atteindre un loss ratio de 100%. Lorsqu'il existe plusieurs tranches, il peut être différent de  $NbOcc$ , ce qui n'est pas le cas ici. On considère que  $Nbindep$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\beta$ . Ainsi on peut écrire :

$$NbOcc = Nbindep \sim Poisson(\beta)$$

En ajustant le paramètre  $\beta$  nous souhaitons imposer la condition précédente :

$$\frac{E(Pertes)}{Primes} = LR = 1$$

Dans le cas simplifié que nous étudions, le paramètre  $\beta$  est facilement calculable :

$$\frac{E(Limite * Nbindep)}{Primes} = LR$$

$$\beta = E(Nbindep) = LR * \frac{Primes}{Limite} = RoL$$

Avec  $RoL = \frac{Primes}{Limite}$ . Le RoL ou Rate on Line est le prix d'un euro de capacité. C'est un concept très utilisé en réassurance, en particulier pour comparer des prix entre des tranches qui possèdent des caractéristiques différentes.

Dans un cas plus compliqué avec un AAD et/ou un AAL la résolution n'est pas aussi simple. Il passe par l'optimisation du programme suivant :

$$\underset{\beta}{\text{Minimize}} \left( E \left( \text{Max} \left( \text{Min} \left( \sum_{k=1}^{N_{\text{indep}}} Limite * \mathcal{U}(0,1) - AAD, AAL \right), 0 \right) \right) - LR * Prime \right)^2$$

Sous contrainte :  $\beta \geq 0$

La résolution en détails, avec contrainte des autres tranches, est disponible dans [4].

Soit  $NbTot$  la fréquence moyenne générée des sinistres de la tranche. On considère que  $NbTot$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

On compte deux types de sinistres différents :

1. Les sinistres qui attachent entièrement la tranche. On note la fréquence moyenne liée à ces sinistres  $NbComple$ . Ces sinistres suivent une loi binomiale dont on détaillera les paramètres par la suite.

Dans ce cas, la sévérité est égale à la limite.

Il s'agit d'un modèle de fréquence-coût.

2. Les sinistres qui touchent partiellement la tranche. On note la fréquence moyenne liée à ces sinistres  $NbPartial$ . La loi de fréquence n'est pas directement connue.

Dans ce cas, la sévérité suit une loi uniforme sur la tranche.

Il s'agit d'un modèle fréquence-coût.

Ainsi on a :

$$NbTot = NbComple + NbPartial \quad (2.6)$$

On souhaite que la fréquence  $NbPartial$  soit la plus élevée possible dans le but d'avoir une modélisation des récupérations d'avantage continue et éviter de possible sauts de récupérations dû à  $NbComple$ . Nous pourrions être tentés de supprimer totalement la variable  $NbComple$  pour satisfaire cette hypothèse. Néanmoins, dans le modèle général, nous avons besoin de  $NbComple$  pour pouvoir assurer l'existence d'une solution au problème. Nous verrons par la suite que dans notre cas, cette hypothèse implique que  $NbComple$  est un variable aléatoire constante égale à 0.

Il est important de noter que la fréquence  $NbPartial$  peut être calculée comme la différence de la réalisation d'une loi de poisson de paramètre  $\lambda$  et de la réalisation d'une loi binomiale.

Avec ce modèle on peut écrire :

$$Pertes = \sum_{k=1}^{NbPartial} \mathcal{U}[0,1] * Limite + \sum_{k=1}^{NbComple} Limite$$

$$\frac{Pertes}{Limite} = \sum_{k=1}^{NbPartial} \mathcal{U}[0,1] + NbComple$$

On souhaite passer à l'espérance. Par indépendance entre le modèle de fréquence et le modèle de coût on obtient :

$$\frac{E(Pertes)}{Limite} = E(NbPartial) * E(\mathcal{U}[0,1]) + E(NbComple)$$

En utilisant l'étude du premier point :

$$\frac{Primes}{Limite} = \frac{E(NbPartial)}{2} + E(NbComplet)$$

Soit :

$$E(Nbindep) = \frac{E(NbPartial)}{2} + E(NbComplet)$$

Par l'équation (2.6) on peut en conclure :

$$E(NbTot) = 2 * E(Nbindep) - E(NbComplet) \quad (2.7)$$

Comme expliqué précédemment, on souhaite maximiser la fréquence *NbPartial*. A *NbTot* constant, cela revient à minimiser *NbComplet*. *NbComplet* suit une loi binomiale, il est donc possible de choisir :

$$E(NbComplet) = 0$$

Ainsi on obtient :

$$E(NbTot) = 2 * E(Nbindep) \\ \lambda = 2\beta$$

## Récapitulatif & Conclusion

L'étude consistait en la calibration du modèle qui permet de générer les récupérations sur les contrats de type excédent de sinistres que l'on note XS.

Nous nous sommes servis d'une hypothèse de Loss Ratio pour calibrer le modèle. La simplicité du cas étudié permet la détermination de manière exacte des paramètres du modèle, ce qui n'est pas forcément le cas de manière générale.

Dans le cas où l'XS n'est composé que d'une tranche avec AAD = 0 et AAL = Inf, les récupérations sont calculées à l'aide d'un modèle fréquence-sévérité avec :

1. Une loi de sévérité uniforme sur l'intervalle [0, Limite].
2. Une loi de fréquence de Poisson dont le paramètre dépend de l'hypothèse sur le Loss Ratio.

Les récupérations sont alors modélisées de la manière suivante :

$$Pertes = \sum_{k=1}^{NbTot} \mathcal{U}[0,1] * Limite$$

## Hypothèse de loi uniforme

L'hypothèse de la loi de sévérité comme étant une loi uniforme est une hypothèse de prudence dans le modèle. En effet, dans les faits, lorsqu'un ou plusieurs sinistres entraînent le dépassement de la priorité de l'XS, la priorité est plus souvent « peu » dépassée que « très » dépassée. Ainsi les lois de sévérité sont souvent représentées par des fonctions décroissantes. Le choix d'une loi uniforme traduit une volonté d'AXA SA d'introduire un facteur de prudence dans le modèle.



### 2.2.3 Calcul du bi-centenaire a priori

Un élément important à préciser lors de la modélisation des FACs est qu'elle permet de diversifier les FACs entre elles. Le calcul du bi-centenaire peut être parfois fait a priori, ie avant la modélisation. Pour les quotes-parts la valeur du bi-centenaire est une hypothèse du modèle : on sait à l'avance que le bi-centenaire d'une FAC vaut environ deux fois la valeur de la prime (car nous ne faisons pas une infinité de simulations). Pour les XS le résultat n'est pas aussi direct, on se propose dans cette partie de chercher à prédire le bi-centenaire avant de faire la modélisation des XS.

#### Préambule mathématiques

Par la suite, il sera intéressant de réaliser des intervalles de confiance sur certains quantiles de distributions. Ces quantiles ne sont pas forcément la médiane (ou la moyenne qui est le cas le plus courant). Ainsi, on rappelle les propriétés suivantes :

##### Propriété 1

On note  $q_\tau$  le quantile  $\tau$  d'un variable aléatoire  $X$  et  $f$  la fonction de masse de cette variable  $X$ . Les fonctions empiriques sont elles notées avec un chapeau.

$$\sqrt{n}(\hat{q}_\tau - q_\tau) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0; \frac{\tau(1-\tau)}{f^2(q_\tau)}\right)$$

Alors l'intervalle de confiance à 95% autour du quantile empirique  $\tau$  est :

$$IC_{0,95}(\hat{q}_\tau) \simeq q_\tau \pm 1,96 * \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)}{n * f(q_\tau)^2}}$$

La propriété 2 est similaire à la 1. Elle permet d'utiliser  $\hat{f}(\hat{q}_\tau)$  à la place de  $f(q_\tau)$ .

##### Propriété 2

En gardant les même notations que dans la propriété 1,

$$\sqrt{n} \frac{\hat{f}(\hat{q}_\tau)}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} (\hat{q}_\tau - q_\tau) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; 1)$$

Alors l'intervalle de confiance à 95% autour du quantile empirique  $\tau$  est :

$$IC_{0,95}(\hat{q}_\tau) \simeq q_\tau \pm 1,96 * \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)}{n * \hat{f}(\hat{q}_\tau)^2}}$$

Les démonstrations des deux propriétés précédentes, en particulier la seconde, se trouvent dans [3], au sein de l'annexe D.2.

## XS : Approximation du bi-centenaire

On rappelle que nous simulons 50 000 scénarios. Ainsi, le bi-centenaire correspond à la 250ème plus grande valeur des strips simulés. En effet, le quantile 99,5% correspond à la  $50\,000 * 0,995 = 250$ ème plus grande valeur. Lors de la modélisation des XS on peut alors distinguer deux cas :

1. La tranche est touchée, au moins une fois, dans strictement moins de 250 scénario. Dans ce cas, le bi-centenaire est égal à 0.
2. La tranche est touchée 250 fois ou plus. Dans ce cas, il faut étudier les quantiles de la loi de sévérité sous-jacente. Ici, c'est une loi uniforme.

Avant tout on peut étudier dans quel cas on se trouve le plus souvent. On rappelle que la loi qui décide combien de fois la tranche est touchée est une loi de Poisson que l'on note  $Y$ . Le paramètre de cette loi de Poisson est  $\lambda = 2 * RoL$ . En gardant les mêmes notations que la partie 2.2.2, voici un tableau donnant les quantiles (en excluant le min et max) des RoLs ( $= \beta$ ) :

quantiles	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$10^4 * \beta$	1,5	2,1	2,5	3,3	5,0	8,2	15,9	40,9	138,4
$10^4 * \lambda$	3,1	4,1	5,0	6,6	10,0	16,5	31,7	81,9	276,8
$\mathbb{P}(Y \geq 1)$	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0010	0,0016	0,0032	0,0082	0,0273

Notons  $X$  la variable aléatoire suivante :

$$\begin{cases} X = 1 & \text{si la tranche est touchée au moins une fois} \\ X = 0 & \text{si la tranche n'est pas touchée} \end{cases}$$

$X$  suit alors une loi de Bernouilli de paramètre  $p = \mathbb{P}(Y \geq 1)$ . On souhaite compter le nombre de succès de  $X$  lorsque l'on fait  $n$  tirages. Ainsi on définit :

$X_i \sim X$  pour tout  $i$  dans  $[1 ; n]$ . Les  $X_i$  sont supposées indépendantes entre elles.

$$\bar{X}_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

$\bar{X}_n$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $p$  et  $n$ . On a  $\bar{X}_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ . En particulier on peut calculer en moyenne combien de succès nous aurons lors de la simulation de 50 000 scénarios :

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = n * p = 50000 * \mathbb{P}(Y \geq 1)$$

Ainsi, on peut compléter le tableau précédent de la manière suivante :

quantiles	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$10^4 * \beta$	1,5	2,1	2,5	3,3	5,0	8,2	15,9	40,9	138,4
$10^4 * \lambda$	3,1	4,1	5,0	6,6	10,0	16,5	31,7	81,9	276,8
$\mathbb{P}(Y \geq 1)$	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0010	0,0016	0,0032	0,0082	0,0273
$\mathbb{E}(\bar{X}_{50000})$	15	21	25	33	50	82	158	407	1365

On remarque en premier lieu qu'uniquement environ 30% des FACs possèdent une  $\mathbb{E}(\bar{X}_{50000})$  supérieur à 250, qui est le nombre de scénarios dont la modélisation a besoin pour avoir un bi-centenaire non nul. Néanmoins, il ne s'agit que de la moyenne, il est possible de s'en éloigner.

Dans la suite, pour le besoin d'un exemple, on se place dans le cas  $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-4}$ . On souhaite obtenir une information de concentration autour de la moyenne  $\mathbb{E}(\bar{X}_{50000}) = 33$ . Pour ce faire on peut utiliser deux inégalités : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'inégalité d'Hoeffding. Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ , ces inégalités pour la loi binomiale sont :

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_{50000} - \mathbb{E}(\bar{X}_{50000})| \geq \sqrt{50000} * x) \leq \frac{p(1-p)}{x^2}$$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_{50000} - \mathbb{E}(\bar{X}_{50000})| \geq \sqrt{50000} * x) \leq 2exp(-2x^2)$$

Après simplification, on approxime  $\sqrt{50000}$  par 223,6 pour obtenir :

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_{50000} - 33| \geq 223,6 * x) \leq \frac{7 * 10^{-4}}{x^2}$$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_{50000} - 33| \geq 223,6 * x) \leq 2exp(-2x^2)$$

On va chercher à prendre des valeurs  $x$  de l'ordre de  $10^{-1}$  ou  $10^{-2}$  dans le but que  $223,6 * x$  soit de l'ordre de la dizaine. De plus il faut que pour ces valeurs de  $x$ , l'inégalité nous apporte une information plus précise que le fait que la probabilité soit inférieur à 1. Ainsi il faut résoudre pour  $x$  positif :

$$\frac{7 * 10^{-4}}{x^2} \leq 1 \iff x \geq \sqrt{7 * 10^{-4}} \approx 0,026 = x_{lim}^{B-T}$$

$$2exp(-2x^2) \leq 1 \iff x \geq \sqrt{\frac{\ln(2)}{2}} \approx 0,59 = x_{lim}^{Hoeffding}$$

Ainsi, l'inégalité de Hoeffding n'est pas intéressante dans notre cas, car pour le  $x_{lim}^{Hoeffding}$ , l'inégalité la plus précise que l'on a est sur un écart de 132 à la moyenne, qui vaut elle 33. On se concentre donc sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour Bienaymé-Tchebychev, le cas pour  $x_{lim}^{B-T}$  donne un écart le plus précis à 6. On double pour cet écart pour l'étude. L'écart doublé de 12 donne  $x=0,054$ . Ainsi on trouve l'intervalle d'étude de  $x : I_x = [0,026; 0,054]$ . On s'intéresse à  $\sqrt{50000} * I_x = [5,81; 12]$  et en particulier aux valeurs entières. On obtient donc le tableau suivant :

$\sqrt{50000} * x$	$x$	Inégalité
6	0,027	$\mathbb{P}( \bar{X}_{50000} - 33  \geq 6) \leq 0,97$
7	0,031	$\mathbb{P}( \bar{X}_{50000} - 33  \geq 7) \leq 0,71$
8	0,036	$\mathbb{P}( \bar{X}_{50000} - 33  \geq 8) \leq 0,55$
9	0,040	$\mathbb{P}( \bar{X}_{50000} - 33  \geq 9) \leq 0,43$
10	0,045	$\mathbb{P}( \bar{X}_{50000} - 33  \geq 10) \leq 0,35$
11	0,049	$\mathbb{P}( \bar{X}_{50000} - 33  \geq 11) \leq 0,29$
12	0,054	$\mathbb{P}( \bar{X}_{50000} - 33  \geq 12) \leq 0,24$

Ainsi, on peut dire que  $\bar{X}_{50000}$  est plutôt concentré autour de sa moyenne. Ci-dessous, on représente graphiquement la densité de la variable aléatoire :

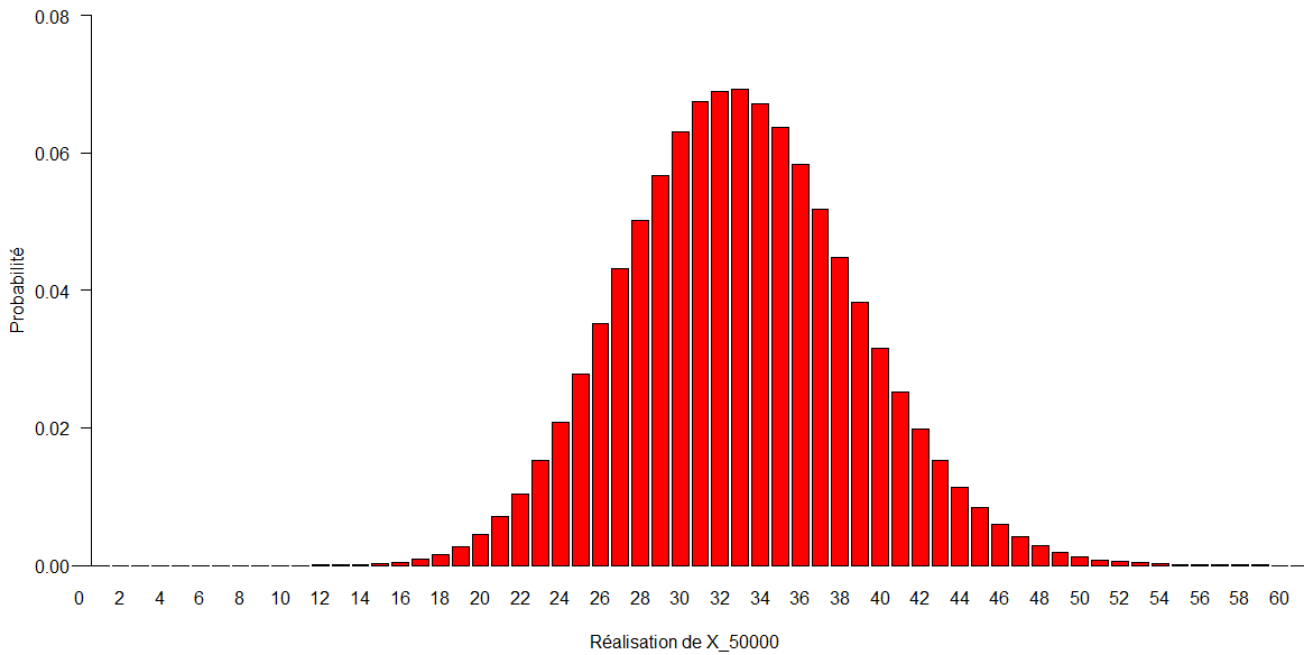


FIGURE 2.5 – Densité de la loi de  $\bar{X}_{50000}$  dans le cas  $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-4}$   
Graphique réalisé sur un million de simulations.

Pour compléter et conclure cette étude, on a simplement rajouté au tableau précédant la probabilité que  $\bar{X}_{50000}$  soit supérieur à 250. On obtient le tableau final suivant :

quantiles	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$10^4 * \beta$	1,5	2,1	2,5	3,3	5,0	8,2	15,9	40,9	138,4
$10^4 * \lambda$	3,1	4,1	5,0	6,6	10,0	16,5	31,7	81,9	276,8
$\mathbb{P}(Y \geq 1)$	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0010	0,0016	0,0032	0,0082	0,0273
$\mathbb{E}(\bar{X}_{50000})$	15	21	25	33	50	82	158	407	1365
$\mathbb{P}(\bar{X}_{50000} \geq 250)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

L'évolution est très marquée entre le quantile 7 et le quantile 8. On s'intéresse donc aux quantiles situés entre 7 et 8 afin d'observer leur évolution :

quantiles	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79
$10^4 * \beta$	16,7	18,4	20,0	22,4	24,4	26,9	29,6	32,9	36,0
$10^4 * \lambda$	33,4	36,9	40,1	44,9	48,8	53,8	59,3	65,7	72,0
$\mathbb{P}(Y \geq 1)$	0,0033	0,0037	0,0040	0,0045	0,0049	0,0054	0,0059	0,0066	0,0072
$\mathbb{E}(\bar{X}_{50000})$	167	184	200	224	243	268	296	328	359
$\mathbb{P}(\bar{X}_{50000} \geq 250)$	0	0	0	0,05	0,36	0,89	1	1	1

Il faut noter que  $\mathbb{E}(\bar{X}_{50000}) = 250$  est atteinte pour  $\mathbb{P}(Y \geq 1) = 0,005$  qui est elle même atteinte pour  $\text{RoL} = \beta = 0,005 = \text{RoL}_{Lim}$ . Dans la suite, on considère que fixer le RoL de la FAC de type XS fixe aussi le nombre de fois où la tranche est touchée. Ce nombre sera égal à la moyenne étudiée précédemment, c'est à dire  $\mathbb{E}(\bar{X}_{50000})$ . En considérant la concentration autour de cette moyenne, l'hypothèse est raisonnable. En effet, le RoL fixe la loi qui donne le nombre de fois où la tranche

est touchée et d'après l'étude précédente cette loi dévie peu de sa moyenne. Ainsi, il est raisonnable d'utiliser cette approximation. On rappelle que la loi de sévérité est une loi uniforme sur  $[0, \text{Limite}]$ . Quitte à multiplier par la limite, on étudie le cas où cette limite est égale 1.

Ainsi, on peut remarquer que dans 75% des cas, le bi-centenaire d'une FAC de type XS est égal à 0. L'étude porte sur les 25% restant. On explique l'étude à travers un exemple se trouvant dans les 25%. Ainsi sans perte de généralité, on se place dans le cas  $\lambda = 0,00819$ , ce qui donne  $\mathbb{E}(\bar{X}_{50000}) = 407$ . On restreint le strip de 50 000 simulations au strip des 407 simulations non nulles. Ainsi, le bi-centenaire du strip de 50 000 simulations correspond à la 250<sup>ème</sup> plus grande valeur du sous-strip de 407 simulations car les 49593 autres valeurs sont nulles. Le bi-centenaire correspond aussi à la  $(\mathbb{E}(\bar{X}_{50000}) - 250)$ <sup>ème</sup> plus petite valeur du sous-strip soit la 157<sup>ème</sup> plus petite valeur. Cette valeur permet de calculer le quantile du sous-strip qui correspond au bi-centenaire. Dans notre cas, on cherche la 157<sup>ème</sup> plus petite valeur sur 407, ainsi il s'agit du quantile  $\frac{157}{407} = 0,39$ . La loi de sévérité étant une loi uniforme sur  $[0,1]$  on a  $q_\tau = \tau$ . Donc il semblerait que le bi-centenaire de cette FAC soit environ de 0,39. 407 étant un nombre de simulations plutôt faible, on se propose de regarder un intervalle de confiance à 95% autour de ce quantile. Connaissant la loi sous-jacente, on applique donc la propriété 1 :

$$IC_{0,95}(\hat{q}_{0,39}) = 0,39 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{0,39(1-0,39)}{407 * 1^2}}$$

$$IC_{0,95}(\hat{q}_{0,39}) = 0,39 \pm 0,05$$

A hauteur de 95%, le bi-centenaire se trouve dans l'intervalle  $[0,34;0,44]$ .

### Formule générale & conclusion

On peut résumer la situation comme suit :

$$\text{Bi-centenaire} = \begin{cases} 0 & \text{si } RoL \leq RoL_{lim} = 0,005 \\ q_\tau = \tau = \frac{\mathbb{E}(\bar{X}) - n * RoL_{lim}}{\mathbb{E}(\bar{X})} = \frac{\mathbb{P}(Y \geq 1) - RoL_{lim}}{\mathbb{P}(Y \geq 1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Bi-centenaire} = \max\left(0, \frac{\mathbb{P}(Y \geq 1) - RoL_{lim}}{\mathbb{P}(Y \geq 1)}\right)$$

Néanmoins, cette valeur peut être assez approximative compte tenu de la valeur parfois faible de  $\mathbb{E}(\bar{X})$ . Ainsi, on complète la valeur par un intervalle de confiance de la forme :

$$IC_{0,95}(\hat{q}_\tau) = \max(0, \tau) \pm 1,96 * \sqrt{\frac{\max(0, \tau)(1 - \max(0, \tau))}{\mathbb{E}(\bar{X})}}$$

Si l'on fixe  $n = 50\ 000$ , le bi-centenaire et l'intervalle de confiance ont besoin de deux quantités pour être calculé :  $\tau$  et  $\mathbb{E}(\bar{X})$ . En considérant la formule de  $\tau$ , uniquement  $\mathbb{E}(\bar{X})$  est utile. Ainsi, la valeur du bi-centenaire est entièrement déterminé par le RoL de la facultative, et indirectement par toutes les hypothèses de modélisation des XS. A priori, avec le RoL, on peut prévoir la valeur du bi-centenaire.

## Comparaison à la modélisation

Finalement, on souhaite comparer les résultats théoriques précédents aux résultats obtenus par la modélisation. On utilise deux méthodes de comparaison qui répondent aux deux questions suivantes :

1. Est-ce que le bi-centenaire empirique est inclus dans l'intervalle de confiance ?
2. De combien le bi-centenaire empirique est-il différent du bi-centenaire théorique ?

Les données utilisées pour les calculs sont explicitées dans la partie suivante. Ici, il suffit de savoir qu'il y a 1538 contrats de type XL dans notre BDD. Voici un résumé qui répond à la première question :

	Oui	Non	Tot
Inclus dans l'IC à 95% ?	1381	157	1538
En pourcentage	90%	10%	100%

TABLE 2.1 – Nombre de FACs incluses dans leur propre intervalle de confiance

On observe que dans 90% de cas, le bi-centenaire se trouve dans l'intervalle de confiance. Ce dernier est sensé couvrir 5% d'erreur. Or, ici, 10% des résultats sont en dehors de l'intervalle. Plusieurs explications peuvent être apportées. En particulier, on peut noter qu'il s'agit de 5% dépendant de la valeur de  $\mathbb{E}(\bar{X})$  qui est elle aussi aléatoire (mais fixée par hypothèse dans l'étude théorique). Pour palier ce problème, on pourrait par exemple réaliser un intervalle de confiance sur  $\mathbb{E}(\bar{X})$  et utiliser les bornes obtenues pour obtenir un intervalle plus large. De plus ces résultats sont dépendants du nombre total de contrat, il est possible qu'avec plus de contrats de type XL on se rapproche d'une répartition 95% et 5%.

Pour répondre à la seconde question, voici un tableau récapitulatif :

Différence en %	0%	]0,5%]	]5%,10%]	]10%,15%]	]15%,20%]	]20%, inf]
Nombre de Facs	1163	253	40	11	17	54

TABLE 2.2 – Ecart en pourcentage du bi-centenaire empirique comparé au bi-centenaire théorique.

Dans ce tableau, la colonne 0% correspond au bi-centenaire valant à la fois en bi-centenaire théorique et en bi-centenaire empirique. Dans les simulations, on retrouve cinq cas où le bi-centenaire théorique vaut 0 et le bi-centenaire empirique est strictement positif. Ces cinq cas, de part la formule  $\frac{\text{Empirique}-\text{Theorique}}{\text{Empirique}}$ , ont une différence de 100% et se trouve au sein de la catégorie ]20%, inf]. On retrouve une majorité de bi-centenaires empiriques assez proches de leur équivalent théorique. Néanmoins, on peut noter tout de même une cinquantaine de facs empiriques assez éloignées de leur équivalent théorique. Sur ces FACs, il pourrait être intéressant de réaliser un plus grand nombre de simulation pour observer si cela permet d'inclure leur bi-centenaire issu de la modélisation dans l'IC théorique à 95%.

Ainsi, le calcul du bi-centenaire à priori est compliqué et imparfait. Mais, la formule finale est facilement utilisable et ne coûte pas de temps de calcul, ce qui peut être intéressant. Néanmoins, les résultats montrent que la méthode est fiable pour trouver les bi-centenaires nuls. Pour les bi-centenaires non nuls, malgré des résultats encourageants avec une majorité d'écarts faibles, il resterait à affiner la modélisation pour les cas où l'écart est plus important.

## 2.3 Etude de la base de données

### 2.3.1 Présentation de la base de données

La base de données utilisée est une base de données interne au groupe AXA. Cette BDD provient d'un outil que l'on appelle "eDeclare". Elle est appelée J1 ou FAC500. C'est une base de données déclarative, c'est-à-dire que chaque entité du groupe AXA reporte elle-même ses facultatives dans eDeclare. Les équipes d'AXA SA ne font qu'en extraire les données depuis cet outil. Cette méthode de reporting possède des avantages et des inconvénients. D'une part, les entités sont les plus à même de connaître l'entièreté de leurs facultatives. Ainsi on peut s'attendre à avoir une BDD complète et précise des facultatives du groupe. Néanmoins, il reste possible qu'il y ait des erreurs de saisie de données de la part des entités. Il est de la responsabilité du GSC de vérifier qu'il n'y a pas de valeurs aberrantes dans les données qui peuvent fausser le calcul du SCR et de l'exposition aux réassureurs. Nous verrons dans la suite que différentes règles pour limiter les données aberrantes ont été mises en place. Il est important de comprendre que, chez AXA SA, les contrats de chaque FAC ne sont pas disponibles, seule cette BDD l'est. Ainsi, une FAC peut être mal saisie dans l'outil eDeclare, mais si les informations restent vraisemblables il est très difficile de conclure à une erreur. La fiabilisation des données d'eDeclare reste donc un sujet d'actualité au sein d'AXA SA.

La BDD doit passer des tests réalisés par l'équipe du Group Security Committee (GSC) pour voir si toutes les facultatives suivent les directives du groupe. Comme dit précédemment, le groupe impose des règles aux entités sur certaines caractéristiques de leurs facultatives et de la contrepartie utilisée. Néanmoins, il est possible pour les entités de demander des dérogations à ces règles.

La base de données possède une soixante de colonnes qui ne sont pas toutes utiles pour les études qui vont suivre. Nous nous limiterons uniquement à certaines informations :

1. un ID de la FAC unique par FAC.
2. la prime associée à la FAC.
3. la limite associée à la FAC.
4. le type de contrat : Quote-part ou Excédent de sinistre.
5. la période de validité du contrat.
6. l'entité AXA qui a cédée la FAC. La FAC n'est pas forcément cédée à 100%. Ainsi, cette information est accompagnée d'une valeur indiquant la part de la FAC qui est cédée.
7. le réassureur à qui l'entité AXA cède la FAC. De même précédemment, il est possible que la FAC soit cédée à plusieurs réassureurs. Cette information est donc accompagnée d'une valeur indiquant la part de la FAC qui est cédée à ce réassureur.

Il est à préciser que nous avons fait le choix de ne retenir pour cette étude presque aucune FAC de l'entité AXA XL. En effet, AXA XL est une entité récente acquise en 2018 par le groupe AXA, elle-même scindée en plusieurs entités qui possèdent toutes des facultatives. Leur profil de risques est assez singulier comparé aux autres entités AXA. De plus, AXA XL possède environ autant de FACs que toutes les autres entités du groupe réunies et mérite donc une analyse dédiée. Néanmoins, les facultatives d'XL Brésil forment en réalité un portefeuille de risques issus de la souscription d'AXA Brésil. Ce portefeuille est relativement faible en volume de primes et est homogène aux portefeuilles des autres entités AXA. Il a donc été décidé de le garder dans notre étude.

### **2.3.2 Statistiques Descriptives**

La partie qui suit présenter la base de données à travers une série de statistiques descriptives. Elles sont présentées ici sous forme de tableaux. Les deux tableaux de la page suivante sont également disponibles sous forme de graphique dans les annexes. On souhaite étudier les données à travers deux prismes : la ligne de business (LoB) et l'entité cédant la FAC au marché de la réassurance. On rappelle que AXA SA ne possède aucune FAC, les facultatives étudiée par la suite sont donc exclusivement en cession directe entre l'entité AXA et le marché de la réassurance.

Les chiffres présentés sont dérivés de la base de données réelle que nous utilisons mais ont été modifiés pour garantir l'anonymat des données. Nous avons toutefois fait tourner les modèles sur ces données modifiées pour garder cohérente l'analyse.



Line of Business	Nombre de FAC	Prime totale (en millions d'euros)	Prime moyenne (en milliers d'euros)
Agriculture	2	0.02	7.95
Other	7	0.15	21.29
Aviation	199	25.68	129.05
Contingency risk	26	3.51	135.04
Credit / Bond	921	24.41	26.50
CYBER	1	0.02	21.04
EAR/CAR	1 654	86.27	52.16
Financial risks	97	7.32	75.47
Fine Art	1 832	10.75	5.87
Liability	7 039	108.37	15.25
Motor liability	375	30.38	81.02
Personal accident	1 833	19.19	42.48
Property per risk	7 837	332.95	42.48
Technical risks	196	10.82	55.21
Transport marine	5 702	49.07	8.61
Total	27 721	707.92	25.54

Entité AXA	Nombre de FAC	Prime totale (en millions d'euros)	Prime moyenne (en milliers d'euros)
Asie	8 781	91.95	10.47
XL Brazil	310	21.93	70.76
Afrique	573	34.86	60.84
Algérie	41	1.62	39.62
Maroc	638	32.36	50.72
Belgium	331	30.81	93.07
Brazil	206	5.52	26.82
Colombia	1 051	64.90	61.75
Czech	3	0.01	2.42
Egypt	361	10.23	28.35
France	546	75.03	137.41
Germany	1 243	27.63	22.23
Greece	408	10.94	26.81
Gulf	245	13.29	54.23
Ireland	138	4.92	35.66
Italie	1 250	12.34	9.87
Luxembourg	68	5.22	76.75
Mexique	1 171	116.03	99.09
Middle East	502	5.93	11.81
Poland	2 123	17.94	8.45
Spain	174	12.26	70.46
Suisse	39	8.39	215.123
Turkey	6 454	71.69	11.11
UK	59	9.55	161.91
KSCP	1 006	22.56	22.43
Total	27 721	707.92	25.54

TABLE 2.3 – Etude univariée sur la répartition des FACs en fonction de deux variables : la LoB et l'entité cédante.

La base de données contient au total 27 721 FACs réparties sur 15 LoB et 25 entités AXA. Les entités AXA présentées ici sont pour la plupart situées dans un seul pays : AXA Turkey, AXA Mexique, AXA Suisse ou encore AXA France. Néanmoins, il est possible que ce soit des regroupements d'entités. Certaines entités par pays sont de taille plus réduites que d'autres, on les regroupe donc par région ou par continent. Par exemple, AXA Afrique contient toutes les entités du continent africain qui sont de tailles trop faibles pour apparaître seules dans la base de données, contrairement au Maroc ou à l'Algérie. Dans AXA Afrique on retrouvera ainsi les entités du Cameroun, de la Côte d'Ivoire, du Gabon, du Nigeria et du Sénégal. Il en est de même pour AXA ASIE qui est un regroupement de 9 entités.

### **Etude par LoB**

Les FACs AXA SA sont centralisées autour de trois lignes de business majeures : Property per risk, Transport and Marine et liability. A elles trois, elles représentent 20 578 Facs soit les trois-quarts des Facs d'AXA SA. Plus généralement, on peut extraire trois groupes de LoB :

- Nombres de Facs  $\geq 5000$  : ce groupe comporte 3 LoBs différentes pour un total de 20 578 Facs.
- $1000 \leq$  Nombres de Facs  $\leq 5000$  : ce groupe comporte 3 LoBs différentes pour un total de 5319 Facs.
- $0 \leq$  Nombres de Facs  $\leq 1000$  : ce groupe comporte 9 LoBs différentes pour un total de 1824 Facs.

Certaines LoBs représentent des volumes totales de primes plus élevées que d'autres. La ligne de business property per risk correspond à 47% des primes totales de la base de données. Néanmoins, lorsque l'on regarde les primes moyennes des LoB, on retrouve d'autres LoB en tête. Les FACs d'aviation, de contingency risk et de Motor liability sont les plus chères de la BDD, avec des primes moyennes pouvant atteindre plus d'une centaine de milliers d'euros par FAC. De l'autre côté de la distribution, on retrouve les plus faibles primes en Transport and marine, Fine art ou Agriculture. A noter que le faible nombre de facs en Agriculture rend l'exploitation de ses valeurs impossible.

### **Conclusion de l'étude par LoB**

On peut pour le moment conclure que la LoB Property per risk semble la plus importante de la BDD comme elle concentre un peu plus du quart des FACs et presque la moitié des primes. Les FACs sont essentiellement composées du trio de LoB Property per risk, liability et transport and marine.

### **Etude par entité**

Au sein des entités AXA, lorsque l'on regarde le nombre de FACs, on se rend compte que l'activité liée aux facultatives est très forte dans les marchés émergents comme l'Asie, la Turquie ou encore le Mexique. Ces trois marchés représentent 16 406 facs soit 59% des FACs de la BDD. Néanmoins, le volume de prime par FAC dans les marchés de l'Asie et de la Turquie est plutôt faible. Ce qui n'est pas le cas du Mexique qui a lui un volume de primes par FAC très élevé, à un niveau similaire a des marchés développés comme la Belgique. Ainsi, le Mexique est une entité intéressante car elle possède autant de FACs que les entités des pays émergents tout en ayant des volumes de prime similaire à ceux des marchés développés.

Les entités AXA ayant, en volume totale de prime, le plus recours aux facultatives semblent être le Mexique, l'Asie, la France ainsi que la Turquie. Ces entités comptabilisent 50% des primes totales du groupe.

Les marchés développés sont caractérisés par des volumes de primes par FAC élevés ainsi qu'un nombre de FACs plutôt faible. Parmi eux, on peut compter le Royaume-Uni, la Belgique, la Suisse ou

encore la France. On peut remarquer que certaines exceptions subsistent comme l'Allemagne avec un nombre de FACs de 1243 ainsi qu'une prime par FAC plutôt faible de 22 000 euros. L'Italie se trouve dans le même cas. Dans une moindre mesure, la Pologne est une économie développée et possède toutes les caractéristiques des marchés émergents avec beaucoup de FACs qui possèdent une prime par FAC faible (de l'ordre de 9 000 euros).

### Conclusion de l'étude par entité

On peut décrire deux groupes principaux d'entités en fonction l'état du marché dans lequel elles se trouvent. Ces règles possèdent des exceptions, mais montrent tout de même une tendance : le couple (Fort nombre de FACs, Faibles primes) est plutôt propre aux marchés émergents alors que le couple (Faible nombre de FACs, Fortes primes) est caractéristique des marchés développés.

### Etude à la maille LoB x Entité

Les tableaux complets étant de taille conséquente ils se trouvent en annexe 4.14 et 4.17. On retrouve un tableau croisé pour le nombre de facultatives par (Entité x LoB) ainsi qu'un tableau représentant la prime totale pour cette même maille. Dans la suite, on présente deux sous-tableaux avec certaines entités et LoBs discutées précédemment.

Cédante	EAR/CAR	Credit / Bond	Fine Art	Liability	Personal Accident	Property per risk	Transport marine
Asie	76	195	1 695	3 022	856	2 032	853
Maroc	47		1	350		166	62
France	113	62		10	26	274	2
Germany	29	2		41	6	1 088	5
Italie		2		267	873	22	
Mexique	37		95	333	29	479	84
Poland	1 118	622	34	202		91	
Suisse	2	6		3	4	10	8
Turkey	38		2	1 203	8	1 011	4 183

TABLE 2.4 – Nombre de FAC - Sous-tableau de la maille Entité x LoB

Cédante	EAR/CAR	Credit / Bond	Fine Art	Liability	Personal Accident	Property per risk	Transport marine
Asie	6 581	4 946	10 120	13 762	933	41 852	12 806
Maroc	931		7	2 667		21 877	2 441
France	39 200	4 193		8 980	3 097	16 513	9
Germany	7 922	246		1 421	215	11 968	130
Italie		864		721	7 337	64	
Mexique	5 391		501	8 869	4 703	84 821	7 988
Poland	4 302	5 757	46	6 563		485	
Suisse	17	5 305		175	203	321	1 085
Turkey	3 244		8	26 552	58	36 943	4 607

TABLE 2.5 – Prime totale en milliers des FACs - Sous-tableau de la maille Entité x LoB

Ces tableaux permettent d'expliciter sur quelle ligne de business chaque entité est très impliquée. Ainsi, on observe que au sein des 5 702 FACs sur la LoB Transport and Marine les trois quarts se trouvent au sein de l'entité de la Turquie. Néanmoins, si les valeurs sont analysées en volume terme de volume, on peut remarquer que des entités possédant bien moins de FACs ont un volume de primes associées supérieur à celui de la Turquie, c'est le cas de l'Asie et du Mexique. De manière générale les Tableaux montrent bien les différences entre les marchés développés et les marchés émergents. Par exemple, sur la LoB Property per risk , la France possède 8 fois moins de facultatives que l'Asie mais un volume total de primes uniquement 2,5 fois moindre. On peut aussi remarquer que sur la LoB EAR/CAR, la France possède presque 50% du volume total de primes alors qu'elle ne possède qu'une centaine de FACs sur un total de 1654.

Type de contrat	Nombre de FAC	Primes	Prime moyenne
QS	26 183	570 052 075	21 772
XL	1 538	137 863 266	89 638
Total	27 721	707 915 341	25 537

TABLE 2.6 – Etude de la variable "Type de contrat"

Les facultatives sont majoritairement des quote-parts, que ce soit en terme de nombres de FACs ou en volume total de primes. Les quote-parts correspondent à 94% des facultatives ainsi qu'à 80% des primes totales. On note que les primes moyennes par FAC sont environ 4 fois plus conséquentes en excédent de sinistre qu'en quote-part.

LoB	QS (en millions d'euros)	XL (en millions d'euros)	Total (en millions d'euros)
Agriculture	0.02		0.02
Other	0.15		0.15
Aviation	25.68	0.004	25.68
Contingency risks	3.41	0.10	5.51
Credit / Bond	21.15	3.26	24.41
CYBER	0.02		0.02
EAR/CAR	43.34	42.93	86.27
Financial risks	2.44	4.88	7.32
Fine Art	10.74	0.01	10.75
Liability	84.70	22.66	107.37
Motor liability	28.03	2.35	30.38
Personal accident	19.07	0.12	19.19
Property per risk	277.15	55.81	332.95
Technical risks	6.75	4.07	10.82
Transport and marine	47.41	1.66	49.07
Total	570.05	137.86	707.92

TABLE 2.7 – Etude de la variable "Type de contrat" à la maille LoB

La première remarque que l'on peut faire à propos du tableau 2.7 est que les excédents de sinistres sont un type de contrat que l'on retrouve quasi exclusivement sur trois LoBs : la EAR/CAR, la liability ainsi que la property per risk. Une seconde remarque est que le marché des QS est dominé par 4 LoBs :

la property per risk, la liability, la Transport and marine ainsi que la EAR/CAR. Au niveau des totaux, on retrouve à nouveau les LoBs qui sont majoritaires en QS. C'est un résultat auquel on peut s'attendre en considérant que les QS sont très majoritaires.

Entité AXA	QS (en millions d'euros)	XL (en millions d'euros)	Total (en millions d'euros)
Asie	90.10	1.85	91.95
XL Brazil	21.81	0.13	21.94
Afrique	34.86	0.001	34.86
Algérie	1.62		1.62
Maroc	32.34	0.02	32.36
Belgium	25.61	5.20	30.81
Brazil	5.52		5.52
Colombia	53.59	11.31	64.90
Czech	0.01		0.01
Egypt	10.23		10.23
France	25.11	49.92	75.03
Germany	18.16	9.46	27.63
Greece	6.38	4.56	10.94
Gulf	12.54	0.75	13.29
Ireland	4.92		4.92
Italie	12.31	0.03	12.34
Luxembourg	4.93	0.29	5.22
Mexique	68.58	47.45	116.03
Middle East	5.92	0.01	5.93
Poland	17.79	0.15	17.94
Spain	10.82	1.44	12.26
Suisse	6.03	2.36	8.39
Turkey	69.88	1.82	71.69
UK	9.02	0.53	9.55
KSCP	21.98	0.58	22.56
Total	570.05	137.86	707.92

TABLE 2.8 – Etude de la variable "Type de contrat" à la maille Entité AXA

Dans ce tableau, on retrouve une domination au sein du marché des XLs de deux entités : la France et le Mexique. A elles deux, elles représentent 71% des primes de ce type de contrat.

On retrouve aussi que, comme précédemment, des entités comme l'Asie, le Mexique ou la Turquie dominant le marché des QS. Il est à noter que la France est la seule entité à posséder, en volume de primes, plus de facultatives de type XL que de type QS.

LOB	Nombre de jours moyens couverts par la FAC	Nombre d'années moyennes couvertes par la FAC
Agriculture	69.67	0.2
Other	413.75	1.1
Aviation	342.84	0.9
Contingency risks	416.58	1.1
Credit / Bond	1 709.94	4.7
CYBER	365.00	1.0
EAR/CAR	2 018.24	5.5
Financial risks	368.84	1.0
Fine Art	363.66	1.0
Liability	818.29	2.2
Motor liability	360.17	1.0
Personal accident	212.74	0.6
Property per risk	377.01	1.0
Technical risks	472.55	1.3
Transport and marine	165.28	0.5
Total	576.14	1.6

TABLE 2.9 – Etude de la variable "Validité du contrat" à la maille LoB

Les facultatives possèdent assez majoritairement des durées de validité d'une année. Les exceptions notables se découpent en deux catégories :

1. Les Facs de demi-année, comme par exemple les LoBs Transport and marine ainsi que celle de Personal accident.
2. Les Facs d'environ 5 ans. On note les LoBs de Credit/Bond ainsi que celle d'assurance construction EAR/CAR.

Entité AXA	Nombre de FAC	Indice d'Herfindahl	Indice d'Herfindahl normalisé
Asie	8 781	26.93	21.71
XL Brésil	310	37.21	32.72
Afrique	573	23.41	17.94
Algérie	41	86.38	85.41
Maroc	638	48.91	45.26
Belgium	331	33.92	29.20
Brazil	206	37.59	33.13
Colombia	1 051	40.69	36.46
Czech	3	100.00	100.00
Egypt	361	36.18	31.63
France	546	34.18	29.48
Germany	1 243	31.36	26.46
Greece	408	35.27	30.65
Gulf	245	39.66	35.34
Ireland	138	56.14	53.00
Italie	1 250	43.58	39.55
Luxembourg	68	87.17	86.26
Mexique	1 171	54.92	51.70
Middle East	502	87.98	87.12
Poland	2 123	29.68	24.66
Spain	174	47.51	43.76
Suisse	39	44.25	40.26
Turkey	6 454	40.89	36.66
UK	59	96.60	96.36
KSCP	1 006	22.94	17.43
Total	27 721	26.93	21.72

TABLE 2.10 – Indice d'Herfindahl pour les LoB à la maille Entité

L'indice d'Herfindahl est un indice qui mesure la concentration de marché : plus l'indice est élevé, plus le marché est concentré. On le note IHH pour indice de Herfindahl-Hirschman. L'indice se calcule comme la somme des parts de marché au carré. Dans notre cas, on regarde les parts de chaque LoB au sein d'une entité. On rappelle qu'il y a 15 LoBs différentes. Pour l'entité  $j$ , le calcul est alors :

$$IHH_j = \sum_{i=1}^{15} s_{i,j}^2 \text{ avec } s_{i,j} = \frac{\text{Primes totales de la LoB } i \text{ de l'entité } j}{\text{Primes totales de l'entité } j}$$

Pour plus de lisibilité, on regarde plutôt l'indice  $IHH' = 100 \times IHH$ . L'IHH est toujours supérieur à  $\frac{1}{\text{Nombre de LoB}}$ . Ainsi, dans notre étude,  $IHH' \in [6,7; 100]$ .

Il est possible de normaliser l'indice pour qu'il soit compris entre 0 et 1 (ou 0 et 100 ici après multiplication). Il suffit d'utiliser la formule suivante :

$$IHH_j^{\text{Normalisé}} = \frac{IHH_j - \frac{1}{\text{Nombre de LoB}}}{1 - \frac{1}{\text{Nombre de LoB}}} = \frac{IHH_j - \frac{1}{15}}{1 - \frac{1}{15}}$$

La République Tchèque ne possède que 3 FACs au sein de la même LoB (Fine Art) ainsi leur coefficient est égal à 100, c'est un marché en monopole. Parmi les indices très hauts on retrouve le Royaume Uni, l'Algérie ou encore le Luxembourg. On remarque aussi l'entité du Moyen Orient possède un indice de 88 alors qu'il possède 502 FACs, ce qui est plutôt élevé. Les entités à très fort IHH ont plutôt tendance à avoir peu de facultatives, souvent moins d'une centaine.

Dans des indices plus faibles, on retrouve bien la concentration de la Turquie au sein de la LoB Transport and Marine dans son indice d'Herfindahl ce qui lui donne un indice d'environ 41. 41 peut paraître faible, mais il s'agit d'une entité avec plus de 6000 FACs, en terme de comparaison la Pologne, l'Asie ou l'Allemagne possèdent des indices de l'ordre de la trentaine.

## 2.4 Modifications de la BDD

Pour limiter les valeurs aberrantes de la BDD, on applique un critère de suppression assez grossier sur les queues de distribution des primes. Le but est de supprimer les FACs ayant des primes inférieures au quantile 1% et des primes supérieures au quantile 99%. Dans cette partie et afin d'illustrer le propos, on se focalise sur 3 entités : l'Asie, la Turquie ainsi que le Mexique.

La maille gardée pour les distributions des primes est la maille (Entité AXA x LoB). Néanmoins, comme vu précédemment, le nombre de FAC à cette maille peut parfois être faible même au sein d'entités possédant plus de 5 000 FACs. Ainsi, lorsque la maille (Entité, LoB) possède moins de 100 facultatives, on utilisera le quantile de toutes les FACs de l'entité. Voici les quantiles des trois entités étudiées :

Valeur en Eur.	AXA Asie	AXA Turquie	AXA Mexique
Quantile 1%	5	2	88
Quantile 99%	153 122	174 087	1 542 874

TABLE 2.11 – Valeurs des quantiles à la maille entité.

On peut remarquer que l'on trouve des quantiles 1% assez faible. Ceci peut être dû au taux de change dans certains pays. En effet, les FACs peuvent avoir une prime en monnaie locale qui une fois remise en euro est plutôt faible. On retrouve bien à travers les valeurs des quantiles l'analyse précédente : le Mexique possède en moyenne des primes plus élevées que l'Asie ou la Turquie. Comme il y a beaucoup de points de la granularité (Entité Axa, LoB) où il y a moins de 100 FACs, ces quantiles 1% et 99% seront très utilisés par la suite.

Les trois tableaux suivant présentent les valeurs d'exclusion des quantiles à la maille (Entité AXA, LoB) pour l'Asie, la Turquie et le Mexique . Pour plus de lisibilité, le quantile 1% est exprimé en euro alors que le quantile 99% est exprimé en milliers d'euros.



AXA Asie	Motor Liability	Technical risks	EAR/ CAR	Credit/ Bond	Transport and Marine	Personal Accident	Fine Art	Property per risk	Liability
Quantile 1% Eur.	5	5	5	26	1	5	101	3	17
Quantile 99% Millier Eur.	153	153	153	573	249	24	72	326	81

TABLE 2.12 – Valeurs des quantiles pour AXA Asie par LoB

AXA Turquie	Cont. risk	CYBER	Motor Liab.	Fin. risks	EAR/ CAR	Aviation	Transport Marine	Person. Acc.	Fine Art	Prop. per risk	Liab.
Quantile 1% Eur.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6	16
Quantile 99% milliers Eur.	174	174	174	174	174	174	15	174	174	527	277

TABLE 2.13 – Valeurs des quantiles pour AXA Turquie par LoB

AXA Mexique	Motor Liability	Technical risks	EAR/ CAR	Fin. risks	Transport Marine	Person. Acc.	Fine Art	Prop. per risk	Liability	aviation
Quantile 1%	88	88	88	88	1	88	398	117	101	88
Quantile 99%	1 543	1 543	1 543	1 543	932	1 543	36	1 897	338	1 543

TABLE 2.14 – Valeurs des quantiles pour AXA Mexique par LoB

Il est important de noter que, si une FAC possède la même prime que le quantile, le choix a été fait de garder cette FAC. C'est un choix important car si la distribution des primes connaît des paliers, alors cette hypothèse peut nous faire garder un plus ou moins grand nombre de FACs. Dans les faits, la distribution connaît des paliers. Certaines FACs suivent un modèle et se ressemblent beaucoup. En particulier leur primes associées sont très proches. Une méthode de quantiles est très pertinent dans ce cas, car à même faire ressortir les paliers existants.

La Turquie et l'Asie possèdent des quantiles 1% très faibles que le taux de change peut ne pas expliquer entièrement. Il s'agit probablement d'erreurs de saisie. Le Mexique possède lui un quantile 1% plus élevé à 88 Euros. Cela semble plus raisonnable que la Turquie et l'Asie. La ligne de business Transport and Marine semble être un cas particulier : elle possède un très faible quantile 1% (de l'ordre de l'euro) sur les trois entités.

Il est plus difficile d'émettre des commentaires sur les quantiles 99%. Néanmoins, la tendance faire ressortir que sur le property per risk, les quantiles 99% sont plus élevés que ceux des autres LoB. Il semble que c'est cette LoB qui porte l'augmentation des quantiles à la maille entité. Sur AXA Turquie et AXA Mexique, le quantile 99% du property per risk peut être 2 voire 5 fois supérieur aux quantiles des autres LoBs qui possèdent leur propre quantile et non celui de l'entité.

Cette méthode a entraîné la suppression de 533 FACs ce qui représente environ 2% de la BDD. Ce nombre aurait environ doublé si la valeur du quantile était exclue et non prise en compte. L'exclusion

a en majorité touché la LoB Transport and Marine. A la maille (Entite x LoB) c'est le couple (AXA Turkey, Transport and Marine) qui est le plus touché.

C'est à l'aide de la BDD dont les quantiles ont été supprimé que l'on a effectué la modélisation des récupérations. Les résultats sont explicités dans la partie suivante.

## 2.5 Résultats

La BDD en entrée du modèle des récupérations possède à présent environ 27 000 FACs. Ces FACs sont réparties sur environ 200 réassureurs différents. On ne retiendra pour les résultats uniquement les 20 premiers qui représentent environ 70% des récupérations sous forme de bi-centenaires attendus. Cette statistique confirme la concentration de marché évoquée dans le chapitre 1. Pour illustrer ce phénomène de concentration voici une courbe de Lorenz sur la participation des réassureurs aux bi-centenaires générés par le modèle :

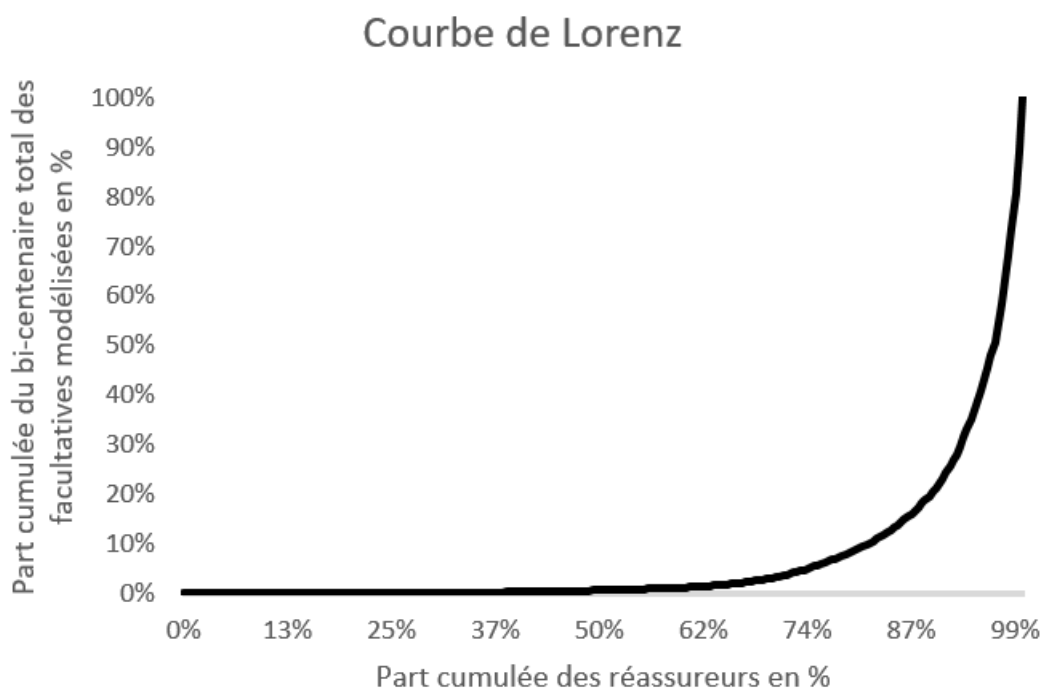


FIGURE 2.6

Le graphique montre que les 60% des réassureurs les moins présents dans les simulations de récupérations ont une infime part du bi-centenaire final. On retrouve aussi la statistique précédente, la dizaine de pourcent (sur environ 200 au total) des réassureurs chez qui les entités AXA ont le plus de récupérations sous forme de bi-centenaire représente environ 70% du bi-centenaire total.

Enfin, ci-dessous un graphique sur le top 10% des réassureurs et leur bi-centenaire respectif :

Etude indépendante  
Bi-centenaire par réassureur

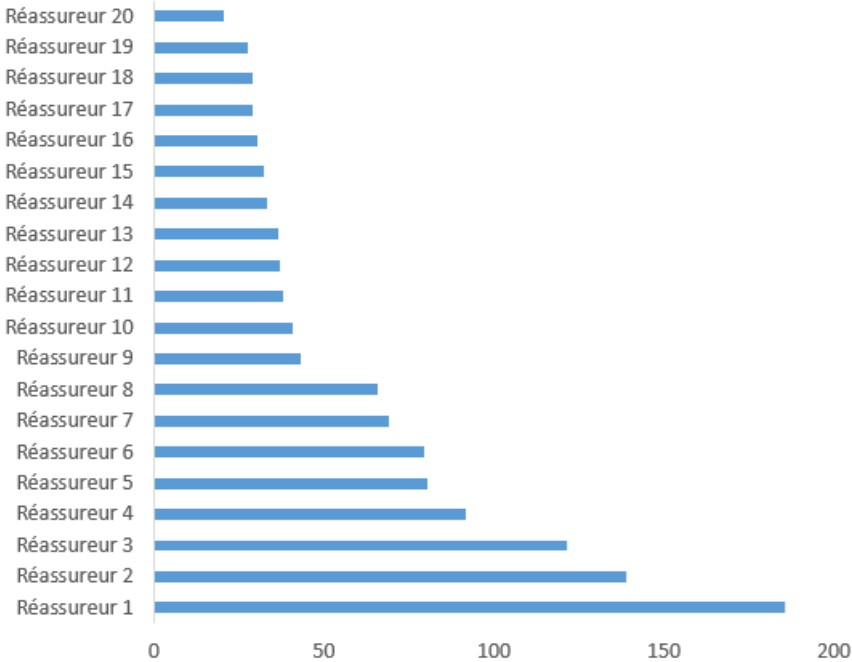


FIGURE 2.7 – L'échelle horizontale est en millions d'euros.

On remarque qu'au sein du top 20, il y a un Top 8 qui ressort de l'étude. Ils représentent 50% des récupérations attendues sous forme de bi-centenaire. Cette étude sert en particulier d'étalon et de point de comparaison pour l'étude menée dans le chapitre suivant.

# 3 Modélisation des récupérations des Facultatives corrélées

Le chapitre précédent a présenté la modélisation indépendante des récupérations sur les facultatives. L'objectif est maintenant de réutiliser cette modélisation et y ajouter une dépendance sous la forme de corrélation. Le but de la modélisation est d'ajouter une corrélation au sein d'une même ligne de business. Pour ce faire, nous avons appliqué une méthodologie à base d'une copule gaussienne qui réutilise les marginales calculées dans le chapitre précédent.

Ce chapitre s'articule autour de plusieurs axes. Tout d'abord, la présentation de la copule gaussienne. Ensuite, celle d'un algorithme de réduction de la dimension de nos marginales. Finalement, on montre les résultats de la modélisation avec corrélation que l'on compare aux résultats du chapitre 2.

## 3.1 Les copules

Cette partie a pour objectif de rappeler les éléments essentiels à la compréhension de la méthodologie. Cette partie est inspirée par [2], qui est une étude bien plus complète des copules.

Soit  $d$  un entier  $\geq 2$ . Une copule en dimension  $d$  est une fonction de répartition sur  $[0, 1]^d$  dont les marginales sont uniformes. De manière équivalente, on peut écrire la définition formelle suivante :

**Définition :** Une copule est une fonction  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie,  $\forall u_i \in [0, 1]$ , les trois conditions suivantes :

(H1)  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$

(H2)  $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0$

(H3)  $C$  est  $d$ -croissante

La  $d$ -croissance étant une notion complexe, on la présente souvent pour des copules de dimension 2. Dans ce cas là, la 2-croissance correspond à la condition suivante :

**(H3 pour  $d = 2$ )** Pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $0 \leq u_i \leq v_i \leq 1$ , on a :

$$0 \leq C(u_1, u_2) + C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2)$$

Le théorème qui permet l'utilisation des copules dans notre problème est le Théorème de Sklar.

### Théorème de Sklar

Soit  $F_1, \dots, F_d$   $d$  fonctions de répartition de  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . On note  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$  l'ensemble des fonctions de répartition de  $\mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  dont les marginales sont exactement  $F_1, \dots, F_d$ .

Si  $C$  est une copule alors pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  :

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

est une fonction de répartition de  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ .

Ce théorème permet l'utilisation de copules comme «fonctions de dépendance». En effet, la connaissance des marginales  $(F_1, \dots, F_d)$  et d'une fonction de copule  $C$  de manière séparée est suffisant pour trouver une fonction de répartition de  $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_d)$ . On est alors libre du choix de la fonction  $C$  tant que celle-ci est une copule.

Dans la suite, nous utilisons une copule elliptique, la copule gaussienne. Pour plus de lisibilité, on donne la formule de la copule gaussienne en dimension 2. Pour la définir nous avons besoin de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite ainsi que de la distribution d'un vecteur gaussien en dimension 2 de corrélation  $\rho$ . Tout d'abord, voici la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

A présent, pour le coefficient de corrélation  $\rho \in ]-1, 1[$  voici la distribution du vecteur gaussien en dimension 2 :

$$\Phi_\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$$

On peut maintenant définir la fonction suivante, pour  $\rho \in ]-1, 1[$  :

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$$

On se propose de prouver que la fonction  $C$  est une copule que l'on nomme copule gaussienne. Ainsi, nous devons prouver (H1), (H2) et (H3). Prouvons les trois hypothèses en commençant par (H2) et (H3). On abusera de notation tel que  $\phi^{-1}(0) = -\infty$  et  $\phi^{-1}(1) = +\infty$  pour plus de lisibilité.

Prouvons (H2). Soit  $v \in [0, 1]$ . On doit montrer que  $C(0, v) = C(v, 0) = 0$ .

Premièrement,  $C(0, v) = C(v, 0)$  est évident.

Deuxièmement, en utilisant  $\phi^{-1}(0) = -\infty$  on peut écrire :

$$C(0, v) = \Phi_\rho(\phi^{-1}(0), \phi^{-1}(v)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt = 0$$

Prouvons (H3). Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on suppose  $0 \leq u_i \leq v_i \leq 1$ . On se propose de montrer que :

$$C(u_1, u_2) + C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) \geq 0$$

Etudions de manière séparé  $C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2)$  et  $C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2)$ . Pour ce faire on rappelle que la fonction  $\phi$  est continue et strictement croissante donc  $\phi^{-1}$  est continue et strictement croissante. D'une part, on peut écrire :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2) &= \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \left( \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds - \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v_2)} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds \right) dt &= \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \left( - \int_{\phi^{-1}(u_2)}^{\phi^{-1}(v_2)} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds \right) dt &\text{ avec } \phi^{-1}(u_2) \leq \phi^{-1}(v_2) \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire :

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v_1)} \left( \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v_2)} \exp\left(-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds - \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \exp\left(-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds \right) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v_1)} \left( \int_{\phi^{-1}(u_2)}^{\phi^{-1}(v_2)} \exp\left(-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds \right) dt \text{ avec } \phi^{-1}(u_2) \leq \phi^{-1}(v_2)$$

Or par croissance de  $\phi^{-1}$  on a  $\phi^{-1}(u_1) \leq \phi^{-1}(v_1)$  ce qui permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v_1)} = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} + \int_{\phi^{-1}(u_1)}^{\phi^{-1}(v_1)}$$

Ainsi, on peut conclure :

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\phi^{-1}(u_1)}^{\phi^{-1}(v_1)} \left( \int_{\phi^{-1}(u_2)}^{\phi^{-1}(v_2)} \exp\left(-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds \right) dt$$

Avec  $\phi^{-1}(u_1) \leq \phi^{-1}(v_1)$  et  $\phi^{-1}(u_2) \leq \phi^{-1}(v_2)$

Ainsi,  $C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2) \geq 0$

Prouvons (H1). Soit  $v \in [0, 1]$ . On doit montrer que  $C(1, v) = C(v, 1) = v$ .

Premièrement,  $C(1, v) = C(v, 1)$  est évident.

Deuxièmement, en utilisant  $\phi(1) = +\infty$  on peut écrire :

$$C(1, v) = \Phi_\rho(\phi^{-1}(1), \phi^{-1}(v)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \exp\left(-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \left( \exp\left(-\frac{s^2}{2(1-\rho^2)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2-2\rho st}{2(1-\rho^2)}\right) dt \right) ds$$

Ainsi, en remarquant que  $(t - \rho s)^2 = t^2 - 2\rho st + (\rho s)^2$  on peut transformer l'intégrale précédente :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \left( \exp\left(-\frac{s^2}{2(1-\rho^2)}\right) \exp\left(\frac{(\rho s)^2}{2(1-\rho^2)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t - \rho s)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dt \right) ds =$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \left( \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t - \rho s)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dt \right) ds$$

On s'intéresse à l'intégrale intérieure. On pose le changement de variable, valable car bijectif et strictement croissant :

$$x = \frac{t - \rho s}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{ ainsi } dx = \frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{ (on rappelle que } \rho \leq 1)$$

Les bornes de l'intégrale restant inchangées, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t - \rho s)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sqrt{1-\rho^2} dx = \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}$$

En reprenant le calcul dans sa globalité, on peut écrire :

$$C(1, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \left( \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \right) ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds = \Phi(\phi^{-1}(v)) = v$$

Pour conclure nous avons montré que la fonction C définie plus haut est une copule. Par la suite, on se référera à cette copule comme la copule gaussienne. La démonstration peut se généraliser à toute dimension.

La donnée d'entrée dont a besoin la copule gaussienne en dimension 2 est un coefficient  $\rho$ . Néanmoins, la gaussienne prend en réalité en entrée une matrice de corrélation de la forme :

$$\Sigma_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Dans l'étude qui va suivre, on se place en dimension d qui sera le nombre de fac de la maille (Entité AXA, LoB) choisis. Dans cette dimension, la matrice de corrélation est égale à :

$$\Sigma_{d,d} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,d} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d,1} & \rho_{d,2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, nous avons fait le choix de prendre tout les coefficients de corrélation égales à 0,5. Ainsi la matrice de corrélation utilisé par la suite est de la forme :

$$\Sigma_{d,d} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & \cdots & 0,5 \\ 0,5 & 1 & \cdots & 0,5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,5 & 0,5 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## 3.2 Réduction de la dimension du problème

Le but de l'étude est d'utiliser les marginales précédemment calculées dans le chapitre 2 et une copule gaussienne pour y intégrer une dépendance entre FACs. Nous disposons donc d'une BDD de marginales de dimension (Nombre de FACs, Nombre de scénarios) soit dans notre cas (34 652, 50 000). Ainsi, en l'état, la matrice de corrélation nécessaire au calcul de la copule est de dimension 34 652, ce qui n'est pas envisageable avec le matériel informatique dont nous disposons.

Il faut donc diminuer le nombre de FACs. L'objectif de l'étude, du moins dans un premier temps, est d'introduire de la dépendance au sein d'une LoB, et non entre les LoB. Ainsi, on peut créer une base de données par LoB pour réduire la dimension de la copule. Néanmoins, voici un extrait des 6 plus grosses LoB d'après les statistiques descriptives du chapitre 2 :

Line of Business	EAR/CAR	Fine Art	Liability	Personal Accident	Property per risk	Transport marine
Nombre de Fac	1 654	1 832	7 039	1 833	7 837	5 702

La concentration sur certaines LoB ne permet pas de bien répartir les facultatives. Une solution pour diminuer à nouveau les dimensions du problème est de répartir chaque LoB par entité AXA pour obtenir des BDD pour la maille (Entité AXA x LoB). D'après les statistiques croisées présentes en annexe, on a le tableau suivant pour les 6 plus grosses mailles (Entité AXA x LoB) :

Line of Business	Entité AXA	Nombre de Fac
Transport and marine	Turkey	4 183
Liability	Asie	3 022
Property per risk	Asie	2 032
Fine Art	Asie	1 695
Liability	Turkey	1 203
EAR/CAR	Poland	1 118

Précisons d'abord que pour la maille (Entité AXA x LoB), nous disposons de 159 BDDs différentes. Attention, il n'y a pas (Nombre de LoB)x(Nombre d'entité) BDDs car certains couples (Entité AXA, LoB) n'existent pas. Il s'agit de compter, dans les tableaux croisés présents en annexe, les cellules non vides. Néanmoins, certains couples (Entité AXA, LoB) possèdent des bases de données avec toujours trop de facultatives. En effet, il y a toujours trop de marginales pour pouvoir l'implémenter correctement. La solution choisie est d'utiliser cette maille mais de réduire la taille des BDDs par un algorithme présenté dans la section suivante.

### 3.2.1 Algorithme de réduction des BDDs.

Nous cherchons à introduire de la corrélation entre les récupérations des Facs pour obtenir une meilleure estimation de la perte bi-centenaire de chaque réassureur, afin d'avoir une meilleure vision de notre perte potentielle par réassureur. Toutefois, comme expliqué précédemment, il n'est pas possible d'appliquer directement de la corrélation entre toutes les Facs pour des problèmes de dimension. C'est pourquoi l'algorithme suivant vise à réduire la dimension du problème en cherchant surtout à créer de la corrélation entre les facs les plus matérielles.

Pour cet algorithme, il est tout d'abord nécessaire de définir ce qu'est une « grosse » facultative. En particulier, nous allons avoir besoin d'une relation d'ordre entre facultatives pour définir si une facultative est « plus grande » qu'une autre. Ainsi on propose la relation de préordre suivante :

Une facultative X est supérieure ou égale à une facultative Y si le bi-centenaire des récupérations de X est supérieur ou égal au bi-centenaire des récupérations de Y.

On notera alors :

$$\text{Fac X} \succeq \text{Fac Y}$$

$\succeq$  est une relation de préordre car  $\geq$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Néanmoins,  $\succeq$  n'est pas une relation d'ordre car la propriété d'antisymétrie n'est pas respectée.

L'algorithme a pour but d'isoler les grandes FACs au sens de la relation  $\succeq$  et de fusionner les plus petites FACs. Il peut se définir de la manière suivante :

1. On se place à une maille (Entité AXA, LoB). Dans cette maille, il y a n FACs.



2. On classe de manière décroissante les FACs à l'aide de la relation  $\succ$ . Ainsi, on dispose d'une BDD ordonnée de cette forme :

$$(F_1, \dots, F_n) \text{ avec } F_1 \succeq F_2 \succeq \dots \succeq F_{n-1} \succeq F_n$$

3. On cherche l'indice entier  $i_0 \in [1, n]$ , tel qu'il soit le plus petit entier à vérifier l'équation :

$$\sum_{k=1}^{i_0} F_k \succeq \sum_{k=i_0}^n F_k$$

L'addition étant défini comme la somme des bi-centenaires des facs.

4. On construit ensuite la BDD suivante :

$$(F_1, F_2, \dots, F_{i_0-1}, F_{i_0}, \sum_{k=i_0+1}^n F_k)$$

Avec cet algorithme, on réduit considérablement la taille de nos BDDs qui ont à présent  $i_0+1$  colonnes. Le tableau ci-dessous présente les valeurs de  $i_0$  des 6 plus grosses mailles précédentes :

Line of Business	Entité AXA	Nombre de Fac	Valeur de $i_0$	En % du total de Fac
Transport and marine	Turkey	4 183	15	0,4%
Liability	Asie	3 022	53	1,8 %
Property per risk	Asie	2 032	105	5,2%
Fine Art	Asie	1 695	107	6,3%
Liability	Turkey	1 203	76	6,3%
EAR/CAR	Poland	1 118	70	6,3%

Cet algorithme a été appliqué à toutes les BDDs, peu importe leur taille initiale. La réduction de taille des BDDs est très importante. Le couple (Turkey, Transport and marine) ressort parmi les 6. En effet,  $i_0$  vaut uniquement 15. Cela est dû au fait que les primes des FACs associées au couple (Turkey, Transport and marine) sont en générales assez faible, mais il existe quelques exceptions à fortes primes qui créées cet effet. C'est un effet qui est en partie dû à la méthode des quantiles utilisée pour enlever les valeurs aberrantes de la BDD.

L'étape 3 de l'algorithme fixe la valeur de  $i_0$  comme l'indice à partir duquel la somme des  $i_0$  plus grands bi-centenaire associés aux facultatives est supérieure à la somme des  $n - i_0$  plus petits bi-centenaire. Ce choix de définition de  $i_0$  étant arbitraire, il est intéressant de réaliser des sensibilités pour comprendre l'impact de cette hypothèse. Pour ce faire, on écrit l'hypothèse de manière différente :

$$\sum_{k=1}^{i_0} F_k \succeq \sum_{k=i_0}^n F_k \iff \sum_{k=1}^{i_0} F_k + \sum_{k=1}^{i_0} F_k \succeq \sum_{k=1}^{i_0} F_k + \sum_{k=i_0}^n F_k \iff \sum_{k=1}^{i_0} F_k \succeq 0,5 * \sum_{k=1}^n F_k$$

Ainsi, modifier le facteur 0,5 peut tendre à augmenter ou diminuer  $i_0$ . Par exemple, si on prend 0,75, alors  $i_0$  sera l'indice tel que les  $i_0$  premières FACs représentent 75% de la somme du bi-centenaire. On étudie alors, pour  $x \in [0,25; 0,75]$ , l'inéquation suivante :

$$\sum_{k=1}^{i_0} F_k \succeq x * \sum_{k=1}^n F_k$$

On peut noter que  $i_0$  est une fonction croissante de  $x$ . On étudie les valeurs de  $i_0(x)$  pour  $x \in [0,25; 0,75]$  par pas de 0,05. On choisit des mailles de différentes tailles pour représenter au mieux la base de donnée. On obtient les résultats suivants :

LoB →	Fine Art	EAR/CAR	Liability	Fine Art	Motor Liab.
Entité →	Asie	Poland	Maroc	Mexique	France
Nombre de Fac →	1695	1120	353	96	50
$i_0(0,25)$	26	13	7	5	3
$i_0(0,30)$	36	17	7	6	4
$i_0(0,35)$	49	24	10	7	6
$i_0(0,40)$	65	32	11	8	7
$i_0(0,45)$	83	44	15	11	7
$i_0(0,50)$	107	57	19	12	10
$i_0(0,55)$	136	73	25	15	11
$i_0(0,60)$	172	93	34	18	14
$i_0(0,65)$	217	118	47	21	17
$i_0(0,70)$	271	148	64	25	20
$i_0(0,75)$	341	185	89	30	23

On retrouve bien que  $i_0(x)$  est croissant. De même que pour le top 6, on propose un tableau en pourcentage du total des facultatives de leur mailles respectives :

LoB →	Fine Art	EAR/CAR	Liability	Fine Art	Motor Liab.
Entité →	Asie	Poland	Maroc	Mexique	France
Nombre de Fac →	1695	1120	353	96	50
$i_0(0,25)$	2%	1%	2%	5%	6%
$i_0(0,30)$	2%	2%	2%	6%	8%
$i_0(0,35)$	3%	2%	3%	7%	12%
$i_0(0,40)$	4%	3%	3%	8%	14%
$i_0(0,45)$	5%	4%	4%	11%	14%
$i_0(0,50)$	6%	5%	5%	13%	20%
$i_0(0,55)$	8%	7%	7%	16%	22%
$i_0(0,60)$	10%	8%	10%	19%	28%
$i_0(0,65)$	13%	11%	13%	22%	34%
$i_0(0,70)$	16%	13%	18%	26%	40%
$i_0(0,75)$	20%	17%	25%	31%	46%

Cette méthode de calcul de  $i_0$  possède néanmoins un défaut majeur. En effet comme expliqué en partie 2.2.3, dans environ 75% des cas les contrats de type XS possèdent un bi-centenaire nul. Ainsi elles sont considérées comme des "petites" FACs. Hors, le fait que le bi-centenaire soit nul ou non est dicté par le RoL du contrat et non uniquement la limite. Ainsi, une FAC XS à faible RoL mais à forte limite peut par exemple posséder un très fort quantile 99,6% et peut alors difficilement être considérée comme une petite FAC. Dans le cas où un réassureur possède plusieurs FACs de ce type, les FACs considérées comme petites peuvent, une fois sommées entres elles, posséder un bi-centenaire supérieur à celui des "grosses" FACs.

Voici un exemple qui illustre le problème rencontré. On réutilise la métrique de la seconde plus grande valeur sur un strip de 5 simulations. Imaginons qu'une maille possède 4 FACs, deux QS et deux XS. On a les métriques suivantes :

Facs	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4
Type	QS	QS	XS	XS
Métrique	15	10	0	0

Grâce à ce tableau on peut trouver la valeur de  $i_0$ . On se place dans le cas  $x = 0,5$ . Ainsi on en déduit que  $i_0 = 1$ . Les "grosses Facs" sont représentées par la FAC 1 et les "petites FACs" sont représentées par les FACs 2, 3 et 4. Voici à présent les simulations de récupération des FACs :

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4
1	5	7	40	0
2	15	5	0	0
3	20	2	0	50
4	10	20	0	0
5	8	10	0	0
Métrique	15	10	0	0

Dans les simulations des XS, la métrique est nulle mais le quantile supérieur, c'est à dire le maximum, des XS est bien plus grand que le maximum des QS. C'est un cas parfois présent dans les simulations réalisées dans ce mémoire. En effet, les limites sont souvent très hautes et les RoLs faibles ainsi les quantiles proches du maximum du strip peuvent être supérieurs à ceux des QS.

Pour juger si la valeur de  $i_0$  est pertinente ou non, on se propose de regarder les métriques sommées sur les "grosses FACs" et sur les "petites FACs". Ainsi, on a les deux groupes suivants :

Simulation	Fac 1	Somme "Grosses Facs"
1	5	5
2	15	15
3	20	20
4	10	10
5	8	8
Métrique	15	15

Simulation	Fac 2	Fac 3	Fac 4	Somme "Petites Facs"
1	7	40	0	47
2	5	0	0	5
3	2	0	50	52
4	20	0	0	20
5	10	0	0	10
Métrique	10	0	0	47

TABLE 3.1 – Métrique des groupes "Grosses Facs" et "Petites Facs".

On observe qu'à cause de la diversification des facultatives de faible métrique, le groupe des "petites Facs" possède une métrique supérieure à celle des "grandes Facs".

En pratique, ce phénomène a été observé sur presque toutes les mailles qui constituent la base de donnée, et en particulier sur les mailles disposant d'un grand nombre de FACs. Ainsi, on propose une nouvelle méthode de distinction des "petites FACs" et des "grosses FACs". Il s'agit de remplacer l'étape n°3 de l'algorithme. L'addition entre les  $F_i$  ne sera plus définie comme la somme des bi-centenaires des Facs mais plutôt comme vu précédemment, le bi-centenaire résultant de la somme

des strips de récupération des facultatives. Pour l'exemple, on peut reprendre le cas précédent. On a alors :

Simulation	Fac 1	Somme "Grosses Facs"
1	5	5
2	15	15
3	20	20
4	10	10
5	8	8
Métrique	15	15

Simulation	Fac 2	Fac 3	Fac 4	Somme "Petites Facs"
1	7	40	0	47
2	5	0	0	5
3	2	0	50	52
4	20	0	0	20
5	10	0	0	10
Métrique	10	0	0	47

TABLE 3.2 – Test de  $i_0 = 1$

15 étant inférieur à 47,  $i_0 = 1$  ne convient plus. On incrémente alors le  $i_0$ . On se retrouve avec :

Simulation	Fac 1	Fac 2	Somme "Grosses Facs"
1	5	7	12
2	15	5	20
3	20	2	22
4	10	20	30
5	8	10	18
Métrique	15	10	22

Simulation	Fac 3	Fac 4	Somme "Petites Facs"
1	40	0	40
2	0	0	0
3	0	50	50
4	0	0	0
5	0	0	0
Métrique	0	0	40

TABLE 3.3 – Test de  $i_0 = 2$

22 étant inférieur à 40, on continue d'incrémenter  $i_0$ .

Simulation	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Somme "Grosses Facs"
1	5	7	40	52
2	15	5	0	20
3	20	2	0	22
4	10	20	0	30
5	8	10	0	18
Métrique	15	10	0	30

Simulation	Fac 4	Somme "Petites Facs"
1	0	0
2	0	0
3	50	50
4	0	0
5	0	0
Métrique	0	0

TABLE 3.4 – Test de  $i_0 = 3$

30 étant supérieur à 0, on a pour cet exemple  $i_0 = 3$ . Ainsi, l'algorithme a réussi à prendre en compte l'impact des XS qui possèdent des bi-centenaires nuls en augmentant la valeur de  $i_0$ .

Cette méthode est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que la précédente. En effet, pour la précédente, il s'agissait de calculer les quantiles de chaque facultatives puis de réaliser uniquement des additions et des comparaisons de nombres réels. Pour celle ci, il s'agit à chaque étape de sommer

des strips de 50 000 simulations puis de recalculer deux quantiles à comparer. Voici les résultats sur les 5 mailles précédentes :

LoB →	Fine Art	EAR/CAR	Liability	Fine Art	Motor Liab.
Entité →	Asie	Poland	Maroc	Mexique	France
Nombre de Fac →	1695	1120	353	96	50
Ancien $i_0(0,50)$	107	57	19	12	10
Ancien $i_0(0,50)$ en %	6%	5%	5%	13%	20%
Nouveau $i_0(0,50)$	777	714	176	45	20
Nouveau $i_0(0,50)$ en %	46%	64%	50%	47%	41%

Cette méthode donne des valeurs de  $i_0$  très supérieures à la première méthode étudiée. Les nouvelles valeurs de  $i_0$  ne remplissent pas toujours leur objectif de diminution forte de la taille des BDDs de certaines mailles. En particulier sur les très grosses mailles, on retrouve des  $i_0$  supérieurs à plusieurs milliers sur les plus grosses. La méthode qui sera utilisée dans la suite de ce mémoire pour l'application de la copule ne permet pas de garder des BDDs aussi volumineuses.

Ainsi, on se propose de garder la nouvelle méthode qui semble plus réaliste quant à la distinction des "grosses" FACs et des "petites" FACs. Néanmoins, on décide de limiter la valeur de  $i_0$  par un cap. Ce cap a été fixé à 200. Il correspond au maximum des  $i_0$  issue de l'ancienne méthode que l'on a légèrement augmenté pour l'arrondir.

On peut penser à d'autres méthodes pour trouver un  $i_0$ . Par exemple, la méthode précédente suit l'ordre des bi-centenaires décroissant des FACs. C'est un choix qui peut être discuté. Il serait théoriquement possible de calculer  $i_0$  pour tout les ordres possibles et d'en choisir le plus petit. Techniquement, cette méthode a ses limites sur les BDDs qui possèdent plusieurs milliers de FACs.

### 3.2.2 Utilisation de la copule pour obtenir la corrélation

Nous disposons à présent de marginales assez peu nombreuses pour appliquer notre copule. On rappelle que la dernière colonne correspond à la somme des « petites » FACs. Elles disposent d'un traitement particulier présenté qui correspond au 4ème point de la stratégie d'utilisation définie ci-dessous. L'algorithme d'utilisation de la copule est le suivant (un exemple avec un petit nombre de FAC est également présenté par la suite) :

1. Pour chaque FAC, on effectue le tirage de 50 000 valeurs dans la copule.
2. Chaque valeur du tirage se voit attribuer un rang qui correspond à sa position si on ordonne le tirage par ordre décroissant. Par exemple, le rang de la plus grande valeur du tirage est 1 et le rang de la plus petite valeur est 50 000.
3. On réordonne les valeurs de la marginale en fonction du rang de chaque scénario. Par exemple, la plus grande valeur du tirage (ie celle de rang 1) obtient la plus grande valeur du strip, celle de rang 2 la 2ème plus grande, etc.
4. Il est important de noter que la dernière colonne, qui correspond à la somme des « petites » FACs, est un cas particulier. Le tirage de la copule et le rang qu'on en tire ne sera pas appliqué sur la somme des FACs mais bien sur chaque « petite » FAC. Ainsi, toutes les « petites » FACs possèdent le même tirage dans la copule alors que les « grandes » FACs possèdent leur propre tirage.

Reprenons l'exemple de la partie 2. Pour simplifier, supposons qu'un réassureur ne possède que 4 FACs et que ces 4 FACs se trouvent dans le même couple (Entité AXA, LoB). Dans le cas général, on agrège toutes les FACs après avoir appliqué la copule, donc on ne perd pas de généralité avec cette hypothèse. Néanmoins, cette hypothèse implique que toutes les FACs du réassureur sont corrélées entre elles, ce qui n'est pas forcément le cas si elles proviennent de LoB différentes. Enfin, on suppose que nous n'avons pas eu besoin d'avoir recours à l'algorithme de  $i_0$ . Pour rappel, la métrique étudiée est la 2ème plus grande valeur du strip. La BDD contient 4 FACs et 5 simulations :

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4	Somme
1	10	0	9	0	19
2	6	2	8	0	16
3	9	5	8	0	22
4	7	0	10	0	17
5	15	5	12	9	41
métrique	10	5	10	0	22

Dans cet exemple, la métrique sur le réassureur vaut 22.

1) On tire pour chaque fac 5 fois dans la copule. Ce tirage a été effectué avec le package "rcopula" avec comme entrée la matrice suivante :

$$\Sigma_{4,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient par exemple les résultats suivants :

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4
1	0.04	0.06	0.47	0.03
2	0.27	0.77	0.60	0.49
3	0.77	0.46	0.31	0.44
4	0.13	0.09	0.18	0.02
5	0.70	0.53	0.32	0.89

2) Les résultats sont ensuite transformés en rang :

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4
1	rang n°5	rang n°5	rang n°2	rang n°4
2	rang n°3	rang n°1	rang n°1	rang n°2
3	rang n°1	rang n°3	rang n°4	rang n°3
4	rang n°4	rang n°4	rang n°5	rang n°5
5	rang n°2	rang n°2	rang n°3	rang n°1

On observe bien sur cette matrice la corrélation entre FACs. Par exemple, la simulation 1 contient des valeurs plutôt faibles pour chaque FAC. A contrario, la simulation 5 contient des valeurs plutôt élevées pour chaque FAC.

3) On réordonne alors les marginales grâce au rang qui vient d'être calculé :

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4	Somme corrélée	Somme décorrelée
1	6	0	10	0	16	19
2	9	5	12	0	26	16
3	15	2	8	0	25	22
4	7	0	8	0	15	17
5	10	5	9	9	33	41
métrique	10	5	10	0	26	22

Nous n'avons fait que réordonner les marginales à l'aide de la copule, ainsi la métrique de chaque FAC ne change pas. Néanmoins, la métrique de la somme a elle changée. Elle a augmenté par rapport à la somme décorrelée. L'effet de la corrélation a donc été d'augmenter de 4 notre métrique. Il existe de rares cas où la métrique peut diminuer après corrélation. Cela dépend notamment de la métrique ou encore de la distribution de la marginale. Un cas sera présenté par la suite.

Il est important de préciser que, contrairement à l'objectif initial, la corrélation introduite n'est pas une corrélation entre LoB. Il s'agit d'une corrélation au sein des couples (Entité AXA, LoB). Ainsi, deux FACs d'une même LoB ne sont pas corrélées entre elles si elles ne proviennent pas de la même entité AXA. Par exemple, deux FACs property per risk provenant respectivement de AXA Asie et de AXA France ne sont pas corrélées entre elles avec cette méthodologie. Par contre, deux FACs property per risk provenant de AXA Asie le sont. Pour essayer d'introduire une corrélation au sein d'une LoB il serait possible d'essayer l'algorithme du calcul de  $i_0$  précédent sur les BDDs par LoB. Compte tenu de la réduction assez conséquente de la taille des BDDs pour la maille (Entité AXA, LoB), il semble possible que la même méthodologie soit fructueuse sur les BDDs par LoB.

### 3.3 Résultats

Dans cette partie, on présente les résultats de la corrélation sur notre métrique de bi-centenaire ainsi que leur analyse. Ces résultats sont à mettre en perspective avec ceux obtenus dans le chapitre 2. L'analyse des impacts de l'introduction de corrélation au sein de nos données passent alors par une comparaison entre les bi-centenaires des réassureurs dans le modèle indépendant (chapitre 2) et dans le modèle avec corrélation (chapitre 3). Il est également intéressant d'essayer d'expliquer ces impacts par rapport à la forme des marginales.

Les trois graphiques qui suivent montrent respectivement les nouveaux niveaux de bicentenaire des récupérations par réassureur, un histogramme de comparaison avec les valeurs précédentes ainsi qu'un graphique qui présente la différence de bi-centenaire entre le modèle corrélé et le modèle indépendant. Dans ce dernier, une valeur positive revient à dire que la corrélation a augmenté la valeur de bi-centenaire.

### Etude Corrélée Bi-centenaire par réassureur

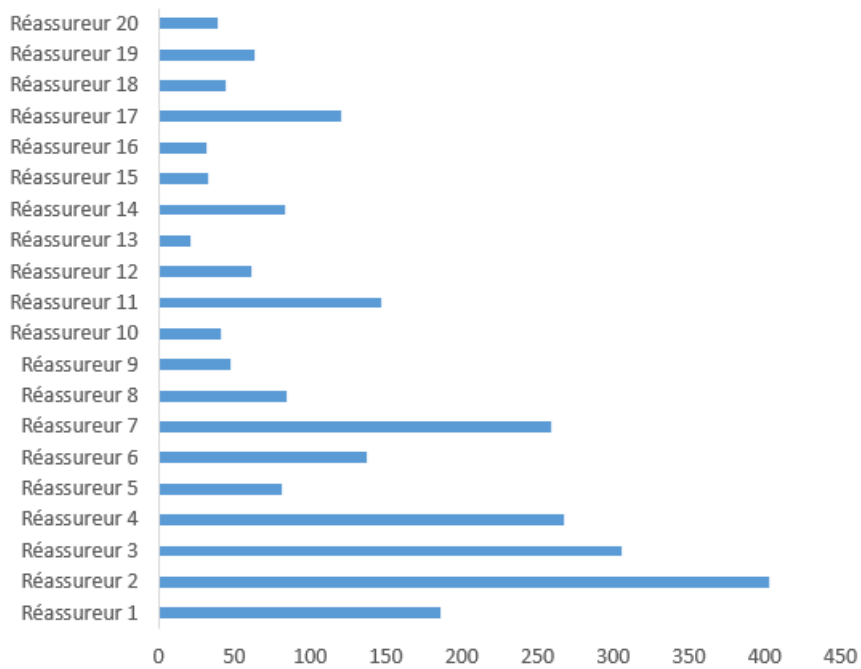


FIGURE 3.1 – Bi-centenaire par réassureur post corrélation (l'échelle horizontale est en millions d'euros)

### Bi-centenaire

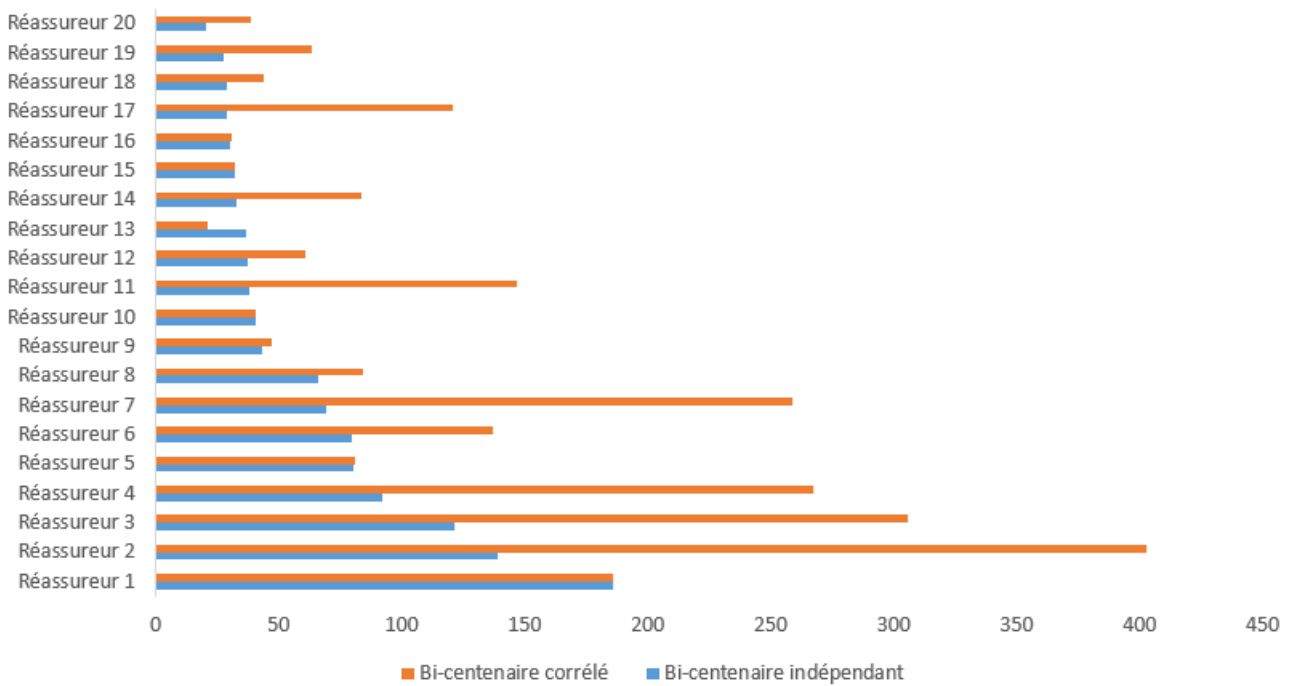


FIGURE 3.2 – Bi-centenaire pré et post corrélation (l'échelle horizontale est en millions d'euros)



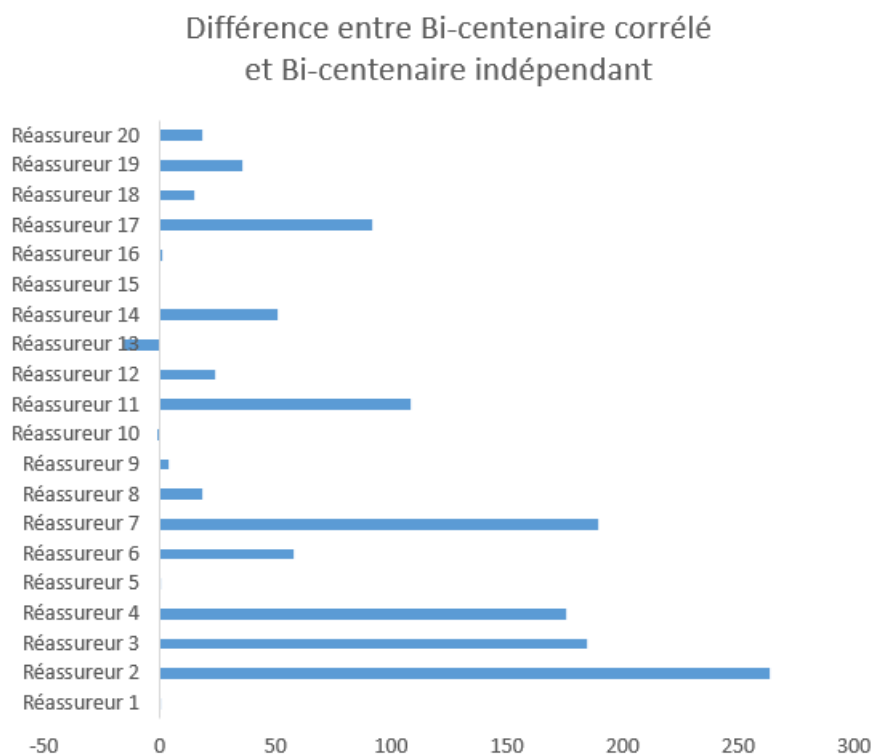


FIGURE 3.3 – Différence de bi-centenaire pré et post corrélation (l'échelle horizontale est en millions d'euros)

On rappelle que la corrélation a été mise en place à un niveau (Entité, LoB). Ainsi, plus un réassureur possède de FACs au sein de cette maille, plus il sera sensible à une augmentation de son bi-centenaire après l'utilisation de la copule. Après comparaison des résultats, plusieurs profils de réassureur se dessinent :

1. les réassureurs dont l'exposition a augmenté de manière significative.
2. les réassureurs dont l'exposition a pas ou peu augmenté.
3. les réassureurs dont l'exposition a diminué.

Les réassureurs dont l'exposition a augmenté après la mise en place de la corrélation est le résultat que l'on s'attendait à avoir. Intuitivement, la corrélation augmente les récupérations en cas d'évènements extrêmes. La figure 3.2 montre que cette intuition était correcte : la majorité des réassureurs ont vu leur exposition augmenté. Parmi eux, on peut même noter que certains voient leur bi-centenaire doubler voire tripler dans le cas du réassureur 2.

Les réassureurs dont l'exposition n'a pas ou peu augmenté correspondent déjà à une situation moins intuitive. C'est le cas des réassureur 1, 5, 15 et 16. On peut expliciter plusieurs raisons à ce résultat. Premièrement, il est possible qu'un réassureur ne possède que des FACs dans des mailles (Entité AXA, LoB) différentes. Cette explication paraît toutefois assez improbable. Néanmoins, il est possible que le réassureur possède une poignée de facultatives majeures, en terme de prime ou de RoL, qui se trouvent elles dans des mailles différentes. La corrélation des FACs moins prédominantes a dans ce cas un impact relatif beaucoup plus faible, puisque le coeur du bi-centenaire est constitué de ces FACs. Deuxièmement, si les marginales ont certaines formes particulières il est possible que corréler diminue le bi-centenaire. Ce point sera discuté en détail dans le paragraphe suivant. La corrélation de certaines mailles (Entité AXA, LoB) peut ainsi avoir tendance à diminuer le bi-centenaire, ce qui

viendrait endiguer l'augmentation engendrée par la corrélation dans d'autres mailles (Entite AXA, LoB). Un équilibre est donc susceptible de se produire dans les cas observés.

La catégorie la moins intuitive est celle des réassureurs pour lesquelles le bi-centenaire diminue. Ici, il s'agit du réassureur 10 (très faible) et du réassureur 13. La diminution est de l'ordre de 15 Millions d'euros soit environ du tiers de la valeur du bi-centenaire dans le modèle indépendant. Certaines distributions de marginales peuvent aboutir à ce genre d'effet. C'est en particulier le cas de distributions qui possèdent assez peu de très fortes valeurs qui vont être, à cause de la méthode du rang, poussées dans les quantiles supérieurs à celui du 99.5 par la corrélation. Pour éclaircir le propos, on se propose de reprendre la métrique de la 2ème plus grande valeur du strip déjà utilisée dans les exemples précédents. Voici les marginales de l'ensemble des FACs que pourrait avoir un réassureur :

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4	Somme
1	5	20	0	7	32
2	22	7	0	0	29
3	7	9	6	0	22
4	8	5	0	20	33
5	6	4	9	0	19
métrique	7	9	6	7	32

Pour simplifier l'explication, on prend un coefficient de corrélation égal à 1. Dans ce cas précis, après corrélation, une simulation aura pour chacune des FACs le même rang. Par exemple, la simulation numéro 2 aura le rang n°3 de tout les strips de récupération. A noter que prendre un coefficient de corrélation égal à 1 nous donne l'équation suivante :

$$\text{Bi-centenaire du strip des FACs sommées} = \text{Somme des Bi-centenaires des FACs}$$

Après corrélation, on peut réordonner les marginales comme suit :

Simulations	Fac 1	Fac 2	Fac 3	Fac 4	Somme
1	8	9	6	7	30
2	22	20	9	20	71
3	5	4	0	0	9
4	6	5	0	0	11
5	7	7	0	0	14
métrique	8	9	6	7	30

Ainsi, on a corrélé au maximum les FACs entre elles et cela a mené à une diminution de la métrique : elle passe de 32 à 30 après corrélation. Néanmoins, c'est un cas qui nécessite des marginales d'une certaine forme. C'est donc un cas assez peu probable si le réassureur possède en grande partie des quote-parts modélisées par une loi log-normale (cf figure 2.4). En revanche, si le réassureur possède en grande partie des contrats de type XS à faible RoL ce cas peut se produire, comme on peut le constater sur la figure 3.3 pour le réassureur 13.

### 3.3.1 Le cas du réassureur 13

Cette étude de cas a pour but de présenter les mécanismes qui impliquent qu'une corrélation entre FACs peut entraîner une diminution du bi-centenaire. Avant tout, on présente quelques statistiques descriptives sur le réassureur 13.

Type	QS	XL	Total
Nombre de Fac	43	88	131

Entité	Nombre de Fac
France	89
Méxique	14
Espagne	10
Autre	18
Total	131

LoB	Nombre de Fac
CAR	94
Property per risk	24
Autres	13
Total	131

TABLE 3.5 – Statistiques descriptive univariée sur le réassureur 13.

Ce réassureur est très présent sur les facultatives françaises. En particulier il est à noter que la plupart des facultatives de types CAR proviennent de l'entité AXA FRANCE. Un aspect très important de l'étude est que les  $\frac{2}{3}$  des facultatives sont de types XL. C'est leur corrélation qui entraîne une diminution du bicentenaire. Voici quelques caractéristiques sur ces contrats d'XL :

RoL	[0;0,002[	[0,002;0,005[	[0,005;+∞[
Nombre de valeurs non nulles	[0;100[	[100;250[	[250;+∞[
Nombre de Fac	78	4	6

Ainsi ce qu'on note c'est qu'il s'agit en grande majorité de contrats XL à faible RoL et donc d'après l'étude en partie 2.2.3, ce sont des contrats qui possèdent des strips avec très peu de valeurs non nulles, une centaine sur 50 000 simulations. Ainsi, lorsque pour une simulation donnée l'une des facs de type XL possède une récupération strictement positive, la plupart des autres facs de type XL n'auront aucune récupération. Ce phénomène est du à l'indépendance entre les simulations. Lorsque cette indépendance n'existe plus et que l'on corrèle les simulations entre elles, il est beaucoup plus probable que les simulations de récupérations non nulles des facultatives de type XL soient les mêmes. En effet, l'idée de la corrélation par copule est de regrouper les fortes récupérations sur les mêmes simulations et les petites récupérations sur les mêmes simulations à différents degrés selon le facteur de corrélation.

Ici on s'intéresse à la métrique de bi-centenaire qui correspond à la 250<sup>ème</sup> plus grande valeur du strip alors que les strips des XL possèdent environ une centaine de valeurs non nulles. Ainsi, en cas de corrélation trop importante entre les facultatives il est possible que les récupérations non nulles soit transférées vers des quantiles supérieurs à celui du bi-centenaire (99,5%). Pour illustrer ce phénomène, voici ci-dessous, les quantiles du strip de récupérations du réassureur 13 pour les modèles indépendants et corrélés :

Quantiles	... <sup>ème</sup> plus grande valeur	Modèle avec corrélation	Modèle indépendant
99,2 %	400	15,8	31,4
99,3 %	350	17,4	32,8
99,4 %	300	19,2	34,5
99,5 %	250	21,2	36,6
99,6 %	200	24,4	39,0
99,7 %	150	32,2	42,2
99,8 %	100	42,6	47,0
99,9 %	50	151,8	57,5

TABLE 3.6 – Quantiles du modèle corrélé et du modèle indépendant en millions d’euros.

Le tableau est représenté sous forme de courbe dans le graphique suivant :

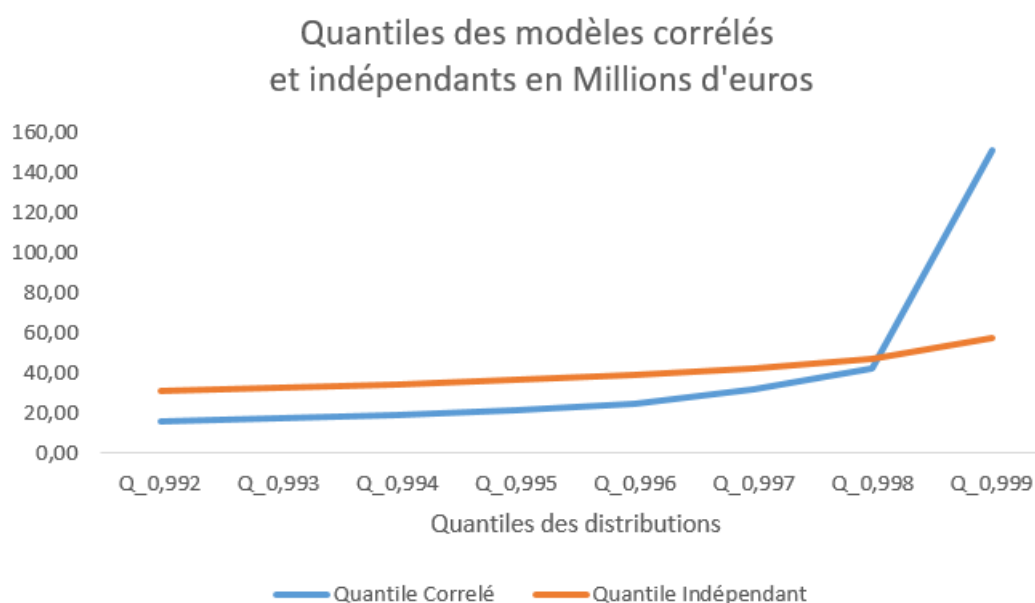


FIGURE 3.4

Le graphique et le tableau ci-dessus sont une illustration du phénomène décrit plus haut. On peut noter deux phénomènes :

- (1) Une augmentation des quantiles très extrêmes. L’effet se détecte entre le quantile 99,8% et 99,9%.
- (2) Le nombre de simulations non-nulles étant constant entre les deux modèles, on observe une diminution des quantiles inférieure à celui 99,8%.

De plus, il est à noter que les QS sont aussi affectés par la corrélation mais l’effet est quantitativement moins important. Cet effet est en particulier dû au fait que les limites des XS sont assez élevées comparées aux primes des QS. Les pertes des QS peuvent techniquement tendre vers l’infini mais la queue de distribution est très peu épaisse. Pour comparaison, avec la modélisation des QS, le fait qu’une récupération soit égale à trois fois la prime (on rappelle que deux fois la prime correspond à un événement bi-centenaire) correspond à un événement de probabilité 0,003%. Quant à eux, les XS sont peut être rarement touchés mais lorsqu’ils le sont, l’hypothèse de distribution uniforme entre [0 ;

Limite] peut donner de très fortes récupérations ponctuelles. Pour illustrer voici un tableau des primes pour les QS ainsi que des limites pour les XS :

Pour la grande majorité des réassureurs, la corrélation a pour conséquence direct une augmentation de la métrique de bi-centenaire étudiée. Néanmoins, si le bi-centenaire est le seul quantile que l'on étudie dans la modélisation il est possible d'arriver à la conclusion que selon le profil du réassureur, introduire une corrélation entraîne une baisse du bi-centenaire mais une augmentation de quantiles plus extrêmes.

## 4 Exposition des contrats passés

Dans les chapitres précédents, l'objet d'étude était l'exposition créée par les facultatives dans un cas extrême. Cette exposition n'est toutefois qu'une partie de l'exposition totale calculée chez AXA SA. Le but de cette partie est de présenter le reste de l'exposition, celle qui correspond aux réserves cédées. Cette exposition est mesurée au niveau du groupe AXA entier, bien qu'un suivi par entité AXA est également mené. Au sein du groupe, l'exposition est essentiellement due aux cessions très matérielles de deux entités : AXA SA et AXA XL. Dans cette partie, aucune distinction ne sera faite entre les entités, et la présentation porte sur l'exposition du groupe entier envers le marché de la réassurance.

### 4.1 Présentation de l'exposition Run-Off

L'exposition du groupe AXA envers les réassureurs est composée de trois provisions majeures : les provisions dossiers/dossiers, les IBNRs et les provisions pour primes non acquises. Les provisions pour dossiers/dossiers (D/D) correspondent aux sinistres qui sont survenus et qui ont été reportés à AXA. Les IBNRs correspondent à des sinistres qui sont déjà survenus mais qui n'ont pas encore été reportés à AXA. Comme il s'agit de sinistres dont AXA n'a pas connaissance, la valeur de cette provision est calculée statistiquement par les équipes du reserving. La méthode de calcul de ces IBNRs ne fait pas partie de l'étude de ce mémoire, pour plus d'information sur leur calcul voir [6]. La provision pour prime non acquise (PNA) correspond à un pourcentage de la prime payée pour le contrat. La prime du contrat est sensée couvrir l'entièreté de la durée du contrat, ainsi on considère que l'on a acquis uniquement la prime au prorata temporis. Par exemple, si le contrat dure un an, au bout de 3 mois, un quart de la prime est acquise et les trois autres quarts sont en provision.

En plus de ces trois provisions, il est commun de prendre en compte l'état des balances comptables entre AXA et le réassureur concerné. Ce sujet est complexe car très lié au rythme de comptabilité des assureurs et réassureurs. Ici, on ne le prend pas en compte. Ainsi on a l'exposition, que l'on nomme "Run-off" ou "RO", suivante :

$$Exp_{RO} = D/D + IBNR + PNA$$

Pour l'étude qui suit, le point de vue adopté est légèrement différent. En effet, l'exposition du RO d'un contrat peut aussi être calculé à l'aide du loss ratio observé sur l'année. Cette méthode est utile car elle ne demande pas un suivis des 3 indicateurs. Néanmoins, le loss ratio réel d'un contrat sur une année (ou d'une LoB entière) est observé uniquement a posteriori. Il sera alors nécessaire de faire des hypothèses sur le loss ratio du contrat pour le calcul de l' $Exp_{RO}$ . Sur un contrat d'une année on aurait alors :

$$\text{Charge ultime} = \mathbb{E}(\text{Pertes}) = LR * Primes$$

Ici, il faut distinguer la charge ultime de l'*Exp<sub>ORO</sub>*. La charge ultime correspond à la totalité des réserves qu'engendre la signature du contrat. L'*Exp<sub>ORO</sub>* est une vision à un moment donnée de l'exposition associée aux contrats. Par simplification dans la suite, on suppose que dès la signature du contrat, il y a *Exp<sub>ORO</sub>* = charge ultime qui vont ensuite diminuer car les sinistres vont être payés par le ou les réassureurs. En particulier, durant l'année où le contrat est actif, des payments peuvent déjà être réalisés. Il n'y a pas besoin d'attendre que le contrat arrive à échéance pour observer des règlements de sinistres.

## 4.2 Création et relâchement du RO

L'exposition RO d'AXA est en permanence en train de se créer à travers de nouveaux contrats signés chaque année et de disparaître lorsque les réassureurs payent les sinistres qu'ils doivent à AXA. Cette partie a pour vocation d'expliquer ce cycle et les principaux mécanismes sous-jacents. Dans cette partie, les contrats considérés sont tous d'une durée d'un an. C'est le cas de la plupart des traités et facultatives d'AXA.

### 4.2.1 Présentation des cas simples

On appelle écoulement du RO le fait qu'un réassureur paye des sinistres qu'il doit à AXA. L'écoulement dépend d'un facteur que l'on appelle le « payment pattern ». Le payment pattern est un reflet mathématique d'un rythme comptable de règlement de sinistres. Un contrat va accumuler des sinistres qui ne seront pas tous payés en même temps. Ainsi, le payment pattern correspond à la proportion de la sinistralité à l'ultime du contrat qui sont payés chaque année. Ci-dessous un payment pattern d'une durée de 4 ans :

	<i>PP</i> <sub>1</sub>	<i>PP</i> <sub>2</sub>	<i>PP</i> <sub>3</sub>	<i>PP</i> <sub>4</sub>	Somme
Payment Pattern	15%	50%	10%	25%	100%

TABLE 4.1 – Payment pattern de 4 ans.

On peut lire que la troisième année, 10% de la sinistralité à l'ultime sera payée.

On peut aussi représenter les payment pattern de manières cumulées :

	<i>PP</i> <sub>1</sub>	<i>PP</i> <sub>2</sub>	<i>PP</i> <sub>3</sub>	<i>PP</i> <sub>4</sub>
Payment Pattern	15%	65%	75%	100%

TABLE 4.2 – Payment pattern cumulé de 4 ans.

On peut lire que au bout de trois ans, 75% de la sinistralité à l'ultime sera payée.

Ainsi, un contrat rentrant en activité le 01/01/N et finissant le 31/12/N suivant ce payment pattern verra :

- 15% des sinistres liés au contrat payés au 31/12/N.
- 65% des sinistres liés au contrat payés au 31/12/N+1 dont 50% durant l'année N+1.

- 75% des sinistres liés au contrat payés au 31/12/N+2 dont 10% durant l'année N+2.
- 100% des sinistres liés au contrat payés au 31/12/N+3 dont 25% durant l'année N+3.

Les payment pattern peuvent avoir plusieurs formes. Il n'existe pas de norme quant à leur forme. Néanmoins, on distingue fréquemment deux types de payment pattern : short-tail (ST) et long-tail (LT). Si le payment pattern est de 6 ans ou moins on considère que c'est un ST sinon c'est un LT. Le fait que le payment pattern soit ST ou LT est en grande partie déterminée par la LoB du contrat. En effet, c'est le business sous-jacent qui dicte la forme du payment pattern, en particulier sur la capacité d'une LoB à produire de la sinistralité sur de plus ou moins longues périodes. Par exemple, la LoB liability est plutôt une LoB LT alors que la LoB property per risk est plutôt une LoB ST.

De plus, il est courant de calculer une duration du payment pattern. Ce calcul se réalise à l'aide du payment pattern non cumulé. On utilise la formule suivante :

$$Duration = \sum_{k=1}^N k * PP_k \text{ avec } \sum_{k=1}^N PP_k = 1$$

Par exemple pour le payment pattern de la table 4.1, on a :

$$Duration = \sum_{k=1}^4 k * PP_k = 1 * 0.15 + 2 * 0.5 + 3 * 0.1 + 4 * 0.25 = 2.45$$

Sans prendre d'hypothèse sur le LR, on étudie trois cas simples et classiques d'écoulement de RO. On étudiera l'écoulement de la variable  $\frac{Exp_{RO}}{LR} = Prime$  à l'aide d'un ou plusieurs payment pattern cumulés de la forme :

Année	1	2	...	i	...	N
Payment Pattern cumulé	$PP_1$	$PP_2$	...	$PP_i$	...	$PP_N = 100\%$

TABLE 4.3 – Payment pattern cumulé pour étude des cas simples.

Pour des raisons mathématiques, on considère que pour tout  $i \geq N$ ,  $PP_i = 1$  en cumulé et  $PP_i = 0$  en non cumulé. De même, on suppose LR=1, ce qui revient à omettre le LR dans les calculs. On réalise les calculs à l'aide des PP cumulés pour plus de lisibilité.

Dans chacun des cas étudiés par la suite, les primes ainsi que l'hypothèse de LR permettent de calculer la charge ultime qui représentent notre exposition au temps 0. Chaque année cette exposition va diminuer d'une valeur dictée par le payment pattern comme un pourcentage de l'exposition en 0.



### Cas n°1 : Un contrat non renouvelé

Soit un contrat C qui possède une prime P qui est en vigueur durant l'année X. Ce contrat dure 1 an et n'est pas renouvelé. On note alors  $Expo_C^X$  l'exposition de ce contrat au réassureur à la fin de l'année X. On a :

$$\begin{aligned} &— Expo_C^X = P * (1 - PP_1) \\ &— Expo_C^{X+1} = P * (1 - PP_2) \\ &— Expo_C^{X+2} = P * (1 - PP_3) \\ &\vdots \\ &— Expo_C^{X+(N-1)} = P * (1 - PP_N) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le tableau récapitulatif suivant :

	$Expo_C^X$	$Expo_C^{X+1}$	...	$Expo_C^{X+(i-1)}$	...	$Expo_C^{X+(N-1)}$
Exposition	$P * (1 - PP_1)$	$P * (1 - PP_2)$	...	$P * (1 - PP_i)$	...	0

TABLE 4.4 – Exposition à travers les années envers le réassureur.

Dans le cas d'un payment pattern de 4 ans, on a alors une évolution de la forme :

	$Expo_C^X$	$Expo_C^{X+1}$	$Expo_C^{X+2}$	$Expo_C^{X+3}$	$Expo_C^{X+4}$
Exposition	$P * (1 - PP_1)$	$P * (1 - PP_2)$	$P * (1 - PP_3)$	$P * (1 - PP_4) = 0$	$P * (1 - PP_5) = 0$

TABLE 4.5 – Exposition à travers les années envers le réassureur.

Réalisé avec un payment pattern de 4 années.

Ainsi, si l'on dispose d'un payment pattern de 4 ans, l'exposition étant une exposition de fin d'année, les expositions sont non nulles lors de l'année X, X+1 et X+2 et sont nulles pour toutes les années suivantes.

### Cas n°2 : Un contrat renouvelé

Soit un contrat  $C_X$  qui possède une prime P qui est en vigueur durant l'année X. Ce contrat dure 1 an et est renouvelé à l'infini. Ainsi le contrat de l'année X+i qui est identique au contrat  $C_X$  est noté  $C_{X+i}$ . On note alors  $Expo_{C_X}^X$  l'exposition du contrat  $C_X$  au réassureur à la fin de l'année X. On note  $Expo_{tot}^X$  l'exposition totale d'AXA envers le réassureur l'année X. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} Year_X : Expo_{tot}^X &= Expo_{C_X}^X = P * (1 - PP_1) \\ Year_{X+1} : Expo_{tot}^{X+1} &= Expo_{C_X}^{X+1} + Expo_{C_{X+1}}^{X+1} = P * (1 - PP_2) + P * (1 - PP_1) = P * (2 - PP_1 - PP_2) \\ Year_{X+2} : Expo_{tot}^{X+2} &= Expo_{C_X}^{X+2} + Expo_{C_{X+1}}^{X+2} + Expo_{C_{X+2}}^{X+2} = P * (1 - PP_3) + P * (1 - PP_2) + P * \\ &(1 - PP_1) = P * (3 - PP_1 - PP_2 - PP_3) \end{aligned}$$

On peut généraliser la formule de l'exposition d'un contrat au fil des années. On rappelle que pour tout  $i \geq N$ ,  $PP_i = 1$ . Pour  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$  on peut écrire :

$$Expo_{C_{X+k}}^{X+l} = P * (1 - PP_{1+(l-k)})$$

Ainsi, pour  $j \in \mathbb{N}$ , on peut en tirer la formule suivante :

$$Expo_{tot}^{X+j} = \sum_{k=0}^j Expo_{C_{X+k}}^{X+j} = \sum_{k=0}^j P * (1 - PP_{1+(j-k)}) = P * (j + 1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP_i)$$

Cette formule montre une stratification des réserves, comme illustrée dans le tableau suivant sur cinq contrats d'un paiement pattern de 4 années :

Year	X	X+1	X+2	X+3	X+4	X+5	X+6	X+7
$C_X$	$Expo_{C_X}^X$	$Expo_{C_X}^{X+1}$	$Expo_{C_X}^{X+2}$	0	0	0	0	0
$C_{X+1}$	0	$Expo_{C_{X+1}}^{X+1}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+3}$	0	0	0	0
$C_{X+2}$	0	0	$Expo_{C_{X+2}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+4}$	0	0	0
$C_{X+3}$	0	0	0	$Expo_{C_{X+3}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+5}$	0	0
$C_{X+4}$	0	0	0	0	$Expo_{C_{X+4}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+5}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+6}$	0

TABLE 4.6 – Stratification des réserves.

La prime étant la même pour tout les contrats, on remarque que dès l'année X+2, on arrive à une exposition totale d'AXA constante. Les provisions s'écoulent et se créent à une même vitesse. Mathématiquement, en reprenant la formule précédente, on peut écrire :

$$Expo_{tot}^{X+j} = \begin{cases} P * (j + 1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP_i) & \text{si } j < N - 1 \\ P * (N - \sum_{i=1}^N PP_i) & \text{si } j \geq N - 1 \end{cases}$$

La valeur de l'exposition dans le cas  $j \geq N - 1$  est importante, c'est l'exposition finale, et donc maximale, que peut créer le contrat. Cette exposition finale est fonction du paiement pattern. En particulier, cette exposition finale est maximisée pour le PP suivant :

Année	1	2	...	i	...	N-1	N
Paiement Pattern cumulé	0	0	...	0	0	0	$PP_N = 100\%$

TABLE 4.7 – Paiement pattern cumulé qui maximise l'exposition finale.

Dans ce cas, l'exposition finale vaut  $P * (N - 1)$ . Ainsi, si l'on émet une hypothèse sur le LR du contrat et que l'on dispose du paiement pattern de la LoB du contrat, il est possible d'obtenir une estimation de l'exposition que le contrat va créer dans le futur. Ces estimations sont importantes dans le pilotage de l'appétit aux risques des réassureurs, elles peuvent permettre au risk management de prévenir les équipes de placements des contrats que ce n'est pas possible de céder ce contrat à certains réassureurs car l'exposition pourrait entraîner un dépassement dans le futur de la limite de risk appetite.

### Cas n°3 : Plusieurs contrats renouvelés

C'est le cas le plus proche du cas général chez AXA SA. Il s'agit de reprendre le cas n°2 avec plusieurs contrats qui possèdent possiblement plusieurs primes et payment patterns différents. Ainsi, considérons trois contrats  $C$ ,  $C'$  et  $C''$  différents de primes respectivement  $P$ ,  $P'$  et  $P''$ . Leurs payment patterns sont de longévité respectivement  $N$ ,  $N'$  et  $N''$  avec  $N < N' < N''$ . Voici un tableau qui résume les payment patterns :

Année	1	2	...	N	...	N'	...	N''
PP de $C$	$PP_1$	$PP_2$	...	$PP_N = 100\%$	0	0	0	0
PP de $C'$	$PP'_1$	$PP'_2$	...	$PP'_N$	...	$PP'_{N'} = 100\%$	0	0
PP de $C''$	$PP''_1$	$PP''_2$	...	$PP''_N$	...	$PP''_{N'}$	...	$PP''_{N''} = 100\%$

TABLE 4.8 – Payment pattern cumulé pour les trois contrats étudiés

Pour le cas n°2, l'exposition devient constante à partir de la fin de l'année  $N-2$ . Dans le cas où l'on a plusieurs contrats ce sera le cas à la fin de l'année  $\max(N, N', N'')-2 = N''-2$ . On a la formule suivante :

$$Expo_{tot}^{X+j} = \begin{cases} P * (j+1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP_i) + P' * (j+1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP'_i) + P'' * (j+1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP''_i) & \text{si } j \in [0, N-1[ \\ P * (N - \sum_{i=1}^N PP_i) + P' * (j+1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP'_i) + P'' * (j+1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP''_i) & \text{si } j \in [N-1, N'-1[ \\ P * (N - \sum_{i=1}^N PP_i) + P' * (N' - \sum_{i=1}^{N'} PP'_i) + P'' * (j+1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP''_i) & \text{si } j \in [N'-1, N''-1[ \\ P * (N - \sum_{i=1}^N PP_i) + P' * (N' - \sum_{i=1}^{N'} PP'_i) + P'' * (N'' - \sum_{i=1}^{N''} PP''_i) & \text{si } j \geq N''-1 \end{cases}$$

Les contrats étant indépendant les uns des autres, on retrouve une exposition finale qui est la somme des expositions finales des trois contrats.

### Conclusion

Les trois cas précédents représentent l'essentiel des situations que l'on peut rencontrer. Néanmoins, certaines formes de réassurance ne peuvent pas être modélisées de cette manière, en particulier certains contrats en assurance vie. Dans ces cas précis, la modélisation a besoin de plus d'informations sur le contrat, notamment les contrats d'assurances sous-jacents.

#### 4.2.2 Sensibilité sur les cas simples

Sur les 3 modélisations de provisionnement précédentes, il est possible d'appliquer des chocs et d'étudier leurs conséquences sur l'exposition. On se propose d'étudier des chocs sur trois indicateurs : le payment pattern, le loss ratio ainsi que sur les primes. Le choc sur les primes sera identifié comme de l'inflation qui influe les primes des contrats de réassurance.

On distingue plusieurs types de chocs qui pourront être appliqués sur les indicateurs :

1. Ponctuel. C'est un choc qui s'applique uniquement sur une seule année. Néanmoins, ce choc a possiblement un impact sur l'exposition de plusieurs années, par exemple une augmentation sur une année du LR.

2. Progressif. C'est un choc qui va s'appliquer sur plusieurs années de manière progressive, par exemple l'augmentation de la prime due à l'inflation.
3. Permanent. Il s'agit d'un choc qui s'applique sur une année précise et qui reste effectif sur toutes les années suivantes, par exemple l'augmentation du LR sur toutes les années suivant le choc.

Enfin, on peut appliquer indépendamment des indicateurs un effet prudence sur l'exposition. En effet, les cas présentés en 4.2.1 utilisent l'équation suivante :

$$LR = \frac{\mathbb{E}(Pertes)}{Prime} \iff \mathbb{E}(Pertes) = LR * Prime$$

Dans certains cas où nous disposons d'une distribution de pertes liée au contrat, on peut souhaiter étudier comme charge ultime un indicateur plus prudent de celui  $\mathbb{E}(Pertes)$ . Voici quelques exemples qui pourraient être utilisés :

1.  $\max(\mathbb{E}(Pertes), Quantile_X(Pertes))$  avec  $X \in [0,1]$
2.  $\mathbb{E}(Pertes | Pertes > Quantile_X(Pertes))$  avec  $X \in [0,1]$

Cette indicateur une fois choisi permet de calculer un ratio de prudence que sera appliqué par la suite sur les provisions. Par exemple, prenons pour indicateur la seconde proposition ci-dessus. On a alors :

$$\text{Ratio de prudence} = \frac{\mathbb{E}(Pertes | Pertes > Quantile_X(Pertes))}{\mathbb{E}(Pertes)} \geq 1$$

Les indicateurs de prudence étudiés sont créés dans le but d'être supérieur à l' $\mathbb{E}(Pertes)$ . Ainsi le ratio de prudence est toujours supérieur à 1. Ainsi on obtient une méthode de calcul de l'exposition proche de la précédente au ratio de prudence près :

$$\mathbb{E}(Pertes | Pertes > Quantile_X(Pertes)) = \text{Ratio de prudence} * \mathbb{E}(Pertes) = \text{Ratio de prudence} * LR * Prime$$

Si une distribution n'est pas disponible pour les pertes, il est possible de choisir le ratio de prudence par jugement d'expert. L'étude de cette effet de prudence revient à une étude de choc de LR. Ainsi, les effets sur le provisionnement de ce facteur de prudence se retrouve dans la partie **Choc de LR** dans la suite.

Les études des chocs se feront sur le cas n°2 vue plus tôt. Le cas n°3 étant uniquement une addition de cas n°2 et pour des soucis de simplicité de lecture, on se limite à l'étude sur le cas n°2.

## Choc de Prime

Dans cette partie on étudie en premier un choc progressif sur les primes des contrats de réassurances. Ce choc peut s'interpréter comme de l'inflation. Il s'agit du type de choc le plus adapté pour étudier l'inflation. L'étude de l'inflation est complexe et elle ne touche pas toutes les LOBs de la même manière. Ici, nous faisons une hypothèse simpliste pour tirer les conclusions principales des études de l'inflation.

Soit  $i \in \mathbb{R}$  le taux d'inflation constant d'année en année à partir de l'année X. Ainsi on obtient pour le même payment pattern que précédemment :

$$Year_X : Expo_{tot}^X = Expo_{C_X}^X = P * (1 - PP_1)$$

Dans ce modèle, le premier contrat ne sera donc jamais affecté par l'inflation.

$$Year_{X+1} : Expo_{tot}^{X+1} = Expo_{C_X}^{X+1} + Expo_{C_{X+1}}^{X+1} = P * (1 - PP_2) + (1 + i) * P * (1 - PP_1) = P * (1 - PP_2 + (1 + i)(1 - PP_1))$$

$$Year_{X+2} : Expo_{tot}^{X+2} = Expo_{C_X}^{X+2} + Expo_{C_{X+1}}^{X+2} + Expo_{C_{X+2}}^{X+2} = P * (1 - PP_3) + (1 + i) * P * (1 - PP_2) + (1 + i)^2 * P * (1 - PP_1) = P * (1 - PP_3 + (1 + i)(1 - PP_2) + (1 + i)^2(1 - PP_1))$$

$$Year_{X+3} : Expo_{tot}^{X+3} = Expo_{C_X}^{X+3} + Expo_{C_{X+1}}^{X+3} + Expo_{C_{X+2}}^{X+3} + Expo_{C_{X+3}}^{X+3} = P * (1 - PP_4) + (1 + i) * P * (1 - PP_3) + (1 + i)^2 * P * (1 - PP_2) + (1 + i)^2 * P * (1 - PP_2) = P * ((1 + i)(1 - PP_3) + (1 + i)^2(1 - PP_2) + (1 + i)^3(1 - PP_1))$$

Ainsi on peut écrire :

$$Expo_{tot}^{X+3} = (1 + i) * Expo_{tot}^{X+2}$$

On peut le généraliser pour  $j \geq N-1$ ,

$$Expo_{tot}^{X+j} = (1 + i)^{(j+1)-(N-1)} * Expo_{tot}^{X+j-1}$$

On peut aussi généraliser le cas  $j < N-1$ ,

$$Expo_{tot}^{X+j} = \sum_{k=0}^j Expo_{C_{X+k}}^{X+j} = P * \left( \sum_{k=0}^j (1 + i)^k (1 - PP_{j+1-k}) \right)$$

On note que l'exposition ne va pas se stabiliser comme dans le cas sans inflation étudié précédemment. En particulier dans un cadre inflationniste avec  $i > 0$ , l'exposition est une fonction croissante de  $i$  qui tend vers l'infini. Il est aussi important de remarquer que les primes de réassurance s'ajustent en fonction de l'évolution des primes du business sous-jacent. Ainsi, l'évolution des primes de réassurance se font en réaction à l'évolution des primes du business réassuré.

Ainsi, dans un fort contexte inflationniste il est possible d'avoir une augmentation des expositions aux risques de toutes natures. Ainsi, par effet uniquement mécanique, de devoir revoir régulièrement ses limites de risk appetite ou d'essayer de diversifier les réassureurs où l'on place les contrats de réassurances.

Pour l'étude des primes, il est aussi possible de rencontrer des chocs qui s'appliquent ponctuellement mais sur toute les années en même temps. Il s'agit souvent de choc du à des taux de changes. Le groupe AXA libelle ses provisions en euros mais il est possible que le business sous-jacent soit dans d'autres monnaies comme le dollar américain par exemple. Ainsi, à intervalle régulier, on se doit de re-évaluer les provisions libellé en euros. Ce sont des chocs qui peuvent causer une hausse comme une baisse des provisions techniques envers les réassureurs.

## Choc de LR

Dans le cadre de l'étude des chocs de LR, il est important de rappeler que les études précédentes ont toutes été réalisées avec une hypothèse de LR = 1. Cette hypothèse est équivalente à dire que les sinistres du contrat sont égaux à la prime, elle sert à alléger les notations lors des études précédentes. Dans cette étude cette hypothèse ne peut pas être conservée.

Ainsi si l'on écrit  $\frac{Exp_{RO}}{LR} = Prime \iff Exp_{RO} = LR * Prime$ , on peut écrire les résultats précédents en changeant les primes en LR\*Primes ce qui donne en particulier pour le cas n°2 :

$$Exp_{tot}^{X+j} = \sum_{k=0}^j Exp_{C_{X+k}}^{X+j} = LR * P * (j + 1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP_i)$$

$$Exp_{tot}^{X+j} = \begin{cases} LR * P * (j + 1 - \sum_{i=1}^{j+1} PP_i) & \text{si } j < N - 1 \\ LR * P * (N - \sum_{i=1}^N PP_i) & \text{si } j \geq N - 1 \end{cases}$$

Un choc progressif comme étudié pour l'inflation n'est pas très adapté pour le loss ratio. Les contrats de chaque années ont un loss ratio variable mais ils ne suivent pas nécessairement d'augmentation constante comme dans le cas de l'inflation. Mathématiquement, ce cas serait similaire à celui de l'inflation, il s'agit d'augmenter les sinistres à travers le LR, les conclusions seraient les mêmes.

Les loss ratios sont plutôt sujet à de fortes hausses ponctuelles sur une année qui a pu connaître de forts sinistres. Un choc de LR sur une année X entraîne une augmentation des recoverables sur les N années suivantes. L'effet du choc a donc une influence très forte sur les contrats dont le payment pattern est long tail. Supposons que le LR du contrat est de 1 et le LR choqué est  $LR_{Choc}$  survient lors de l'année X. Au total des recoverables dans le cas LR=1 il faudra ajouter :

	$Exp_{Supp}^X$	$Exp_{Supp}^{X+1}$	...	$Exp_{Supp}^{X+(i-1)}$	...	$Exp_{Supp}^{X+(N-1)}$
Exposition	$P * (LR_{Choc} - 1) * (1 - PP_1)$	$P * (LR_{Choc} - 1) * (1 - PP_2)$	...	$P * (LR_{Choc} - 1) * (1 - PP_i)$	...	0

TABLE 4.9 – Exposition supplémentaire du au choc de LR.

Cet ajout peut avoir des conséquences sur le respect des limites d'appétit aux risques. Il est possible d'imposer en interne des chocs de LR qui ont pour but de vérifier si lors d'un choc, l'exposition dépasse la limite d'appétit aux risques.

Il est possible d'étudier un cas de choc permanent pour les LR. Par exemple, des contrats qui ne seraient plus exactement les mêmes à partir d'une année. Si un contrat possédait une exclusion de certains risques et que lors du renouvellement ceux-ci ne sont plus exclus, il est possible que le LR augmente de manière permanente sur le contrat. Dans ce cas, l'exposition va connaître une période de transition entre l'ancien LR et le nouveau LR. Au bout de N années, on se retrouvera dans un cas stable avec le nouveau LR.

## Choc de PP

Les chocs de payment pattern peuvent prendre plusieurs formes. On s'intéresse en particulier à des chocs qui entraînent des retards de paiement de la part du réassureur. En effet, dans le cas inverse, l'exposition va diminuer plus rapidement que prévu, ce qui ne représente pas un danger d'un point de vue appétit aux risques.

Le ralentissement ou l'arrêt pour une durée indéterminée des paiements de certains sinistres peut avoir des conséquences importantes sur les réserves cédées aux réassureurs. Ce ralentissement (ou cet arrêt) est souvent dû à un litige quant à la prise en compte ou non de certains sinistres par le contrat. Ces litiges peuvent mettre plusieurs années à se résoudre car il s'agit d'enjeux légaux complexes. Les litiges deviennent des enjeux financiers et politiques au sein des assureurs et réassureurs et impliquent le top management de chaque entité juridique concernée par le litige. Il est important de noter que si un contrat d'une durée d'un an engendre un litige au sein d'une année, il est tout à fait possible que le même contrat soit signé l'année suivante. Ainsi, si les paiements sont mis en pause à cause du litige, des provisions continuent de se créer au fil du temps. A propos des provisions, il est donc important de comprendre quand est-ce que le ralentissement ou l'arrêt des paiements commencent pour déterminer ce qui a déjà été payé et ce qu'il reste à payer. Enfin, la partie qui reste à payer est de fait contestée par les deux entités. Ainsi elle est peut être amenée à évoluer avant la reprise des paiements des sinistres.

Pour débiter l'étude, reprenons le tableau récapitulatif des résultats du cas n°2 :

Year	X	X+1	X+2	X+3	X+4	X+5	X+6	X+7
$C_X$	$Expo_{C_X}^X$	$Expo_{C_X}^{X+1}$	$Expo_{C_X}^{X+2}$	0	0	0	0	0
$C_{X+1}$	0	$Expo_{C_{X+1}}^{X+1}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+3}$	0	0	0	0
$C_{X+2}$	0	0	$Expo_{C_{X+2}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+4}$	0	0	0
$C_{X+3}$	0	0	0	$Expo_{C_{X+3}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+5}$	0	0
$C_{X+4}$	0	0	0	0	$Expo_{C_{X+4}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+5}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+6}$	0

TABLE 4.10 – Stratification des réserves avec un PP de 4 ans.

La formule de calcul de chaque terme pour  $(k,l) \in \mathbb{N}^2$  est :

$$Expo_{C_{X+k}}^{X+l} = P * (1 - PP_{1+(l-k)})$$

Supposons qu'il y a litige et arrêt des paiements sur le contrat  $C_{X+1}$  durant l'année X+2. Ainsi, les paiements sont mis en attente. Pour l'exemple, supposons qu'ils sont mis en attente pendant 2 ans. Le payment pattern et l'exposition du contrat  $C_{X+1}$  deviennent donc :

	$Expo_{C_{X+1}}^{X+1}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+5}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+6}$
PP	$PP_1$	$PP_1$	$PP_1$	$PP_2$	$PP_3$	$PP_4$
Exposition	$P * (1 - PP_1)$	$P * (1 - PP_1)$	$P * (1 - PP_1)$	$P * (1 - PP_2)$	$P * (1 - PP_3)$	$P * (1 - PP_4) = 0$

TABLE 4.11 – Exposition à travers les années envers le réassureur.  
Réalisé avec un payment pattern de 4 années modifié par le choc de PP  
Le payment pattern est un PP cumulé

On peut aussi le présenter sous forme d'exposition supplémentaire par rapport au cas sans litige. Par exemple à la fin de l'année X+2, sans litige l'exposition serait de  $P(1 - PP_2)$  et avec litige cette exposition est de  $P(1 - PP_1)$  ce qui résulte en une augmentation de l'exposition de  $P(PP_2 - PP_1)$ .

	$Expo_{C_{X+1}}^{X+1}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+5}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+6}$
PP	$PP_1$	$PP_1$	$PP_1$	$PP_2$	$PP_3$	$PP_4$
Exposition Supplémentaire	0	$P * (PP_2 - PP_1)$	$P * (PP_3 - PP_1)$	$P * (1 - PP_2)$	$P * (1 - PP_3)$	0

TABLE 4.12 – Exposition supplémentaire à travers les années envers le réassureur.  
Réalisé avec un payment pattern de 4 années modifié par le choc de PP  
Le payment pattern est un PP cumulé

Ce tableau montre que le choc de PP n'affecte pas les payment pattern LT et ST de la même manière. En effet, un contrat LT paie par année moins de sinistres qu'un contrat ST. Ainsi, à prime égale, l'arrêt des paiements de sinistres d'un contrat LT a matériellement moins d'impact que l'arrêt des paiements d'un contrat ST. Mathématiquement, plus les écarts  $(PP_2 - PP_1)$ ,  $(PP_3 - PP_1)$ ,  $(1 - PP_2)$  et  $(1 - PP_3)$  sont élevés plus l'impact sera important sur l'exposition aux réassureurs. Le litige a donc un impact sur la stratification des réserves et l'exposition totale envers le réassureur. La table de stratification devient alors :

Year	X	X+1	X+2	X+3	X+4	X+5	X+6	X+7
$C_X$	$Expo_{C_X}^X$	$Expo_{C_X}^{X+1}$	$Expo_{C_X}^{X+2}$	0	0	0	0	0
$C_{X+1}$	0	$Expo_{C_{X+1}}^{X+1}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+1}}^{X+5}$	0	0
$C_{X+2}$	0	0	$Expo_{C_{X+2}}^{X+2}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+2}}^{X+4}$	0	0	0
$C_{X+3}$	0	0	0	$Expo_{C_{X+3}}^{X+3}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+3}}^{X+5}$	0	0
$C_{X+4}$	0	0	0	0	$Expo_{C_{X+4}}^{X+4}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+5}$	$Expo_{C_{X+4}}^{X+6}$	0

TABLE 4.13 – Stratification des réserves avec un PP de 4 ans.  
Inclu un choc de payment pattern.

Ici, l'hypothèse de garder le même rythme de paiement une fois le litige résolu est discutable. Il est tout à fait possible qu'après résolution du litige un paiement plus important que celui initialement prévu par le payment pattern soit réalisé. De plus, le litige porte sur un ou plusieurs sinistres mais pas forcément sur tous les sinistres liés au contrat. Ainsi, il est possible que les paiements soient uniquement ralentis et non complètement suspendus. Le cas étudié ici constitue le cas prudent et extrême où l'ensemble des règlements de sinistres sont à l'arrêt.



## 4.3 Vue globale de l'exposition du groupe AXA envers ses réassureurs

A travers les chapitres deux, trois et quatre, ce mémoire a présenté différents indicateurs qui mènent au calcul de l'exposition du groupe AXA envers ses réassureurs externes. Cette partie a pour but de récapituler ce qui a été vu et de préciser que ce qui n'a pas été étudié dans le but de donner le calcul de l'exposition totale d'AXA SA envers ses réassureurs.

### 4.3.1 Récapitulation de l'exposition totale envers un réassureur

L'exposition, au sens donné par AXA SA, envers les réassureurs du marché de la réassurance se découpe en deux indicateurs : l'exposition du bilan ainsi que l'exposition de l'année en cours. L'exposition de l'année en cours est notée  $Expo_{UW}$ . Elle a été étudiée dans les chapitres 2 et 3. Néanmoins, dans les chapitres 2 et 3 l'étude porte uniquement sur les facultatives. La partie sur la réassurance obligatoire, ou traité, est présentée dans [5] et [4]. Elle contient en particulier la modélisation des XS à plusieurs tranches ainsi que des contrats d'excédent de plein (ou Surplus) et des contrats d'excédent de pertes (ou Stop-Loss). Il est à noter qu'il y a une diversification entre les facultatives et les traités lors du calcul du bi-centenaire du réassureur. L'exposition au bilan est notée  $Expo_{RO}$  et elle est calculée contrat par contrat, que le contrat soit une facultative ou un traité. Ainsi on a les formules suivantes :

$$Expo_{RO} = Expo_{RO}^{Facultatives} + Expo_{RO}^{Traites}$$
$$Expo_{UW} = Quantile_{0,995}(Strip^{Facultatives} + Strip^{Traites})$$

Néanmoins, l'exposition totale d'AXA envers un réassureur n'est pas exactement calculée comme l'addition des deux expositions. En effet, l'exposition est constituée de provisions ou de possibles provisions futures qui sont des règlements de sinistres. Ainsi ce futur chiffre d'affaire est soumis à des taxes de la part des états. Les taxes dépendent des entités AXA dont les sinistres sont réassurés. A partir du profil d'exposition d'un réassureur, on peut lui attribuer un taux de taxe que l'on note  $tx_{taxe}$ . Ce taux dépend de la répartition des provisions cédées à ce réassureur au sein des différentes entités du groupe AXA. De plus ce taux n'est pas forcément le même pour l' $Expo_{RO}$  que pour l' $Expo_{UW}$ . En effet, si les contrats en cours du réassureur proviennent d'entités différentes, alors l' $Expo_{UW}$  pourrait être soumise à des taxes différentes que celle de l' $Expo_{RO}$ . Ainsi, on distingue  $tx_{taxe}^{RO}$  et  $tx_{taxe}^{UW}$ .

Enfin, le groupe AXA prend aussi en compte un taux de recouvrement en cas de défaut. En effet, le groupe AXA considère qu'en cas de défaut une proportion des sinistres sera tout de même réglée. En cas de défaut, le réassureur se doit d'utiliser tout ce qu'il possède pour régler en premier ses dettes, dont les sinistres envers AXA. Ce taux est noté  $RR$  pour « Recovery Rate ». Les limites d'appétit aux risques sont choisis pour être comparé à de l'exposition post taxe et post taux de recouvrement. On peut alors calculer l'exposition suivante :

$$Expo_{Totale} = \left( Expo_{RO} * (1 - tx_{taxe}^{RO}) + Expo_{UW} * (1 - tx_{taxe}^{UW}) \right) * (1 - RR)$$

### 4.3.2 Mécanisme de diminution de l'exposition

L'étude des différents chocs a montré que l'exposition pouvait évoluer sans que les contrats sous-jacents aient évolué, du fait d'un changement de loss ratio ou de prime par exemple. Ce sont des évolutions que le réassureur ne contrôle pas. En particulier, l'évolution des taux de change ou de l'inflation peut augmenter ou diminuer l'exposition que l'on mesure sur nos réassureurs.

Une méthode que la cédante peut adopter pour diminuer son risque de contrepartie, c'est à dire son exposition envers le réassureur, est de demander la mise en place d'un système de collatéraux. Un collatéral est un actif, un ensemble d'actif ou de liquidités mis à disposition par la contrepartie pour limiter les pertes de la cédante en cas de défaut. Dans le cas où un défaut surviendrait, tous les actifs placés en tant que collatéral reviennent immédiatement à la cédante. Un collatéral peut prendre plusieurs formes parmi lesquelles on retrouve : les lettres de crédit, les obligations, les actions, tout titre de créances ou encore un système de « funds withheld ». Ce dernier est une méthode qui consiste à ne pas payer, en partie ou totalement, la prime de réassurance pour s'en servir comme collatéral sur le contrat. Ces collatéraux peuvent être négociés avec le réassureur ou imposés par la régulation du pays ou de la zone économique où se trouve la cédante et/ou le réassureur. De plus, les règles de valorisation des collatéraux peuvent dépendre de la législation mais aussi de demandes internes de la cédante. Par exemple, si on considère la valorisation des actifs financiers tels que les obligations, il est possible d'appliquer des « haircuts » en fonction de la qualité des actifs. Un haircut consiste à comptabiliser à  $X\%$ , avec  $X \in [0;100]$ , la valeur de marché de l'actif financier. Sans haircut, une obligation d'état français d'une valeur  $V$  réduirait le risque de contrepartie de du même montant qu'une action de valeur  $V$  de n'importe quelle entreprise.

Dans la plupart des cas, les collatéraux viennent diminuer l' $Exp_{RO}$ . Néanmoins, sur de rares contrats, il est possible de collatéraliser l' $Exp_{UW}$ . Ainsi, en notant  $Collat_{RO}$  et  $Collat_{UW}$  les collatéraux, haircut compris, du réassureur on alors l'exposition suivante :

$$Exp_{Totale} = ((Exp_{RO} - Collat_{RO}) * (1 - tx_{taxe}^{RO}) + (Exp_{UW} - Collat_{UW}) * (1 - tx_{taxe}^{UW})) * (1 - RR)$$

C'est sur la base de cette exposition que le groupe AXA étudie son risque de contrepartie envers les réassureurs. Un aspect important à prendre en compte est le moment précis à partir duquel sont postés les collatéraux. C'est l'une des raisons pour laquelle les calculs d'exposition doivent régulièrement être mis à jour.

# Conclusion

Ce rapport a permis de présenter comment AXA SA gère une partie de son risque de crédit. En particulier, comment elle modélise ses facultatives pour ses calculs de SCR et d'appétit aux risques. Il a aussi montré comment la modélisation des FACs est dépendante de données provenant d'une base de donnée déclarative. La modélisation est alors contrainte par la qualité des données que l'on possède en entrée des modèles. Enfin, il a également démontré que l'ajout de corrélation entre facultatives a pour la plupart du temps augmenté la valeur du bi-centenaire. Néanmoins, une attention particulière a été mise sur l'explication des cas où le bi-centenaire stagne ou diminue. Une présentation simple de l'exposition envers les réassureurs due aux provisions techniques a été réalisée. Malgré sa simplicité, le modèle permet d'expliquer les phénomènes principaux d'évolution de l'exposition. En particulier, il a été expliqué comment une augmentation des provisions cédées ne correspond pas forcément à plus de sinistres mais peut parfois être subie à cause de conjonctures économiques telles que l'inflation ou la variation de certains taux de change.

Des critiques peuvent être émises sur les méthodologies de modélisation des strips de récupération des FACs. En particulier, l'hypothèse de loss ratio égal à 1 présente dans les modélisations des QS et des XL. Les mémoires [4] et [5] ont déjà montré la faiblesse de cette hypothèse sur certaines LoBs mais aussi sa prudence sur d'autres LoBs. De même, [4] a montré une grande faiblesse de l'hypothèse spécifique à la modélisation des QS qui stipule que le bi-centenaire est égal à deux fois le loss ratio. Néanmoins, le modèle reste globalement prudent sur les QS ainsi que sur les XS de part le choix de la loi uniforme comme loi de sévérité.

A propos des nouvelles méthodologies créées pour ce rapport, deux points principaux peuvent être discutés. Le premier est la suppression des FACs extérieures aux bornes des quantiles 1% et 99%. Cette méthodologie a été mise en place pour supprimer les FACs qui sont mal saisies de manière évidente. Néanmoins, la méthodologie n'est pas parfaite. Une solution que l'on pourrait essayer serait de demander des valeurs de seuil aux équipes de placement des entités. Leurs connaissances de leurs marchés locaux pourraient être un bon complément d'information pour affiner nos valeurs d'exclusions. La seconde concerne le choix de notre coefficient  $i_0$ , qui correspond à la borne séparant les « grosses » FACs des « petites » FACs. Cet indicateur semble nécessaire pour des soucis de volumes de données mais n'est pas parfait. En particulier, capter l'effet des XS pour comprendre l'importance de chaque FAC en terme d'exposition n'est pas évident et reste libre d'interprétation. Sur les copules elles-mêmes, on pourrait essayer d'autres types de copules afin de corréliser les facultatives entre elles.

Pour aller plus loin sur les corrélations, on pourrait introduire en plus d'une corrélation intra-LoB, une corrélation inter-LoB entre facultatives puis une corrélation avec les contrats de réassurances obligatoires. En effet, uniquement les facultatives ont été abordées dans ce mémoire. Néanmoins, pour certains réassureurs, les traités représentent une participation plus importante dans le bi-centenaire que les facultatives et ne peuvent donc pas être négligés. L'ajout de ces corrélations se ferait d'abord au niveau inter-LoB avant d'être fait au niveau des traités. Un enjeu majeur de la modélisation inter-LoB consiste à ne pas annuler la corrélation faite au sein des LoBs lors de l'implémentation de la corrélation entre LoBs.

L'étude complète des réserves cédées aux réassureur demande un approfondissement de tous les sous-indicateurs qui composent l'*ExpORO*. De plus, une compréhension profonde des rythmes de comptabilité des assureurs et réassureurs est nécessaire pour expliquer l'évolution dans le temps des réserves. Enfin, l'étude aurait besoin d'une analyse des différents types de collatéraux obligatoires présents dans les comptes ainsi que des détails des contrats de collatéraux facultatifs qui sont signés entre assureurs et réassureurs.

# Bibliographie

- [1] atlas mag.net. Top 50 réassureurs mondiaux. [Lien](#), 2020.
- [2] Arthur Charpentier. Copules et risques multiples. [Lien](#), 2013.
- [3] David Billod de Filiquier. Modélisation du risque de contrepartie sur les réassureurs. [Lien](#), 2016.
- [4] Sébastien Farkas. La gestion du risque de crédit envers les réassureurs. [Lien](#), 2019.
- [5] Dounia Hammami. Modélisation du risque de crédit envers les réassureurs. [Lien](#), 2020.
- [6] Éric Lecœur. La provision ibnr. [Lien](#), 2011.

# Annexes

## Graphiques Statistiques Descriptives

Pour plus de lisibilité on se propose quelques histogrammes pour visualiser la BDD.

Voici les trois graphiques tirés de l'étude sur les LoBs :

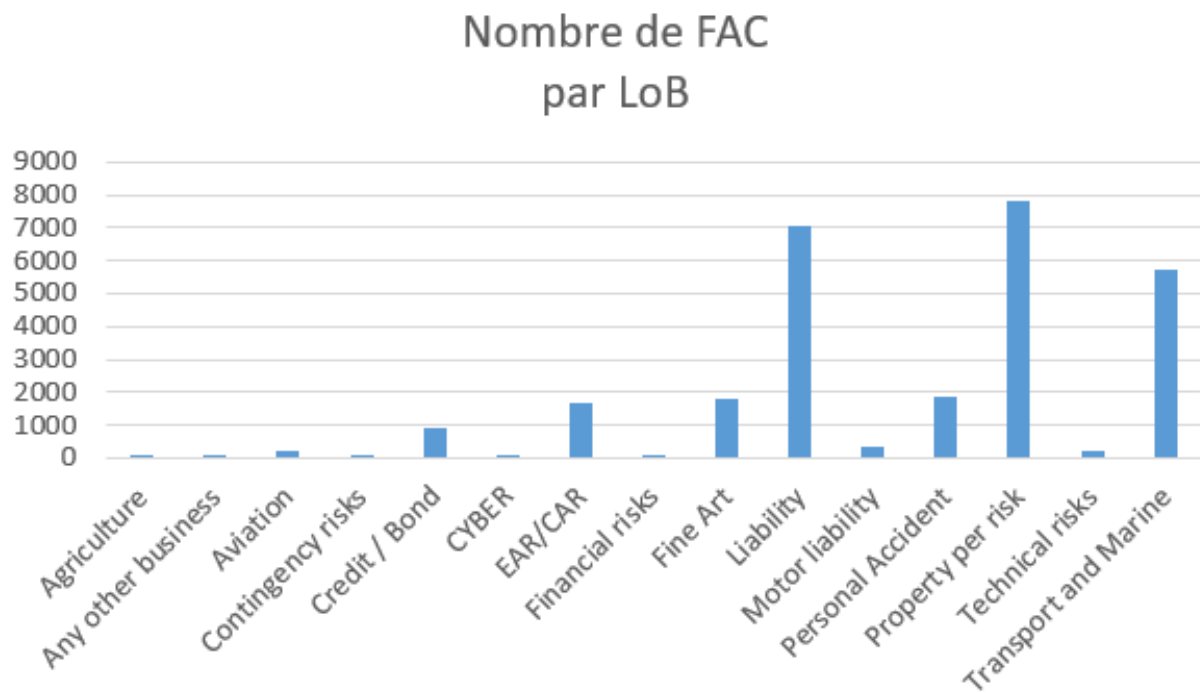


FIGURE 4.1 – Nombre de FACs par LoB

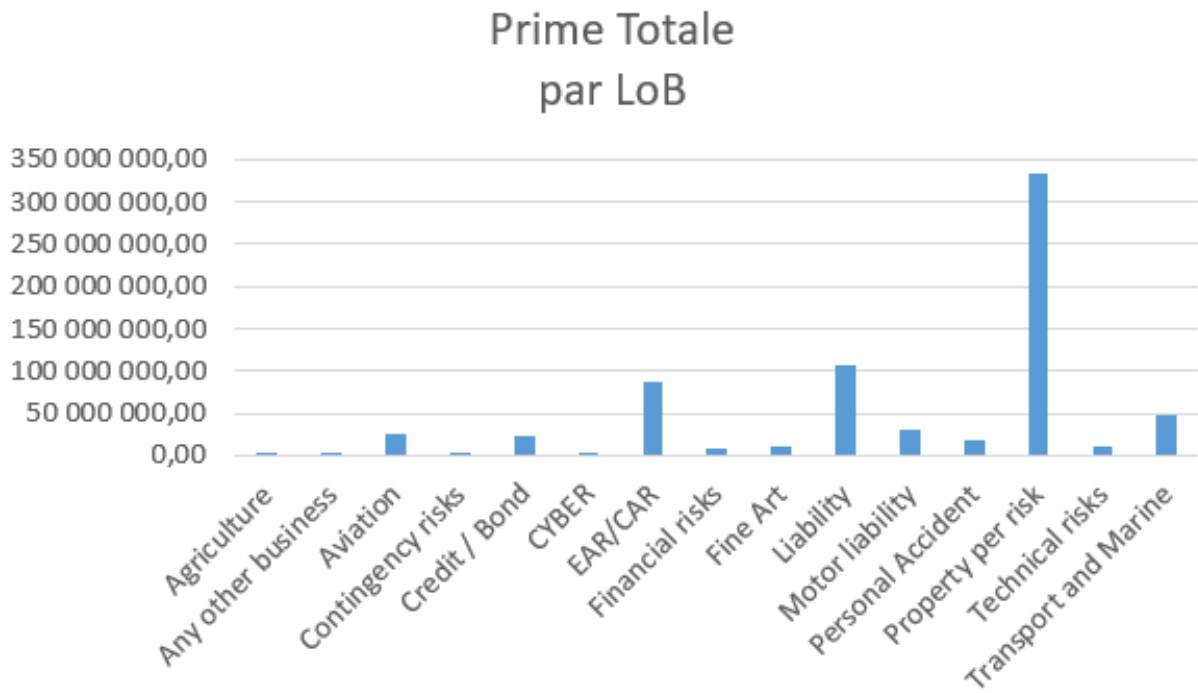


FIGURE 4.2 – Volume total des primes par LoB (l'échelle verticale est en euro.)

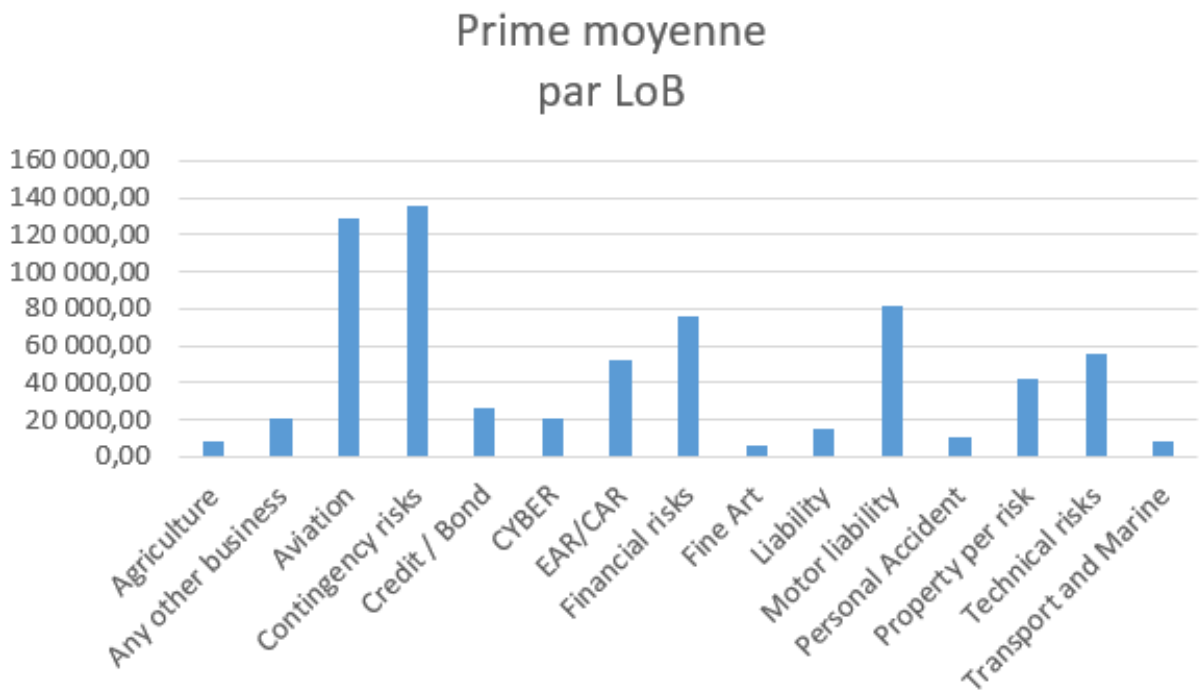


FIGURE 4.3 – Prime moyenne par LoB (l'échelle verticale est en euro.)

Voici les trois graphiques tirés de l'étude sur les Entités :

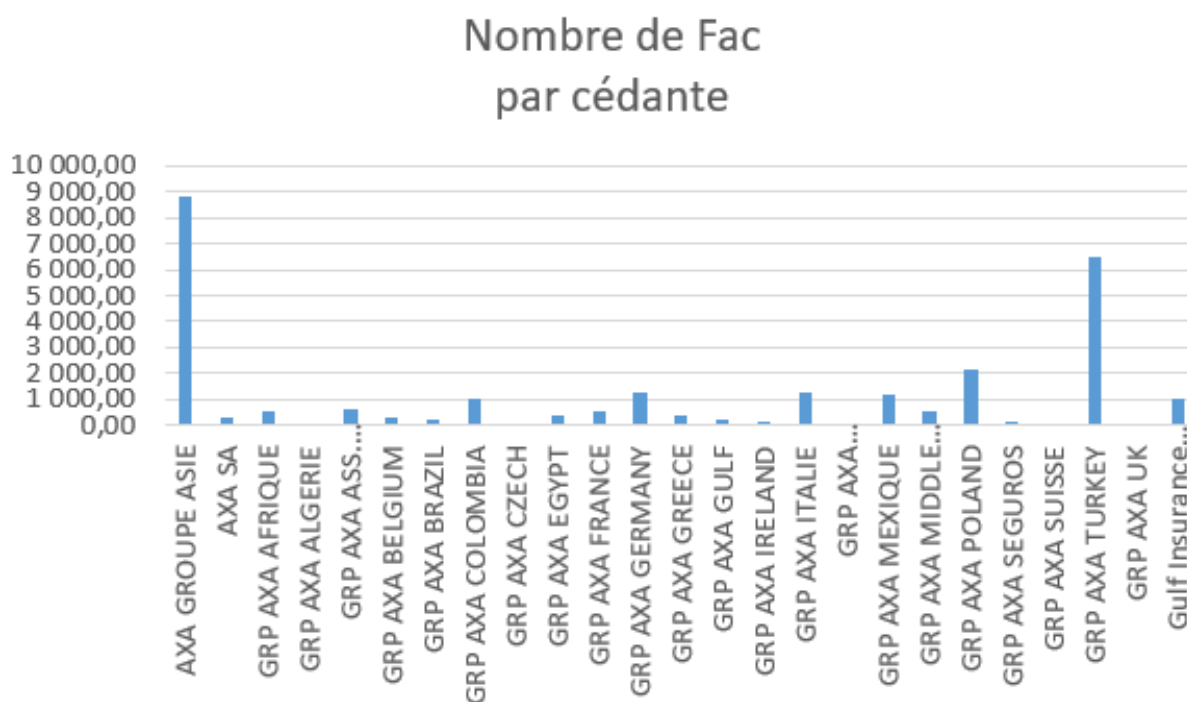


FIGURE 4.4 – Nombre de FACs par entité

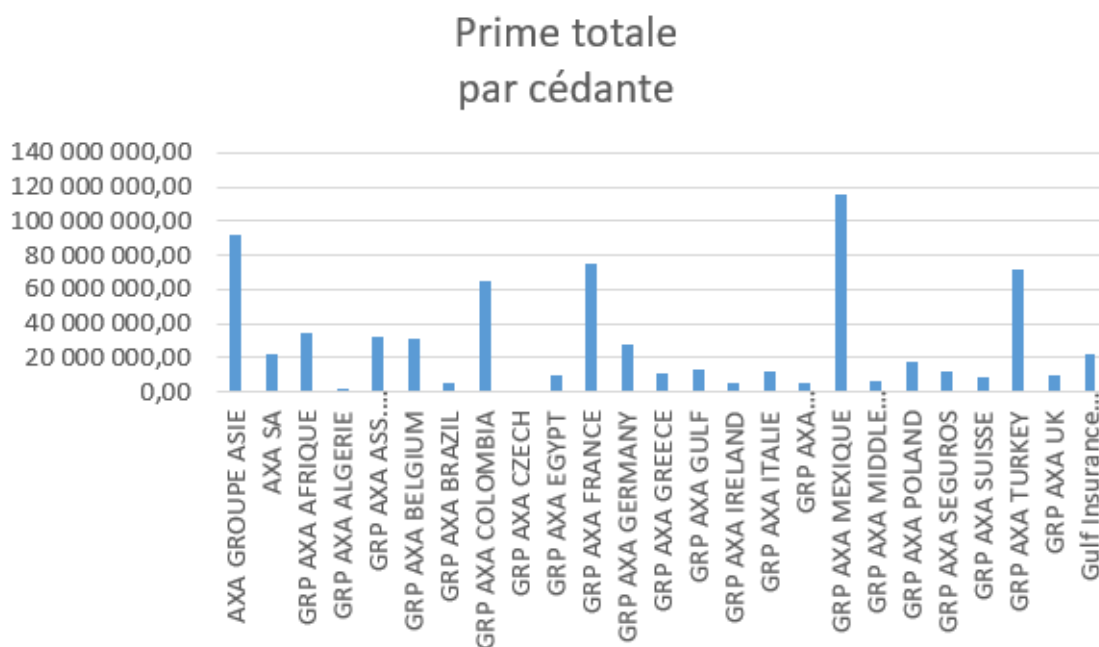


FIGURE 4.5 – Volume total des primes par entité (l'échelle verticale est en euro.)



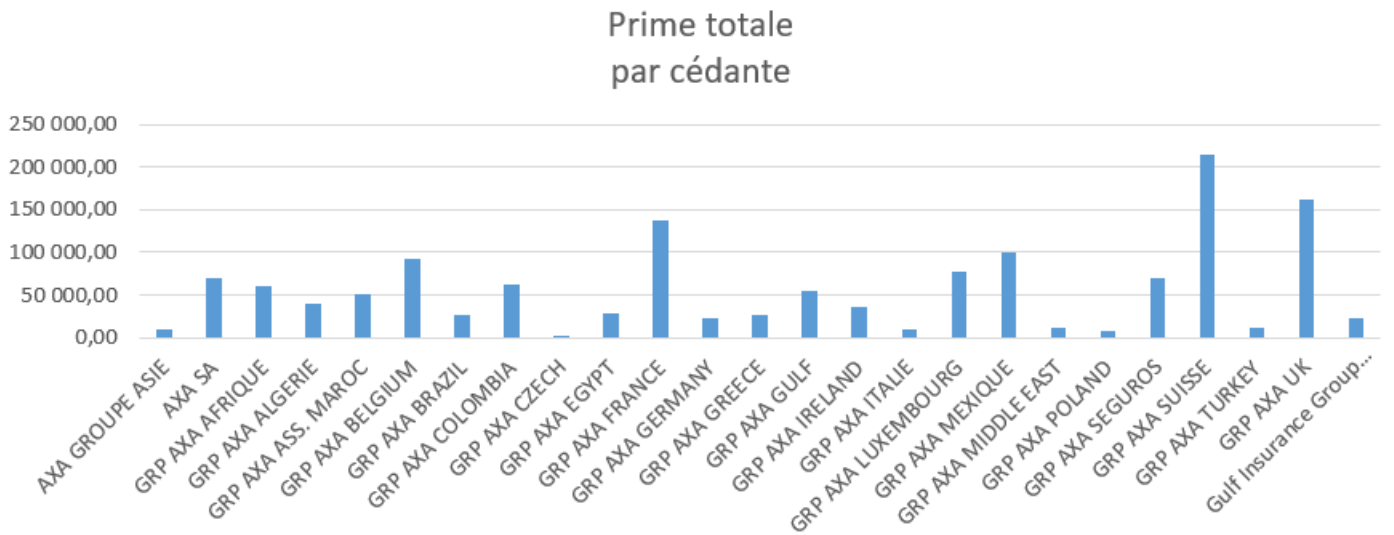


FIGURE 4.6 – Prime moyenne par entité (l'échelle verticale est en euro.)

Dans la suite, les tableaux de statistiques descriptives à la maille (Entité AXA, LoB) sont réparties sur 3 pages pour les primes et sur 2 pages pour les nombres de FAC. On rappelle que des sous-tableaux se trouvent dans le corps du rapport.

Ceding Company group	Agriculture	Other	Aviation	Contingency	Credit/Bond	CYBER	EAR/CAR
Asie					4 946		6 581
XL Brésil		14	6 862				
Afrique	16		9 341	2 965	152		1498
Algérie							1 507
Maroc			4 430				931
Belgium							179
Brazil							2258
Colombia			3 683		2 005		2 452
Czech							
Egypt		103					3 370
France		32		382	4 193		39 200
Germany				92	246		7 922
Greece				39			89
Gulf							33 605
Ireland							
Italie					864		
Luxembourg							288
Mexique			1 214				5 391
Middle East							97
Poland					5 757		4 302
Spain					941		614
Suisse					5 305		17
Turkey			150	33		21	3 244
UK							
KSCP							3 266
Total	16	149	25 680	3 511	24 410	21	86 273

TABLE 4.14 – Prime en milliers d’euros - Etude Entité x LoB Partie 1

Ceding Company group	Financial risk	Fine Art	Liability	Motor liability	Personal accident	Property per risk	Technical risks
Asie		10 120	13 762	29	933	41 852	915
XL Brésil			2 138			11 145	
Afrique	119		1 042	7	121	10 700	517
Algérie			83			7	14
Maroc		7	2 667			21 877	6
Belgium		64	10 698	7 477		12 309	80
Brazil			126			2 416	
Colombia	3 164	11 210				39 345	504
Czech		7					
Egypt			1 406	83		4 943	
France	32		8 980	2 592	3 097	16 513	
Germany			1 421	486	215	11 968	5 585
Greece	2 417		2 504			5 472	57
Gulf			1 873			7 510	
Ireland			1 202	3 478		242	
Italie			721	3 352	7 337	64	
Luxembourg			42	4 864		25	
Mexique	1 423	501	8 869	63	4 703	84 821	1 056
Middle East			108	42	27	5 559	
Poland		46	6 563			485	792
Spain			799	8 235	71	1 259	10
Suisse			175		203	321	1 285
Turkey	24	8	26 522	52	58	36 942	
UK			165			9 388	
KSCP	141		4 262	60	2 423	7 793	
Total	7 321	10 754	107 366	30 383	19 187	332 953	10 822

TABLE 4.15 – Prime en milliers d’euros - Etude Entité x LoB Partie 2

Ceding Company group	Transport and marine	Total
Asie	12 806	91 945
XL Brésil	1 777	21 935
Afrique	8 381	34 859
Algérie	13	1 624
Maroc	2 441	32 360
Belgium		30 807
Brazil	725	5 525
Colombia	2 536	64 899
Czech		7
Egypt	328	10 233
France	9	75 029
Germany	130	27 626
Greece	359	10 938
Gulf	839	13 287
Ireland		4 922
Italie		12 338
Luxembourg		5 219
Mexique	7 988	116 029
Middle East	97	5 929
Poland		17 945
Spain	332	12 261
Suisse	1 085	8 390
Turkey	4 608	71 694
UK		9 553
KSCP	4 616	22 562
Total	49 069	707 915

TABLE 4.16 – Prime en milliers d’euros - Etude Entité x LoB Partie 3

Ceding Company group	Agriculture	Other	Aviation	Contingency	Credit/ Bond	CYBER	EAR/ CAR	Financial risks
Asie					195		76	
XL Brésil		2	61					
Afrique	2		53	14	12		30	6
Algérie							27	
Maroc			10				47	
Belgium							11	
Brazil							6	
Colombia			14		18		25	31
Czech								
Egypt		4					14	
France		1		8	62		113	1
Germany				2	2		29	
Greece				1			2	2
Gulf							12	
Ireland								
Italie					2			
Luxembourg							16	
Mexique			57				37	46
Middle East							3	
Poland					622		1 118	
Seguros					2		19	
Suisse					6		2	
Turkey			4	1		1	38	1
UK								
KSCP							29	10
Total	2	7	199	26	921	1	1 654	97

TABLE 4.17 – Nombre de Fac - Etude Entité x LoB Partie 1

Ceding Company group	Fine Art	Liability	Motor liability	Personal accident	Property per risk	Technical risks	Transport and marine	Total
Asie	1 695	3022	13	856	2 032	39	853	8 781
XL Brésil		40			179		28	310
Afrique		187	23	4	182	18	63	573
Algérie		10			1	1	2	41
Maroc	1	350			166	2	62	638
Belgium	2	118	30		165	5		331
Brazil		2			186		12	206
Colombia		298			603	15	47	1 051
Czech	3							3
Egypt		184	9		120		30	361
France		10	49	26	274		2	546
Germany		41	26	6	1 088	44	5	1 243
Greece		133			262	2	6	408
Gulf		81			110		42	245
Ireland		33	87		18			138
Italie		267	86	873	22			1 250
Luxembourg		20	25		7			68
Mexique	95	333	5	29	479	6	84	1 171
Middle East		26	11	22	420		20	502
Poland	34	202			91	56		2 123
Spain		25	28	3	91	2	4	174
Suisse		3		4	10	6	8	39
Turkey	2	1 203	2	8	1 011		4 183	6 454
UK		7			52			59
KSCP		444	2	2	268		251	1 006
Total	1 832	7 039	275	1 833	7 837	196	5 702	27 721

TABLE 4.18 – Nombre de Fac - Etude Entité x LoB Partie 2